Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

К. В. Власенко, С. О. Шевцов, Н. С. Грудкіна, О. О. Чумак

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Курс лекцій

Краматорськ
ДДМА
2021

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

К. В. Власенко, С. О. Шевцов, Н. С. Грудкіна, О. О. Чумак

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Курс лекцій

Затверджено
на засіданні кафедри
математики та моделювання
протокол № 5 від 7 жовтня 2021

Краматорськ
ДДМА
2021

УДК 519.2

Власенко, К. В.

В 58 Теорія ймовірностей : курс лекцій / К.В. Власенко, С.О. Шевцов, Н. С. Грудкіна, О. О. Чумак. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – с.

Містить теоретичний матеріал з теорії ймовірностей, що супроводжується прикладами розв’язків типових завдань. Може використовуватись як викладачами відповідного курсу, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 519.2

© К. В. Власенко, С. О. Шевцов,
Н. С. Грудкіна, О. О. Чумак 2021.
© ДДМА, 2021.

ЗМІСТ

ЗМІСТ 3
ВСТУП 4
1 Імовірність події в класичній імовірнісній схемі. Геометричні ймовірності. Статистичне означення ймовірності події 5
1.1 Випробування та події. Означення та види подій 5
1.2 Поняття ймовірності події. Класична формула для обчислення ймовірностей 7
1.3 Геометричний підхід до обчислення ймовірностей 10
1.4 Відносна частота появи події та її стійкість. Статистичне означення ймовірності події 11
2 Теореми додавання і множення ймовірностей та висновки з них 12
2.1 Означення суми і добутку подій 12
2.2 Теореми додавання та множення ймовірностей 14
3 Імовірності гіпотез. Формули повної ймовірності та Бейєса 18
3.1 Формули повної ймовірності та Бейєса. 18
4 Повторні незалежні випробування 20
4.1 Схема та формула Бернуллі 21
4.2 Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа 22
4.3 Формула Пуассона 25
Розділ 2 випАдкові величини 26
1 Випадкові величини та закони їх розподілу. Основні числові характеристики 26
1.1 Означення та види випадкових величин 26
1.2 Ряд розподілу дискретної випадкової величини 27
1.3 Функція розподілу випадкової величини та її властивості .. 28
1.4 Щільність розподілу випадкової величини та її властивості 32
1.5 Числові характеристики випадкових величин та їхні властивості 35
2 Основні розподіли дискретних випадкових величин 49
2.1 Імовірнісна твірна функція та її застосування для знаходження числових характеристик дискретних розподілів 49
2.2 Розподіли цілочисельної дискретної випадкової величини . 50
3 Основні розподіли неперервних випадкових величин. Закон великих чисел 60
3.1 Розподіли неперервних випадкових величин 61
3.2 Закон великих чисел 72
Додатки 78

ВСТУП

Теорія ймовірностей є математичною наукою, що вивчає закономірності випадкових подій та явищ. Поняття ймовірності й випадковості завжди пов'язані з неоднозначністю й непередбачуваністю. Проте події та явища, що спостерігаються в масовому порядку, підпорядковуються певним закономірностям. Дослідження таких закономірностей під час азартних ігор і зумовило виникнення теорії ймовірностей, як науки.

Особливий вплив на розвиток науки було здійснено такими вченими, як Б. Паскаль, П. Ферма, Я. Бернуллі, К. Гаус, П. Лаплас, С. Пуассон, П.Л. Чебишов, А.А. Марков, О.М. Ляпунов та інші.

Даний курс лекцій з теорії ймовірностей розроблено для студентів технічних закладів вищої освіти.

Посібник складається з двох розділів: «Випадкові події», «Випадкові величини», кожен з яких поділено на теми. До кожної теми наведено достатню кількість прикладів, що робить її зрозумілою для студента. У кінці посібника наведено таблиці значень спеціальних функцій.

Матеріал лекцій структурований таким чином, що може бути застосований під час:

-підготовки до аудиторних практичних або лекційних занять;

-повторення, систематизації та закріплення отриманих знань і вмінь;

-підготовки до перевірки знань та вмінь чи складання іспиту;

-самостійного вивчення як окремих тем, так і дисципліни взагалі.

Наведений матеріал відповідає навчальним планам курсу теорії ймовірностей та сучасним вимогам до організації навчально-виховного процесу.

РОЗДІЛ 1 Випадкові події

1 Імовірність події в класичній імовірнісній схемі. Геометричні ймовірності. Статистичне означення ймовірності події

Випробування і події, види подій. Класична формула для обчислення ймовірності події. Геометричні ймовірності. Відносна частота появи події. Статистичне означення ймовірності.

Література: [1, глава 2, п. 2.1 – 2.3], [2, глава 1], [4, глава 1], [7, тема 1], [10, розділ II, §9 – §13].

1.1 Випробування та події. Означення та види подій

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності, що виникають у випробуваннях (дослідах, експериментах, спостереженнях тощо) з випадковими наслідками (результатами) при їх масовому повторенні. Тобто основним об'єктом досліджень теорії ймовірностей є випробування з випадковими наслідками, або так звані стохастичні випробування. Наслідками випробувань є ті чи інші події.

Наведемо приклади випробувань та їхніх наслідків – подій:

Випробування	*Події*
1. Кидання грального кубика	Випала парна кількість очок
2. Оцінювання якості виробу	Виріб виявився бракованим
3. Звернення до системи продажу авіаквитків	Одержано квиток
4. Випробування автоматичної системи на надійність протягом часу t	Система вийшла з ладу
5. Вимірювання фізичної величини приладом	Знайдено значення величини із заданою точністю

Поняття події є одним із основних, базових понять теорії ймовірностей. Під подією будемо розуміти всякий факт, який у результаті випробування може відбутися або не відбутися. Події, як правило, позначають великими латинськими літерами *A*, *B*, *C*, ... або в разі їх значної кількості – великою латинською літерою з індексом: $A_1, A_2, ..., A_n$, а зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, подія $A = \{$рейс до Одеси виконано за розкладом$\}$.

Усі події поділяються на достовірні, неможливі та випадкові.

Достовірною називається подія, яка неодмінно відбудеться при проведенні випробування. Наприклад, при виборі навмання одного виробу із комплекту, який містить лише стандартні вироби, подія {вибрано стандартний виріб} – достовірна.

Неможливою називається подія, яка при проведенні випробування не відбудеться ні за яких умов. Наприклад, подія {вибрано нестандартний виріб}– неможлива в умовах попереднього прикладу.

Випадковою називається подія, яка в результаті проведеного випробування може відбутися або не відбутися залежно від впливу випадкових факторів. Наприклад, при виборі навмання одного виробу з комплекту, який складається зі стандартних і нестандартних виробів, подія {вибрано стандартний виріб} – випадкова.

Отже, кожне стохастичне випробування має деяку скінченну (або нескінченну) множину $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ усіх можливих наслідків, які не розкладаються на простіші. Множина Ω утворює так звану *множину (або простір) елементарних наслідків* ω_i, якщо ці наслідки є взаємовиключними і результатом випробування завжди є один і тільки один наслідок.

Оскільки довільна подія A є наслідком деякого стохастичного випробування, а простір Ω – множина всіх можливих елементарних наслідків випробування, то подія A входить у простір Ω.При цьому ті елементарні наслідки ω_1 з простору Ω, при яких подія A відбувається, тобто наслідки, які входять до складу події A $(\omega_i \in A)$, називаються *сприятливими* щодо події A .

Приклад 1.1. Із двоцифрових чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події

A = {вибране число ділиться на 5};

B = {вибране число просте };

C = {вибране число парне }.

Розв'язання. У результаті випробування може бути вибране будь-яке двоцифрове число, не більше від 20. Отже, простір елементарних наслідків $\Omega = \{10, 11, 12, ..., 20\}$. З усіх наслідків із простору Ω події A сприяють наслідки 10, 15, 20. Отже, $A = \{10, 15, 20\}$. Відповідно $B = \{11, 13, 17, 19\}$ і $C = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

Тут простір Ω і події *A, B, C* – скінченні множини.

Приклад 1.2. Об'єкт *T*, за яким ведеться спостереження за допомогою радіолокатора, займає випадкове положення на круглому екрані радіуса *r*. Описати простір елементарних наслідків Ω і подію *A*={об'єкт *T* з'явиться всередині круга, центр якого збігається з центром екрана, а площа становить чверть площі екрана }.

Розв'язання. Позначимо через ρ відстань від центра екрана до зображення об'єкта *T*. Оскільки простір елементарних наслідків – множина точок, що суцільно заповнюють екран локатора, то $\Omega = \{0 \le p \le r\}$. Площа екрана $S = \pi r^2$. Позначимо через r_1 радіус круга, що відповідає події *A*, тоді за умовою задачі площа цього круга дорівнює $\pi r_i^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$, звідки $r_1 = \frac{1}{2}r$.Отже, подія *A* описується так:

$$A = \{0 \le p < \frac{1}{2}r\}.$$

Тут простір Ω і подія *A* – нескінченні множини.

Оскільки простір елементарних наслідків $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ може розглядатися, як власна підмножина, то Ω також є подією, для якої сприятливі всі наслідки $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Отже, Ω – достовірна подія. Тому надалі достовірну подію позначатимемо Ω. До всього простору Ω елементарних наслідків додається ще й порожня множина $\varnothing$, яка також вважається подією, що не має жодного сприятливого наслідку, тобто є неможливою. Тому неможливу подію позначатимемо $\varnothing$.

1.2 Поняття ймовірності події. Класична формула для обчислення ймовірностей

Розв'язання прикладів 1.1 і 1.2 свідчать про те, що різні події характеризуються певною мірою об'єктивної можливості їх появи в результаті випробування. Так, зокрема, у прикладі 1.1 можливість появи події *C* більша, ніж події *A* або події *B* . Такою мірою можливості появи події є її *ймовірність*. Це поняття також належить до основних базових понять теорії ймовірностей.

У практичних застосуваннях здебільшого розглядаються випробування, які зводяться до так званої *класичної схеми* і в яких обчислення ймовірностей суттєво спрощується. Класична ймовірнісна схема стосується подій найпростішого виду, які називаються *випадками*, або *шансами*. Це події, які утворюють *повну групу, несумісні і рівноможливі.*

У загальному випадку події A_1, A_2 , ... , A_n називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява однієї з них у даному випробуванні виключає можливість появи будь-якої іншої з цих подій.

Наприклад, при випадковому виборі двох виробів із комплекту, який містить нерозрізнювані за зовнішнім виглядом і ретельно перемішані

придатні і браковані вироби, події {обидва вироби придатні }, {перший придатний, другий бракований }, {перший бракований, другий придатний }, {обидва вироби браковані}– несумісні.

Поняття *рівноможливості подій* не підлягає формальному визначенню, і його слід розуміти так: події $A_1, A_2, ..., A_n$ є рівно можливими в даному випробуванні, якщо за умовами проведеного випробування немає підстав вважати появу однієї із цих події більш можливою, ніж інших.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу несумісних подій* ,якщо в результаті випробування неодмінно відбудеться одна і тільки одна з них. Так чотири події перелічені в попередньому прикладі, утворюють повну групу подій.

Якщо дві несумісні події утворюють повну групу, то їх називають *протилежними* і позначають A і $\overline{A}$. Наприклад, події {принаймні один прилад вийшов із ладу} і { жодний прилад не вийшов із ладу} протилежні в одному й тому самому випробуванні.

В умовах класичної ймовірнісної схеми *ймовірність* $P(A)$ події A обчислюється за формулою класичної ймовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де n – загальна кількість усіх рівноможливих наслідків випробування, які утворюють повну групу несумісних подій;
m – кількість наслідків випробування, сприятливих щодо події A.

Із формули (1.1) випливає, що ймовірність $P(A)$ міститься в межах: $0 \le P(A) \le 1$, оскільки для достовірної події $m = n$, для неможливої $m = 0$, а для випадкової $m < n$.

Нехай множина M складається з n різних елементів.

Комбінаціями з n елементів по k називаються всі підмножини множини M, які містять k елементів і відрізняються принаймні одним елементом.

Їхню кількість C_n^k знаходять за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}, \tag{1.2}$$

де $n!=1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1$.

Для кількості комбінацій виконується властивість симетрії $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Розміщеннями з n елементів по k називаються всі підмножини множини M , які містять k елементів і відрізняються між собою або складом елементів, або порядком їх розміщення.

Їхня кількість A_n^k обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1.3)$$

Переставленнями з n елементів називаються всі можливі варіанти множини M , які відрізняються порядком розміщення елементів.

Їхню кількість P_n обчислюють за формулою:

$$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1)n. \qquad (1.4)$$

При обчисленні ймовірностей подій часто застосовується комбінаторний *принцип добутку*: якщо послідовно виконується k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і, нарешті, k-ту дію – n_k способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 n_2 ... n_k$ способами.

Наведемо приклади безпосереднього обчислення ймовірностей за формулою (1.1) із застосуванням формул (1.2) – (1.4).

Приклад 1.3. Знайти ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число ділиться на 5.

Розв'язання. Позначимо подію A = {число ділиться на 5}. Загальна кількість n наслідків випробування дорівнює 90 (вибирається одне з чисел від 10 до 99). Ці наслідки рівноможливі, оскільки число вибирається навмання, і утворюють повну групу несумісних подій, оскільки неодмінно буде вибрано одне і тільки одне з цих чисел.

Сприятливими щодо події A є ті наслідки, в яких буде вибрано число, що закінчується нулем або п'ятіркою. Кількість таких наслідків m=18. Отже, за формулою (1.1) $P(A) = 0.2$.

Приклад 1.4. У групі із двадцяти студентів 30 % – відмінники. Для складання заліку навмання викликано одного студента. Яка ймовірність того, що викликано відмінника?

Розв'язання. Позначимо подію B = {викликано відмінника}. Випробування полягає у випадковому виборі одного студента із двадцяти,

тому загальна кількість наслідків n=20. Оскільки за умовою в групі 6 відмінників, то кількість сприятливих щодо події A наслідків m = 6. За формулою (1.1) $P(B)$ = 0.3.

1.3 Геометричний підхід до обчислення ймовірностей

Класична формула (1.1) обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків випробування є нескінченна множина. У цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірностей, при якому проведення випробування інтерпретується як випадкове кидання точки в область Ω n-вимірного простору, а подія A– як потрапляння цієї точки в підобласть A області Ω. Множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_Ω області Ω, а множина наслідків, сприятливих щодо події A,– мірою m_A області A. Імовірність події А обчислюється за формулою

$$P(A)=\frac{m_A}{m_\Omega}. \qquad (1.5)$$

Зокрема, в одновимірному координатному просторі ймовірність у формулі (1.5) визначається відношенням довжин відрізків, у двовимірному просторі – відношенням площ плоских фігур, у тривимірному просторі – відношенням об'ємів просторових тіл. Отже, якщо довжину позначено через L, площу – через S і об'єм – через V, то формула (1.5) в одно-, дво-, тривимірному координатному просторі набирає відповідно такого вигляду:

$$P(A)=\frac{L_A}{L_\Omega},\ P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega},\ P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}. \qquad (1.6)$$

Приклад 1.5. Відстань між пунктами A і B автобус долає за 3 хв., а пішохід – за 15 хв. Інтервал руху автобусів 30 хв. У випадковий момент часу із A до B вирушив пішохід. Знайти ймовірність того, що він прибуде в пункт B раніше від наступного автобуса.

Розв'язання. Позначимо через x час виходу пішохода з пункту A, тоді x набуває значень з інтервалу від 0 до 30 хв. – інтервалу між відправленнями попереднього і наступного автобусів. Тому множина всіх наслідків випробування відповідає довжині цього інтервалу: $L_\Omega = 30.$

Позначимо подію: A = {пішохід прибуде в B раніше від наступного автобуса}. Цій події сприяють наслідки, для яких $30 - x + 3 > 15$, де $30 - x$ – час до виходу на маршрут наступного автобуса, 3 хв. – час руху автобуса,

15 хв– час руху пішохода. Звідси дістаємо $x < 18$. Отже, сприятливим щодо події A наслідкам відповідає довжина інтервалу $L_A = 18$. За першою з формул (1.6) $P(A) = 0.6$.

1.4 Відносна частота появи події та її стійкість. Статистичне означення ймовірності події

Класична формула (1.1) незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків є нескінченна множина або немає достатніх підстав вважати наслідки випробування ω_i рівноможливими.

У цих випадках застосовують *статистичне* означення ймовірності події, яке ґрунтується на понятті *відносної частоти події.* Це поняття поряд з імовірністю належить до основних понять теорії ймовірностей.

Відносна частота $W(A)$ події A – це відношення кількості μ випробувань, в яких подія A відбулась, до кількості ν всіх фактично проведених випробувань:

$$W(A) = \frac{\mu}{\nu}. \qquad (1.7)$$

Різниця в означеннях імовірності події і відносної частоти полягає в тому, що для обчислення ймовірності за формулою (1.1) немає потреби проводити випробування, тобто ймовірність обчислюється апріорно, тоді як відносна частота може бути обчислена за формулою (1.7) лише після фактичного проведення випробувань.

Приклад 1.6. Авіакомпанія впродовж доби виконує 25 рейсів, із них 80%– власним авіапарком. На час t було виконано 18 рейсів, із них 16– власним парком. Знайти ймовірність і відносну частоту виконання рейсу власним парком.

Розв'язання. Позначимо подію A = {рейс виконується власним авіапарком}. Оскільки загальна добова кількість рейсів дорівнює 25, а власним парком виконується 20 рейсів (наслідки, сприятливі події A), то ймовірність події A

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0.8.$$

За умовою на час t було виконано 18 рейсів, тобто фактично проведено 18 випробувань, в яких подія A відбулась 16 раз. Отже, відносна частота події A

$$W(A) = \frac{16}{18} = 0.89.$$

Тобто відносна частота $W(A)$ може істотно відрізнятися від імовірності $P(A)$. Проте, як свідчать багаторазові дослідження, відносній частоті притаманна властивість стійкості, яка полягає в тому, що зі збільшенням кількості випробувань вона наближається до значення ймовірності події і відрізняється від нього тим менше, чим більше проведено випробувань. При цьому можуть спостерігатися окремі випадки, коли навіть при великій кількості проведених випробувань відносна частота $W(A)$ істотно відрізняється від імовірності події $P(A)$, проте загальна тенденція прямування відносної частоти до ймовірності простежується досить закономірно.

Тому *статистичною ймовірністю* випадкової події A називають граничне значення відносної частоти події, до якого збігається за ймовірністю ця частота при необмеженому збільшенні кількості випробувань:

$$W(A) \underset{v\to\infty}{\to} P(A)$$

2 Теореми додавання і множення ймовірностей та висновки з них

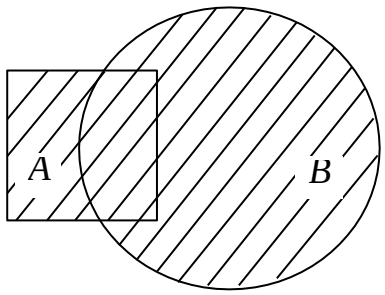
Сума і добуток подій. Теореми додавання ймовірностей несумісних та сумісних подій. Умовна ймовірність. Теореми множення незалежних та залежних подій. Імовірність появи принаймні однієї з незалежних подій.

Література: [1, глава 3, п.п. 3.1 – 3.3], [2, глава 2, п.п. 2.2 – 2.4], [4, глави 2, 3, 4 §1], [7, тема 2, п.п. 1 – 5], [10, розділ II, § 14].

2.1 Означення суми і добутку подій

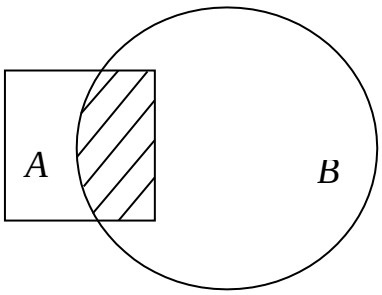
Сумою (об'єднанням) подій A і B називається подія $A + B$, яка полягає в появі в результаті випробування або події A, або B, або обох подій разом. Якщо події A і B несумісні, то їхня одночасна поява неможлива. Отже, подія $A + B$ полягає в появі або події A, або B .

Геометричну ілюстрацію суми подій A і B наведено на рис 1.1.



A + B

Рисунок 1.1



AB

Рисунок 1.2

Добутком (перерізом подій *A* і *B* називається подія *AB*, яка полягає в одночасній появі в результаті випробування подій *A* і *B*. Геометричну ілюстрацію добутку двох подій наведено на рис. 1.2. Відповідно для довільної кількості n подій сума і добуток визначаються таким чином.

Сумою (об'єднанням) n подій A_1, A_2, ..., A_n називається подія

$$\sum_{i+1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_n$$

яка полягає в появі в результаті випробування принаймні однієї з цих подій.

Протилежною до події *A* називається подія $\bar{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування подія *A* не відбудеться.

Добутком (перерізом) n подій A_1, A_2 , ..., A_n називається подія

$$\prod_{i+1}^{n} A_i = A_1 A_2 ... A_n ,$$

яка полягає в одночасній появі в результаті випробування всіх цих подій.

За допомогою операцій додавання і множення можна утворити складні події, до яких застосовні теореми додавання та множення ймовірностей.

Приклад 1.7. Систему складено з чотирьох блоків, кожний з яких працює або відказує незалежно від справності інших. Події A_i = { i -й блок відказав, i={ 1; 2; 3, 4}. Виразити через події A_i та протилежні їм $\overline{A_i}$ такі події: B = {відказав тільки один блок}, C = {відказав принаймні один блок}, D = {відказали три блоки}, E = {жодний блок не відказав}.

Розв'язання. Подія В полягає в появі однієї з несумісних подій

$$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 , \ \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 , \ \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 , \ \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 ,$$

тому за означенням суми несумісних подій

$$B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 .$$

Подія C полягає в появі принаймні однієї з сумісних подій A_1, A_2, A_3, A_4,тому за означенням суми подій

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 .$$

Подія D полягає в появі однієї з несумісних подій $A_1A_2A_3\overline{A}_4, A_1A_2\overline{A}_3A_4, A_1\overline{A}_2A_3A_4, \overline{A}_1A_2A_3A_4$, тому

$$D = A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4 .$$

Далі за означенням добутку подій, очевидно, $E = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$.

Приклад 1.8. Ділянку електричної схеми подано на рис.1.3. Події A_i={відмова елемента a_i (i = 1, 2)}, B = {відмова елемента b}, C_k ={відмова елемента c_k (k = 1, 2)}, D = {ділянка проводить струм}.

Виразити події D і $\overline{D}$ через A_i, B, C_k та протилежні їм.

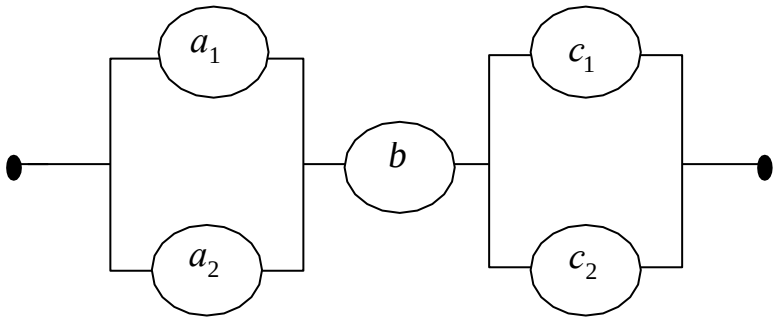


Рисунок 1.3

Розв'язання. Подія D відбудеться, коли не відмовить принаймні один із елементів ai , елемент b і принаймні один із елементів c_k тобто $D = \left(\overline{A_1} + \overline{A_2}\right)\overline{B}(\overline{C_1} + \overline{C_2})$.

Відповідно, $\overline{D} = A_1A_2 + B + C_1C_2$.

2.2 Теореми додавання та множення ймовірностей

Теореми додавання ймовірностей по-різному формулюються для несумісних і сумісних подій.

Для несумісних подій: *імовірність суми двох подій А і В дорівнює сумі їхніх імовірностей*

$$P(A+B) = P(A)+P(B), \qquad (1.8)$$

або у випадку n несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P(A_1+A+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (1.9)$$

Із формули (1.9) випливає важливий висновок: якщо події A_1, A_2, ..., A_n у даному випробуванні утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1, \quad (1.10)$$

оскільки сума подій, які утворюють повну групу, є подією достовірною.

Зокрема, для *протилежних* подій A і $\overline{A}$ маємо:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad (1.11)$$

або у прийнятих позначеннях $P(A) = p,\ P(\overline{A}) = q$.

$$p + q = 1. \quad (1.12)$$

Для сумісних подій *імовірність суми двох подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їхньої одночасної появи:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.13)$$

Для більшої кількості сумісних подій формула (1.13) має складніший вигляд. Зокрема, для трьох сумісних подій A, B, C:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \quad (1.14)$$

Теореми множення ймовірностей по-різному формулюються для незалежних і залежних подій.

Події A і B називаються *незалежними* в даному випробуванні, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулась чи не відбулась інша подія. У противному разі події A і B – *залежні.*

Для залежних подій вводиться поняття *умовної ймовірності*: імовірність події A , обчислена за умови, що подія B відбулась, називається *умовною ймовірністю* події A і позначається $P(A|B)$ або $P_B(A)$. Нехай, наприклад, з комплекту, який містить 6 стандартних і 4 нестандартні вироби, навмання по одному відбирають 2 вироби. Розглянемо такі події:

B = {перший відібраний виріб – стандартний},

A = {другий – стандартний}.

Тоді $P(A|B) = \frac{5}{9}$, оскільки, якщо подія B відбулась, то в комплекті залишилось 9 виробів, 5 із яких стандартні.

Дамо тепер формулювання теорем множення ймовірностей для незалежних і залежних подій.

Для незалежних подій *імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку їхніх імовірностей:*

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{1.15}$$

або для n незалежних подій A_1, A_2, ..., A_n :

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{1.16}$$

Для залежних подій *імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчислену за умови, що перша подія відбулась*:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B). \tag{1.17}$$

Для n залежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формула (1.17) набирає вигляду

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1 A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \tag{1.18}$$

де умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні вже відбулись.

Наслідком теорем додавання і множення ймовірностей є формули для обчислення ймовірності появи в результаті випробування принаймні однієї з незалежних у сукупності подій A_1, A_2, ..., A_k.

Нехай подія A = {поява принаймні однієї з подій A_1, A_2, ..., A_k }.

Для обчислення ймовірності події A доцільно перейти до протилежної події $\overline{A}$ = {жодна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$ не відбулась у результаті випробування}.

Тоді $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_k}$ і за формулою (1.16)

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_k}),$$

а за формулою (1.11)

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_k}). \qquad (1.19)$$

Зокрема, якщо ймовірності появи кожної з подій $A_1, A_2, ..., A_k$ однакові, тобто

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_k) = p,$$

то згідно з формулою (1.12)

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = ... = P(\overline{A_k}) = q,$$

і формула (1.19) набирає вигляду:

$$P(A) = 1 - q^k. \qquad (1.20)$$

Формули (1.13), (1.14) пов'язують імовірності суми і добутку подій, тому при розв'язуванні багатьох задач теореми додавання і множення ймовірностей застосовуються одночасно.

Приклад 1.9. Авіакомпанія протягом доби виконує 2 рейси до Одеси. Імовірність затримки першого рейсу за метеоумовами Одеси дорівнює 0,1, другого – 0,15, причому затримка одного рейсу не залежить від іншого. Знайти ймовірність затримки принаймні одного рейсу.

Розв'язання. Позначимо події: A = {затримано принаймні один рейс}, A_1 = {затримано перший рейс}, A_2 = {затримано другий рейс}.

За умовою $P(A_1) = 0{,}1$, $P(A_2) = 0{,}15$, а за формулою (1.11) $P(\overline{A_1}) = 0{,}9$, $P(\overline{A_2}) = 0{,}85$.

1-й спосіб. Подія $A = A_1 + A_2$,, причому події A_1 і A_2 сумісні і незалежні, тому за за формулами (1.13) і (1.15)

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0.235.$$

2-*й спосіб.* Перейдемо до протилежної відносно A події $\overline{A}$ = {жоден рейс не затримано }. Оскільки $A = \overline{A}_1\overline{A}_2$, то $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1)\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_2) = 0.765$ і за формулою (1.11) $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.235$.

Приклад 1.10. Ділянка електричної схеми (рис. 1.4) містить 3 елементи, кожний із яких працює незалежно від інших. Надійність (імовірність безвідказної роботи впродовж часу t) елемента 1 дорівнює

0,9, для елементів 2 і 3 надійність становить 0,7. Знайти ймовірність того, що ділянка протягом часу *t* проводитиме струм.

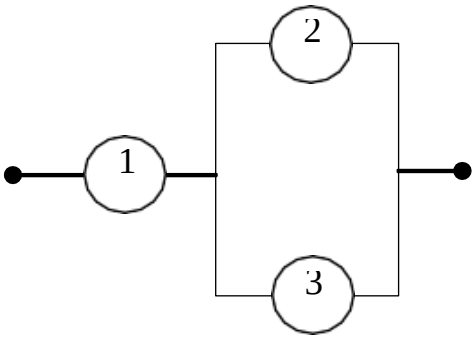


Рисунок 1.8

Розв'язання. Позначимо події $A_1 = \{i$-й елемент надійний, $i = 1,2,3\}$, $A = \{$ділянка проводить струм$\}$. За умовою $P(A_1) = 0.9$, $P(A_2) = P(A_3) = 0.7$

Подія A відбудеться, якщо не вийдуть із ладу елемент 1 і принаймні один із елементів 2 або 3. Отже, $A = A_1(A_2 + A_3)$, причому події A_1 і $A_2 + A_3$ незалежні за умовою, а події A_i – сумісні. Тому за формулами (1.13) і (1.15) маємо:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 + A_3) = P(A_1)\left[P(A_2) + P(A_3) - P(A_2)P(A_3)\right] = 0.819.$$

3 Імовірності гіпотез. Формули повної ймовірності та Бейєса

Поняття гіпотези. Формула повної ймовірності. Обчислення ймовірностей гіпотез.

Література: [1, глава 3, п.п. 3.4 – 3.5], [2, глава 2, п.п. 2.5 – 2.6], [4, глава 4, § 2 – 3], [7, тема 2, п.п. 7 – 8], [10, розділ II, § 15].

3.1 Формули повної ймовірності та Бейєса.

У практичній діяльності ми, як правило, стикаємось із подіями, які відбуваються не самі по собі, ізольовано від інших подій, а одночасно з ними.

Нехай подія A може відбутися лише одночасно з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій H_i відбудеться подія A, то події H_i називають *гіпотезами.*

Якщо ймовірності гіпотез задано або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+ \\ +...+P(H_n)P(A|H_n), \tag{1.21}$$

яку називають *формулою повної ймовірності.*

У формулі (1.21) $P(A|H_i)$ $(i=1,2,...,n)$ – умовні ймовірності події A, обчислені за умови, що відповідна гіпотеза H_i відбулась.

Гіпотези H_i і подія A залежні, тому якщо відбулась подія A, імовірності гіпотез $P(H_i)$ змінюються. Нові умовні ймовірності гіпотез $P(H_i|A)$, обчислені за умови, що подія A відбулась, знаходять за *формулами Бейєса:*

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}, \\ P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(H_n|A)=\frac{P(H_n)\cdot P(A|H_n)}{P(A)}, \tag{1.22}$$

де ймовірність $P(A)$ обчислюється за формулою (1.21).

Звернемо увагу на те, що чисельниками у формулах Бейєса є відповідні доданки формули (1.21).

Приклад 1.11. Однотипні вироби надходять у продаж із трьох фабрик. Друга фабрика поставляє в 1,5 рази більше виробів, ніж перша, а третя – в 2,5 рази більше, ніж перша. Кількість стандартних виробів у продукції першої фабрики становить 95 %, другої – 100 %, третьої – 80 %. 1) Знайти ймовірності того, що придбаний навмання виріб – стандартний. 2) Придбаний виріб виявився стандартним. Якою фабрикою найімовірніше він виготовлений?

Розв'язання. 1) Позначимо події A ={ виріб стандартний}; H_i = {виріб, виготовлений *i*-ю фабрикою, *i* = 1, 2, 3 }

Обчислимо ймовірності гіпотез. Ці ймовірності, очевидно, пропорційні до обсягів поставок відповідних фабрик, тому якщо взяти $P(H_1)=x$, то $P(H_2)=1.5x$, $P(H_3)=2.5x$. Оскільки гіпотези утворюють повну групу подій, то $x + 1.5x + 2.5x = 1$, звідки $x = 0.2$.

Отже, $P(H_1)=0.2$, $P(H_2)=0.3$, $P(H_3)=0.5$.

Умовні ймовірності $P(A|H_i)$ події $A|H_i$={ стандартний виріб, виготовлений *i*-ю фабрикою}, задано в умові задачі у відсотках, тому

$$P(A|H_1)=0.95,\ P(A|H_2)=1,\ P(A|H_3)=0.8.$$

За формулою повної ймовірності (1.21) $P(A)=0.89$.

2) Оскільки подія A відбулась, імовірності гіпотез $P(H_i)$ набули нових значень $P(H_i\,|\,A)$, які обчислюються за формулами Бейєса (1.22):

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{0.2\cdot 0.95}{0.89}=0.213,$$

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{0.3\cdot 1}{0.89}=0.337\ ,$$

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{0.5\cdot 0.8}{0.89}=0.45.$$

Сума знайдених імовірностей знову дорівнює 1. Найбільш імовірним є виготовлення придбаного стандартного виробу третьою фабрикою.

Приклад 1.12. У ящик, що містить 3 білі й одну чорну кулю, додали одну кулю невідомого кольору, яка рівноможливо може бути чорною або білою, а потім навмання вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що: 1) вийняли білу кулю; 2) вийнята куля виявилась білою. Яку найімовірніше кулю було додано в ящик?

Розв'язання. Позначимо подію $A=\{$вийнято білу кулю$\}$ і гіпотези $H_1=\{$додано білу кулю$\}, H_2=\{$додано чорну кулю$\}$.

За умовою $P(H_1)=P(H_2)=0.5$. Обчислимо умовні ймовірності події A. За гіпотезою H_1 у ящику стало 5 куль, із яких 4 білі, тому $P(A|H_1)=0.8$ і, відповідно, $P(A|H_2)=0.6$. За формулою повної ймовірності $P(A)=0.7.$

2) Умовні ймовірності гіпотез, обчислені за умови, що подія *A* відбулась, знайдемо за формулами Бейєса:

$$P(H_{1|}\,|\,A)=\frac{0.5\cdot 0.8}{0.7}=\frac{4}{7},\ P(H_{2|}\,|\,A)=\frac{0.5\cdot 0.6}{0.7}=\frac{3}{7}.$$

Отже, більш імовірно, що в ящик було додано білу кулю.

4 Повторні незалежні випробування

Поняття незалежних випробувань. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа. Формула Пуассона.

Література: [4, глава 5], [7, тема 3], [10, розділ ІІІ].

4.1 Схема та формула Бернуллі

Розглядається деяке стохастичне випробування, яке в однакових умовах проводиться n раз, причому при кожному його повторенні певна подія A може відбутися з однією і тією самою ймовірністю p або не відбутися з імовірністю $q=1-p$. Такі випробування, в яких імовірність того чи іншого результату в одному з них не залежить від результату інших, називають *повторними незалежними випробуваннями*, або *схемою Бернуллі*

Імовірність $P_n(k)$ того, що в цих n випробуваннях подія A відбудеться k раз, обчислюється за *формулою Бернуллі:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1.23)$$

Приклад 1.13. Імовірність появи події А в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в чотирьох випробуваннях подія А відбудеться: а) тільки один раз; б) принаймні один раз.

Розв'язання. а) За умовою $n=4, k=1, p=0.6, q=0.4$, тому за формулою (1.23)

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^3 = 0.1536.$$

б) Позначимо подію B={у чотирьох випробуваннях подія A відбудеться принаймні один раз}. Для обчислення ймовірності події $\overline{B}$ ={у чотирьох випробуваннях подія A не відбудеться жодного разу}. Тоді

$$P(\overline{B}) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^4 = 0.4^4 = 0.0256$$
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.9744.$$

У загальному випадку ймовірність $P_n(1 \le k \le n)$ того, що подія A відбудеться принаймні один раз в n незалежних випробуваннях, обчислюється так:

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n. \qquad (1.24)$$

Для різних k імовірності $P_n(k)$ максимальна, тобто най більш імовірне число k знаходиться за правилом:

якщо $np - q$ – ціле додатне число, то k має два значення, а саме: $np - q$ і $np + p$,

якщо $np - q$ не є цілим числом, то k має одне значення, яке перебуває в межах: $np - q < k < np + p$.

Кількість випробувань n, які потрібно провести для того, щоб з імовірністю, не меншою за P, можна було б стверджувати, що подія A відбудеться принаймні один раз, знаходять за формулою

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \tag{1.25}$$

Приклад 1.14. За даними прикладу 1.13 знайти найбільш імовірне число k появ події A в чотирьох випробуваннях і обчислити цю найбільшу ймовірність.

Розв'язання. Оскільки $np-q=2$ – ціле число, то найбільш імовірне число k має два значення: $k_1=2$ і $k_2=np+p=3$.

Обчислимо за формулою Бернуллі відповідні їм імовірності:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 = 0.3456,$$
$$P_4(3) = C_4^1 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = 0.3456.$$

4.2 Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа

Формула Бернуллі (1.23) дає точні значення ймовірностей $P_n(k)$, проте при великих значеннях n вона приводить до громіздких обчислень.

Тому при великих n для обчислення ймовірності появи події A k раз у n незалежних випробуваннях застосовують наближену формулу *локальної теореми Муавра – Лапласа:* якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність $P_n(k)$ того, що в цих n випробуваннях подія A відбудеться рівно k раз, наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}, \tag{1.26}$$

обчисленому при $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Позначимо $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, тоді з формули (1.26) остаточно дістанемо:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \qquad (1.27)$$

Практично формулу (1.27) доцільно застосовувати при $npq \geq 10$.

Функцію $\varphi(x)$ протабульовано, таблицю її значень подано в дод. 1 до цього посібника. При користуванні таблицею потрібно мати на увазі, що функція $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а при $x \geq 4$ її значення практично дорівнюють нулю.

Для обчислення ймовірності $P_n(k_1;k_2)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 раз, застосовують наближену формулу *інтегральної теореми Муавра – Лапласа:* якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність $P_n(k_1; k_2)$ того, що в n випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 раз, наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню визначеного інтеграла

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{s^2}{2}} dz \text{ при } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ і } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Застосувавши функцію Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$, дістанемо для обчислення ймовірності $P_n(k_1;k_2)$ остаточну формулу у вигляді:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (1.28)$$

Функцію $\Phi(x)$ протабульовано, таблицю її значень наведено в дод. 2. При користуванні таблицею потрібно мати на увазі, що функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при $x \geq 5$ $\Phi(x) = 0.5$.

Приклад 1.15. Імовірність появи події A в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0.8.

1) Знайти ймовірність того, що в 100 проведених випробуваннях подія A відбудеться: а) рівно 75 раз; б) від 70 до 85 раз.

2) Скільки потрібно провести випробувань, щоб з імовірністю 0.98 можна було сподіватись на появу в них події A не менш як 120 раз?

Розв'язання. 1) За умовою $n = 100$, $p = 0.8$, $q = 0.2$.

а) Імовірність появи події A в 100 випробуваннях рівно 75 раз обчислимо за формулою (1.27), для чого знайдемо

$$x = \frac{75 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1.25$$

і з таблиці значень функції $\varphi(x)$ (дод. 1) визначимо:

$$\varphi(-1.25) = \varphi(1.25) = 0.1826.$$

Тоді $P_{100}(75) = \frac{1}{4} \cdot 0.1826 = 0.0456.$

б) Імовірність появи події A в 100 випробуваннях від 70 до 85 раз знайдемо за формулою (1.28), для чого обчислимо

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5,\ x_2 = \frac{85 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -1.25$$

і з таблиці значень функції $\Phi(x)$ (дод. 2) знайдемо

$$\Phi(-2.5) = -\Phi(2.5) = -0.4938,\ \Phi(1.25) = -0.3944.$$

Тоді $P_{100}(70;85) = 0.3944 + 0.4038 = 0.8882.$

2) Імовірність появи події A в n випробуваннях не менш як 120 раз або від 120 до n раз знаходимо за формулою (1.28):

$$P_n(120;n) = \Phi\left(\frac{n - 0.8n}{\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{120 - 0.8n}{\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{0.2n}{0.4\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{120 - 0.8n}{\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) = \Phi(0.5\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{120 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right).$$

Оскільки $n > 120$, то $0.5\sqrt{n} > 5$. Отже, $\Phi(0.5\sqrt{n}) = 0.5$ За умовою $P_n(120; n) = 0.98$, тому

$$\Phi(0.5\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{120 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) = 0.98,\ \Phi\left(\frac{120 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) = 0.48.$$

Із таблиці значень функції *Ф(*x*)* за відомим значенням функції знайдемо відповідне йому значення аргументу:

$$\frac{120 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} = -2.05$$

звідки дістанемо квадратне відносно $\sqrt{n}$ рівняння:

$$0.8n - 0.82\sqrt{n - 120 = 0},$$

або рівняння $n - 1.025\sqrt{n} - 150 = 0$ яке має єдиний додатний розв'язок $\sqrt{n} = 12.258$. Тому $n = 151$.

4.3 Формула Пуассона

Якщо число *n* проведених випробувань велике, а ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні мала ($p \le 0{,}01$), то ймовірність появи події *A* в цих *n* випробуваннях *k* раз обчислюють за формулою Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (1.29)$$

де $\lambda = np -$ середнє число появ події A в n випробуваннях.

Приклад 1.16. Імовірність появи події *A* в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0.002. Знайти ймовірність того, що в 1000 випробувань подія *A* відбудеться: а) два рази; б) не менш як два рази.

Розв'язання. За умовою $n = 1000$, $p = 0.002$, тому $\lambda = 2$.

а) Імовірність появи події A 2 рази обчислимо за формулою (1.29):

$$\mathrm{P}_{1000}(2) = -\frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} - \frac{2}{e^{-2}} = 1 - \frac{2}{2.718^2} \approx 0.27.$$

б) Для обчислення ймовірності $P_{1000}(2 \le k \le 1000)$ появи події A не менш як двічі перейдемо до протилежної події – появі події A менш як двічі, тобто 0 або 1 раз:

$$\mathrm{P}_{1000}(2 \le k \le 1000) \approx 1 - \mathrm{P}_{1000}(0) - \mathrm{P}_{1000}(1) = 1 - \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} - \frac{2e^{-2}}{1!} = 1 - \frac{3}{2.718^2} \approx 0.594.$$

РОЗДІЛ 2 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

1 Випадкові величини та закони їх розподілу. Основні числові характеристики

Дискретні і неперервні випадкові величини. Ряд розподілу, функція розподілу, щільність імовірності випадкової величини. Математичне сподівання, мода, медіана. Дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Початкові та центральні моменти різних порядків.

Література: [1, глава 5, п.п. 5.1 – 5.3], [2, глави 3, 4], [4, глава 6, § 1 – 3, глави 7, 8], [7, теми 5, 6], [10, розділ IV, § 23 – 25, розділ V, § 28 – 30, 33].

1.1 Означення та види випадкових величин

Випадковою називається величина, яка в результаті випробування набуває того чи іншого можливого значення, заздалегідь невідомого, яке змінюється від випробування до випробування і залежить від ряду випадкових обставин.

Приклади випадкових величин:

а) кількість електроламп, які виходять із ладу впродовж доби в системі освітлення і сигналізації аеропорту, є випадковою величиною, яка набуває можливих значень 0, 1, 2, ... і залежить від коливань напруги в електромережі, пори року, умов експлуатації, якості ламп та інших факторів;

б) рівень напруги в електромережі є випадковою величиною, яка набуває всіх можливих значень із деякого інтервалу й залежить від режиму роботи електростанції, кількості споживачів, системи стабілізації тощо.

У першому випадку випадкова величина називається *дискретною* і набуває окремих ізольованих можливих значень, кількість яких, як правило, скінченна. У другому– випадкова величина називається *неперервною*, її можливі значення суцільно заповнюють деякий інтервал, і кількість їх нескінченна.

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами $X, Y, Z, \ldots$, а їхні можливі значення – відповідними малими літерами з

індексами. Наприклад, можливі значення випадкової величини X позначаються $x_1, x_2, ..., x_n$.

1.2 Ряд розподілу дискретної випадкової величини

Для характеристики випадкової величини не достатньо задати її можливі значення, необхідно також вказати ймовірності, з якими ця величина набуває того чи іншого можливого значення. Такою характеристикою є закон розподілу випадкової величини– відповідність(таблиця, графік, функція) між можливими значеннями x випадкової величини та їхніми ймовірностями p_i .Найбільш досконалою і водночас наочною формою закону розподілу є *ряд розподілу*, що являє собою таблицю, у першому рядку якої наведено всі можливі значення випадкової величини, а в другому – відповідні їм імовірності. Проте він застосовний лише для задання дискретної випадкової величини, оскільки для неперервної величини неможливо навести всі можливі значення.Ряд розподілу записується у вигляді:

X	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2		p_{n-1}	p_n

(2.1)

і для нього виконується обов'язкова умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.2)$$

Приклад 2.1. Проводиться випробування надійності системи, яка складається з трьох приладів, що працюють незалежно один від одного. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) першого приладу дорівнює 0.9, другого – 0.8, третього – 0.7. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості надійних приладів у системі.

Розв'язання. Випадкова величина X набуває можливих значень 0, 1, 2, 3. Позначимо відповідно через g_1, g_2 і g_3 імовірності безвідмовної роботи першого, другого і третього приладів. Тоді за умовою задачі $g_1 = 0.9;\ g_2 = 0.8;\ g_3 = 0.7$, а отже, імовірність виходу з ладу цих приладів становить відповідно $\overline{g}_1 = 0.1,\ \overline{g}_2 = 0.2,\ \overline{g}_3 = 0.3$. За теоремами додавання і множення ймовірностей обчислимо ймовірності, з якими величина X набуває можливих значень:

$$p_0 = p\{X = 0\} = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \bar{g}_3 = 0.006\,,$$
$$p_1 = p\{X = 1\} = g_1 \bar{g}_2 \bar{g}_3 + \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_3 + \bar{g}_1 \bar{g}_2 g_3 = 0.092\,,$$
$$p_2 = P\{X = 2\} = g_1 g_2 \bar{g}_3 + g_1 \bar{g}_2 g_3 + \bar{g}_1 g_2 g_3 = 0.0398\,,$$
$$p_3 = P\{X = 3\} = g_1 g_2 g_3 = 0.504\,.$$

Ряд розподілу величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Для нього виконується умова (2.2).

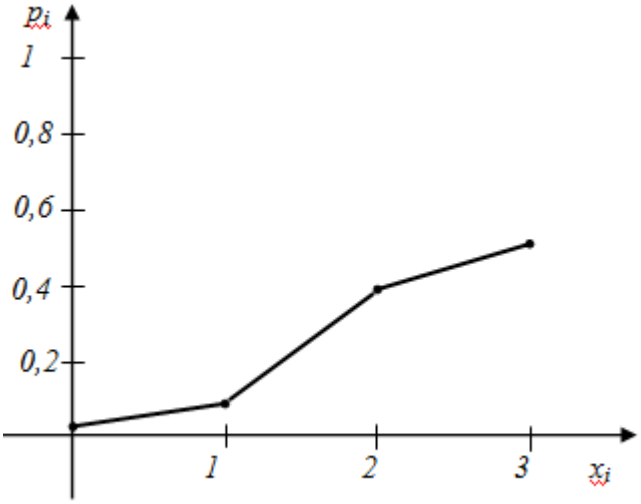


Рисунок 2.1

Геометричне зображення ряду розподілу називають многокутником розподілу. Для його побудови на осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини X , а на осі ординат відповідні ймовірності і знайдені точки сполучають прямолінійними відрізками.

Многокутник розподілу для ряду, побудованого в прикладі 2.1, наведено на рис. 2.1.

1.3 Функція розподілу випадкової величини та її властивості

Найбільш універсальною формою закону розподілу, застосовною для характеристики як дискретних, так і неперервних випадкових величин, є функція розподілу, яку називають також *інтегральною функцією розподілу* випадкової величини.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для кожного значення x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за тобто

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (2.3)$$

Для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу, функцію розподілу знаходять у такий спосіб:

при $x \le x_1$ $F(x) = 0$, оскільки випадкова величина X не набуває значень, менших від x:

при $x_1 < x \le x_2$ $F(x) = p_1$, оскільки X набуває тільки значення x_1, меншого за x, з імовірністю p_1 ;при $x_2 < x \le x_3$ $F(x) = p_1 + p_2$, оскільки в цьому разі X набуває

або значення x_1, або значення x_2, обидва менші за x, з імовірностями відповідно p_1 і p_2.

Далі аналогічно:

при $x_{n-1} < x \le x_n$ $F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}$;

при $x > x_n$ $F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_{n-1} + p_n = 1$,

тобто

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x_i). \qquad (2.4)$$

Графік функції розподілу подано на рис. 2.2, де на осі абсцис відкладено можливі значення x_i випадкової величини, а на осі ординат– нагромаджені ймовірності, сталі в проміжках між послідовними парами можливих значень.

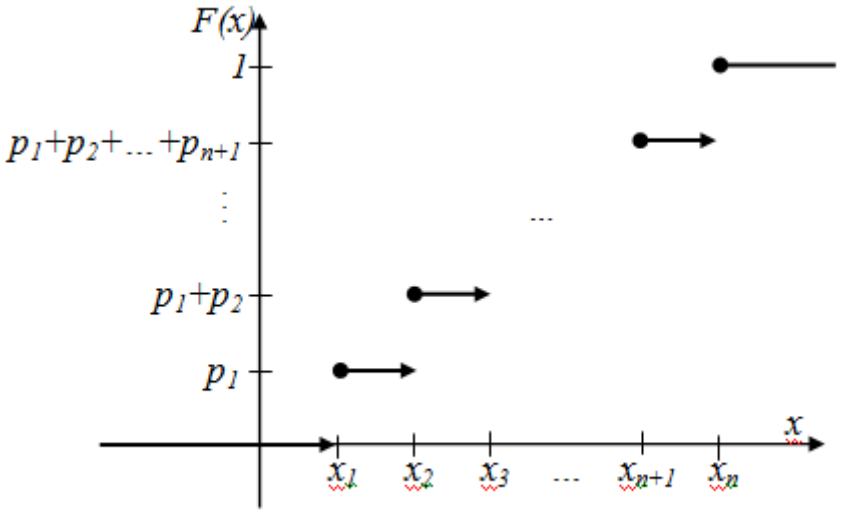


Рисунок 2.2

Отже, для дискретної випадкової величини графік функції розподілу $F(x)$ є розривною східчастою лінією.

Для *неперервної випадкової величини*, можливі значення якої суцільно заповнюють деякий інтервал, наприклад $(x_1; x_2)$, довжина і висота східців прямують до нуля, а отже, графік функції $F(x)$ на цьому інтервалі практично перетворюється на неперервну плавну лінію.

Функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини задається, як правило, аналітичним виразом, наприклад:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } x \le 0, \\ x^2 & \text{, якщо } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{, якщо } x > 1. \end{cases}$$

Функція розподілу має такі загальні властивості:

1) Вона набуває значень з відрізка [0; 1], що випливає з її означення (формула (2.3)) як імовірності.

2) Функція розподілу є неспадною функцією свого аргументу, тобто при $x_1 < x_2, F(x_1) \le F(x_2)$.

3) Імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення з проміжку [α; β), або, що те саме, потрапить у результаті випробування в проміжок [α; β), має такий вираз через функцію розподілу:

$$P\{\alpha \le X\beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \tag{2.5}$$

Із властивості 3 випливає такий важливий висновок: імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде одного конкретного можливого значення $i\ x$, обчислюється за формулою

$$P\{X = x_1\} = P\{x_1 \le X < x_i + 0\} = F(x_i + 0\} = F(x_i + 0) - F(x_i). \tag{2.6}$$

Зокрема, якщо в точці x_i функція $F(x)$ *неперервна*, то

$$P\{X = x_i\} = 0 \tag{2.7}$$

оскільки за означенням неперервної функції в точці x_i $F(x_i + 0) = F(x_i)$.

Таким чином, немає сенсу розглядати ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде одного конкретного можливого

значення, є сенс розглядати ймовірність її потрапляння в деякий інтервал, нехай навіть доволі малий.

4) Якщо випадкова величина X набуває можливих значень з інтервалу $(-\infty;+\infty)$, то $F(-\infty)=0; F(+\infty)=1$.

Приклад 2.2. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X – кількості надійних приладів у системі, розглянутій у прикладі 2.1, і знайти ймовірності того, що X набуде можливого значення з проміжку: а) (0.5; 2); б) (1.4; 3].

Розв'язання. За рядом розподілу, здобутим у прикладі 2.1, та за формулою (2.4) маємо функцію розподілу $F(x)$ і її графік (рис. 2.3):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.006, & 0<x\le 1,\\ 0.098, & 1<x\le 2,\\ 0.496, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

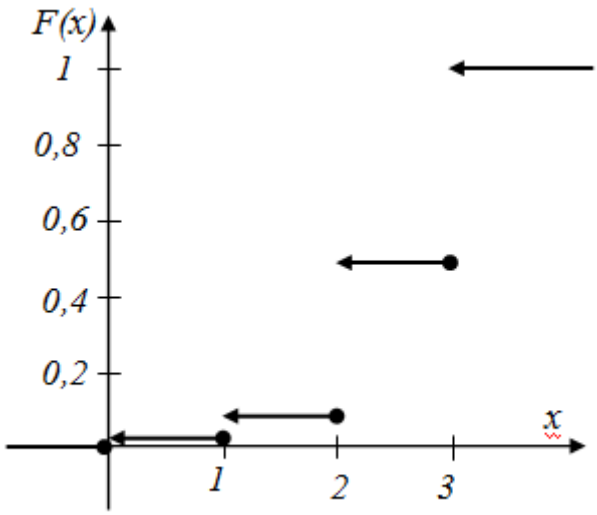


Рисунок 2.3

а) За формулою (2.5) маємо:

$$P\{0.5<X<2\}=F(2)-F(0.5)=0.098-0.006=0.092.$$

б) З урахуванням формули (2.6) дістаємо:

$$P\{1{,}4<X\le 3\}=P\{X=3\}+P\{1{,}4<X<3\}=$$
$$=F(3+0)-F(3)+F(3)-F(1{,}4)=1-0.098=0.902$$

Приклад 2.3. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

1) Знайти коефіцієнт A; 2) побудувати графік функції $F(x)$ обчислити ймовірність потрапляння величини X в інтервал (1; 2).

Розв'язання. 1). Оскільки випадкова величина X неперервна, то і її функція розподілу $F(x)$ також неперервна, тому $A(x-1)^2=1$ при $x=3$. Звідси дістаємо $A=0{,}25$.

2) Графік функції

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0.25(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Подано на рис.2.4.

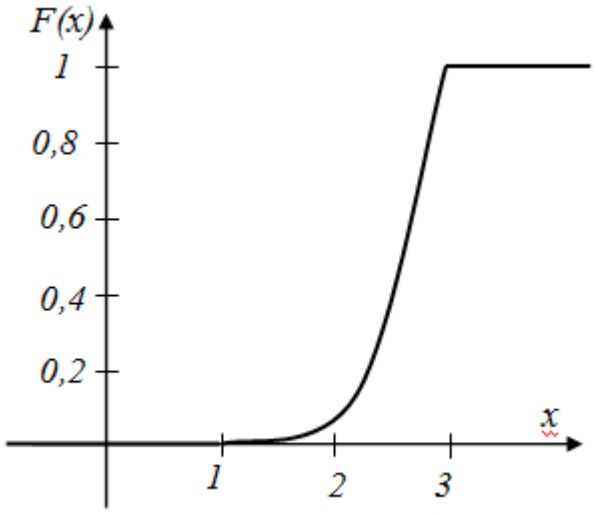


Рисунок 2.4

3)

$$P\{1<X<2\}=F(2)-F(1)=0.25\cdot(2-1)^2=0.25.$$

1.4 Щільність розподілу випадкової величини та її властивості

Однією з форм закону розподілу неперервної випадкової величини є *щільність розподілу*, або щільність імовірності.

Розглянемо інтервал $(x;x+\Delta x)$ довжиною Δx і обчислимо за формулою (2.5) імовірність потрапляння випадкової величини в цей інтервал:

$$P\{x<X<x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Поділимо обидві частини рівності на Δx і перейдемо до границі

При $\Delta x\to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{P\{x<X<x+\Delta x\}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$

Позначивши $F'(x)=f(x)$, дістанемо з точністю до нескінченно малої вищого порядку, ніж Δx, наближену рівність

$$\frac{P\{x<X<x+\Delta x\}}{\Delta x}\approx f(x), \qquad (2.8)$$

ліва частина якої визначає «кількість імовірності», що припадає на одиницю довжини відрізка Δx, або, іншими словами, щільність імовірності.

Отже, щільність імовірності, або щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X, є похідною від функції розподілу $F(x)$. Її називають також *диференціальною функцією* розподілу величини X.

Із формули (2.8) маємо

$$P\{x < X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x,$$

звідки випливає, що добуток $f(x)\Delta x$ або $f(x)dx$ наближено дорівнює ймовірності потрапляння випадкової величини в елементарний інтервал Δx при $\Delta x \to 0$. Тому величину $f(x)dx$ називають *елементом імовірності* неперервної величини X. Вона є певним аналогом імовірностей p_i у ряді розподілу (2.1) дискретної випадкової величини. Геометрично елемент імовірності наближено дорівнює площі елементарної криволінійної трапеції з основою dx, прилеглою до точки x (рис. 2.5).

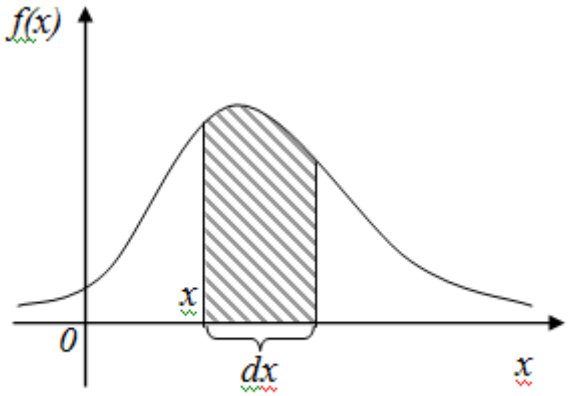


Рисунок 2.5

Щільність розподілу $f(x)$ має такі основні властивості.

1) Функція $f(x) \geq 0$ як похідна від неспадної функції розподілу.

2) Імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(\alpha;\beta)$ виражається через щільність розподілу так:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \qquad (2.9)$$

що випливає з формули (2.5) і формули Ньютона – Лейбніца для визначеного інтеграла.

3) Функція розподілу пов’язана зі щільністю $f(x)$ рівністю:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad (2.10)$$

яка випливає з формули (2.9) при $\alpha = -\infty$, $\beta = x$ і тієї обставини, що за означенням $F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\}$

4) Якщо X набуває можливих значень на інтервалі $(-\infty;\infty)$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, що випливає з формули (2.10) і властивості 4 функції розподілу.

Приклад 2.4. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A\sin x, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

1) Знайти коефіцієнт A; 2) побудувати графік щільності розподілу $f(x)$; 3) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік; 4) обчислити ймовірність потрапляння величини X в інтервал $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. 1) За властивістю 4 щільності розподілу маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx = \int\limits_{0}^{\pi} A\sin xdx = -A\sin x\,|_{0}^{\pi} = 2A = 1,$$

звідки $A = \frac{1}{2}$.

Графік щільності розподілу наведено на рис. 2.6.

За формулою (2.10) маємо:

а) якщо $x \le 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$;

б) якщо $0 < x \le \pi$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} \sin xdx = \frac{1}{2}(1-\cos x)$;

в) якщо $x > \pi$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin xdx + \int\limits_{\pi}^{x} 0 \cdot dx = 1.$

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ наведено на рис. 2.7.

3) За формулою (2.5) $P\left\{0 < X < \frac{\pi}{2}\right\} = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 0 = \frac{1}{2}$.

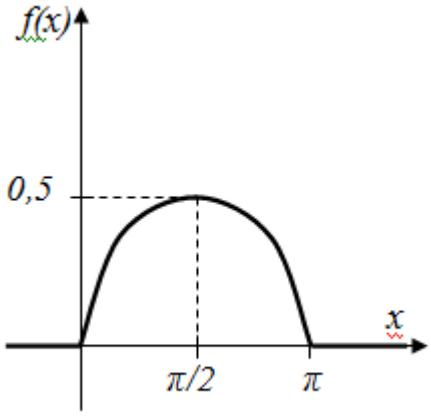


Рисунок 2.6

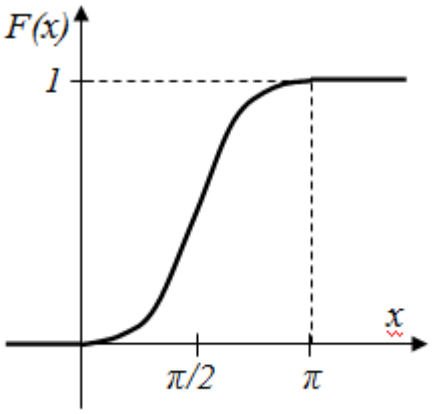


Рисунок 2.7

Приклад 2.5. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha e^{-\alpha x} (\alpha > 0), & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде можливого значення з інтервалу (1; 2).

Розв'язання. За формулою (2.9) маємо

$$P\{1 < x < 2\} = \int_1^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x} \Big|_1^2 = \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{2\alpha}}.$$

1.5 Числові характеристики випадкових величин та їхні властивості

Закон розподілу найбільш повно характеризує випадкову величину і дає змогу обчислювати ймовірності всіх подій, пов'язаних із цією величиною. Проте при розв'язуванні багатьох практичних задач важливу роль відіграють числові значення, які дають деяку узагальнену усереднену характеристику випадкової величини та її розподілу. Ці значення називаються *числовими характеристиками* випадкової величини. Основними з них є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та моменти різних порядків.

1.5.1 Математичне сподівання випадкової величини. Мода і медіана

Нехай дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу (2.1). *Математичним сподіванням* $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків її можливих x_i на значень відповідні їм імовірності p_i:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n . \qquad (2.11)$$

Математичне сподівання – невипадкова стала величина, вона визначає *середнє значення* випадкової величини X. Справді, якщо в n незалежних випробуваннях значення x_1 величини X спостерігалось k_1 раз, значення $x_2 - k_2$ раз і, нарешті, значення $x_m - k_m$ раз $(k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$, то середнє арифметичне $\bar{x}$ спостереження значень набуває вигляду

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{k_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i^* = M(X),$$

оскільки за статистичним $_i$ означенням p_i^* при зростанні кількості випробувань наближаються до ймовірностей подій $\{X = x_1\}$.

Розглянемо далі неперервну випадкову величину *X,* задану щільністю розподілу $f(x)$ на проміжку $[a;b;]$. Розіб'ємо довільно проміжок на n елементарних частин із довжинами $\Delta x (i = 1,2,..., n)$ і виберемо на кожній частині по довільній точці x_i. Тоді ймовірність потрапляння величини X в *i*-ту елементарну частину наближено дорівнює $f(x_i)\,\Delta x_i$. Отже, згідно з означенням математичного сподівання для дискретної випадкової величини

$$M(X) \approx \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i .$$

Точне значення математичного сподівання дістаємо, переходячи до границі, коли довжина найбільшої з елементарних частин прямує до нуля, і застосовуючи означення визначеного інтеграла:

$$M(X) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b x f(x) dx . \qquad (2.12)$$

Наведемо властивості математичного сподівання.

1) Якщо C – невипадкова стала величина, то $M(C) = C$ як середнє значення сталої величини.

2) Сталу C можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(CX) = CM(X)$.

3) Математичне сподівання суми n випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + (X_2) + ... + M(X_n) .$$

4) Математичне сподівання добутку n *незалежних* випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M(X_1 X_2 ... X_n) = M(X_1) M(X_2) ... M(X_n) .$$

Випадкові величини $X_1, X_2, .. X_n$ є *незалежними в даному випробуванні,* якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яких можливих значень набула решта величин.

5) Математичне сподівання *відхилення* $X - M(X)$ випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = 0 .$$

Крім математичного сподівання $M(X)$, яке є основною *характеристикою положення* випадкової величини, у теорії ймовірностей знаходять застосування інші характеристики положення– *мода і медіана* випадкової величини.

Модою $M_0(X)$ випадкової величини X називається її найбільш імовірне можливе значення.

Для дискретної випадкової величини X, яка має ряд розподілу (2.1), $M_0(X)$ дорівнює тому можливому значенню, якого величина набуває з найбільшою ймовірністю. Так, для випадкової величини X, ряд розподілу якої побудовано у прикладі 2.1, мода $M_0(X) = 3$.

Для неперервної випадкової величини X, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, мода дорівнює тому значенню x, при якому $f(x)$ досягає максимуму або (у разі відсутності максимуму) набуває найбільшого значення. Якщо $f(x)$ набуває найбільшого значення в одній точці x з проміжку $[a;b]$, то розподіл випадкової величини X називається *унімодальним*, а якщо в кількох точках – *полімодальним*.

Медіаною $Me(X)$ випадкової величини X називається те значення x, для якого

$$P\{X < Me(X)\} = P\{X > Me(X)\} = \frac{1}{2}. \qquad (2.13)$$

Медіана, як правило, застосовується для неперервної випадкової величини і геометрично подає абсцису точки, в якій пряма $x = Me(X)$ поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілу $f(x)$ і віссю Ox.

Приклад 2.6. Неперервна випадкова величина X має щільність імовірності

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 18x - 12, & x \in (1;2), \\ 0, & x \notin (1;2). \end{cases}$$

Знайти: а) математичне сподівання, б) моду, в) медіану цієї величини.

Розв'язання. а) За формулою (2.12) маємо:

$$M(X) = \int_1^2 x \cdot f(x)dx = -6\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = 1.5,$$

б) Для визначення моди перевіримо функцію $f(x)$ на наявність екстремумів, для чого визначимо, при якому значенні x її похідна дорівнює нулю:

$$f'(x) = -12x + 18 = 0;\ x = 1.5.$$

При переході через точку $x = 1.5$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому в цій точці $f(x)$ має максимум, а отже, мода $Mo(X) = 1,.5$.

Оскільки крива розподілу $f(x)$ симетрична відносно прямої $x=1.5$ (рис. 2.8), то ця пряма поділяє навпіл площу, обмежену кривою $f(x)$ і віссю Ox, а отже, $Me(X)=1.5$.

Взагалі, якщо крива розподілу симетрична відносно прямої $x=a$ і має в точці a максимум, то $M(X)=Mo(X)=Me(X)=a$.

Приклад 2.7. Неперервна випадкова величина X має щільність імовірності

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2, & x\in(0;2), \\ 0, & x\notin(0;2). \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, математичне сподівання, моду і медіану величини X .

Розв'язання. Коефіцієнт A знайдемо за властивістю 4 щільності ймовірності:

$$A\int_0^2 x^2dx=\frac{8A}{3}=1, \text{ звідки } A=\frac{3}{8}.$$

Тому щільність імовірності має вигляд $f(x)=\frac{3}{8}x^2$ при $x\in(0;2)$.

Графік кривої розподілу зображено на рис. 2.9.

Математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X)=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=1.5.$$

На інтервалі (0; 2) крива розподілу не має максимуму, тому мода $Mo(X)=2$, оскільки при $x = 2$ $f(x)$ набуває найбільшого значення.

Медіану знайдемо за означенням (формула (2.13)):

$$P\{X<Me(X)\}=\frac{3}{8}\int_0^{Me(X)} x^2dx=\frac{x^3}{8}\Big|_0^{Me(X)}=\frac{[Me(X)]^3}{8}=\frac{1}{2},$$

звідки $Me(X)=\sqrt[3]{4}\approx1.59$.

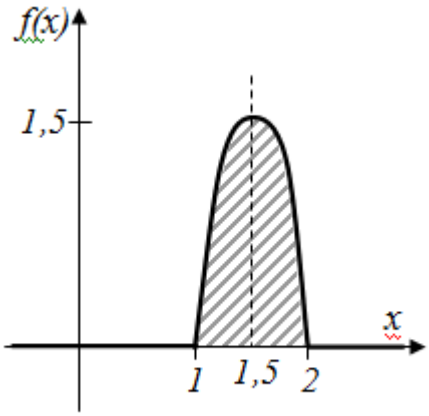


Рисунок 2.8

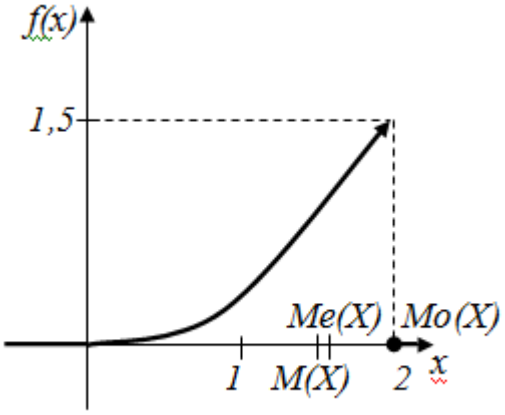


Рисунок 2.9

1.5.2 Дисперсія випадкової величини та її властивості. Середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання недостатньо характеризує розподіл випадкової величини, так само, як, наприклад, однакова середня заробітна плата на двох підприємствах не дає уявлення про співвідношення низько- і високооплачуваних категорій працівників цих підприємств. Тому для характеристики випадкової величини важливо оцінити принаймні в середньому міру її розкиду (розсіяння) навколо математичного сподівання. За таку міру природно було б узяти математичне сподівання відхилення випадкової величини. Проте за властивістю 5 математичного сподівання ця величина дорівнює нулю і, отже, не може бути характеристикою розсіяння. Тому за міру розсіяння взято іншу величину, яка називається *дисперсією* і поряд з математичним сподіванням належить до основних характеристик випадкової величини.

Дисперсією (розсіянням) $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення:

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \qquad (2.14)$$

Із формул (2.11) і (2.12) дістаємо такі формули для обчислення дисперсії:

- для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу (2.1):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \, p_i; \qquad (2.15)$$

- для неперервної випадкової величини, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на інтервалі (a,b):

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx \qquad (2.16)$$

Очевидними перетвореннями із застосуванням властивостей 1 і 2 математичного сподівання вираз для дисперсії (2.14) набирає вигляду:

$$D(X) = M\{X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2\} = M(X^2) - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 =$$
$$= M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Отже, дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (2.17)$$

Квадрат випадкової величини X, заданої рядом розподілу (2.1), є випадкова величина X^2, яка набуває можливих значень x_i^2 з ймовірностями $p_i\ (i = 1,2,...,n)$, оскільки, як тільки випадкова величина X набуває певного можливого значення, наприклад x_1, величина X^2 набуває можливого значення x_1^2. Тому для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини X, крім формули (2.15), застосовують формулу:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(X)]^2$$

і, відповідно, для неперервної випадкової величини, крім формули (2.16), формулу:

$$D(X) = \int_a^b x_i^2 p_i - [M(X)]^2. \qquad (2.18)$$

Якщо неперервна випадкова величина задана щільністю ймовірності $f(x)$ при $x \in (-\infty;\infty)$, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Приклад 2.8. Випадкова величина X – кількість надійних приладів у системі, розглянута в прикладі 2.1, має такий ряд розподілу:

X	0	1	2	3
P	0.006	0.092	0.398	0.504

Знайти дисперсію $D(X)$.

Розв'язання. За означенням математичного сподівання маємо:

$$M(X) = 1 \cdot 0.092 + 2 \cdot 0.398 + 3 \cdot 0.504 = 2.4,$$
$$M(X^2) = 1 \cdot 0.092 + 4 \cdot 0.398 + 9 \cdot 0.504 = 6.22.$$

За формулою (2.17) дістаємо:

$$D(X) = 6.22 - (2.4)^2 = 0.46.$$

Наведемо властивості дисперсії.

1) Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

2) Сталу величину C можна виносити за знак дисперсії, *підносячи її до квадрата*: $D(CX) = C^2 D(X)$.

3) Дисперсія суми *n незалежних* випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

4) Дисперсія суми випадкової величини X і сталої величини C дорівнює дисперсії випадкової величини X : $D(X + C) = D(X)$.

5) Дисперсія різниці двох *незалежних* випадкових величин X і Y дорівнює сумі їхніх дисперсій: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Ще однією характеристикою розсіяння випадкової величини є *середнє квадратичне відхилення*. Оскільки за означенням дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, то для характеристики розсіяння зручніше застосовувати арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії. Ця величина називається *середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини і позначається $\sigma(\mathrm{X})$:

$$\sigma(X) = D\sqrt{(X)}.$$

Приклад 2.9. Дискретну випадкову величину задано таким рядом розподілу:

X	– 0,1	x_2	0.2	0.4
p	0.3	0.1	p_3	p_4

Знайти x_2, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0.13$ і дисперсія $D(X) = 0.0341$. Скласти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайти ймовірність потрапляння цієї випадкової величини у проміжок (–0.05; 0.2].

Розв'язання. За умовою (2.2) для ряду розподілу:

$0.3 + 0.1 + p_3 + p_4 = 1$ або $p_4 = 0.6 - p_3$.

За означенням математичного сподівання:

$$M(X) = -0.03 + 0.1x_2 + 0.2p_3 + 0.4(0.6 - p_3) = 0.13,$$

звідки дістаємо перше рівняння для знаходження

$$0.1x_2 - 0.2p_3 = -0.08.$$

За формулою (2.17) для дисперсії x_2 і p_3:

$$D(X) = 0.003 + 0.1x_2^2 + 0.04p_3 + 0.16(0.6 - p_3) - (0.13)^2 = 0.0341,$$

звідки дістаємо друге рівняння:

$0.1x_2^2 - 0.12\,p_3 = -0.048$.

Система рівнянь $\begin{cases} 0.1x_2 - 0.2\,p_3 = -0.08, \\ 0.1x_2 - 0.12\,p_3 = -0.048 \end{cases}$

має розв'язки: $x_{2_1} = 0, p_{3_1} = 0.4$ і $x_{2_2} = 0.6, p_{3_2} = 0.7$, другий із яких не задовольняє умову задачі, оскільки не виконується обов'язкова вимога (2.2). Тому остаточно набирає вигляду: $x_2 = 0, p_3 = 0.4, p_4 = 0.2$, і ряд розподілу набирає вигляду:

X	– 0.1	0	0.2	0.4
p	0.3	0.1	0.4	0.2

Функцію розподілу $F(x)$ складемо згідно з формулою (2.4):

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le -0{,}1, \\ 0.3, & -0.1 < x \le 0, \\ 0.4, & 0 < x \le 0.2, \\ 0.8, & 0.2 < x \le 0.4, \\ 1, & x > 0.4. \end{cases}$$

Імовірність того, що X у результаті випробування набуде можливого значення з проміжку (–0.05; 0.2] обчислимо безпосередньо з ряду розподілу:

$$P\{-0.05 < X \le 0.2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 0.2\} = 0.5.$$

1.5.3 Початкові і центральні моменти випадкової величини та зв'язок між ними

Крім розглянутих характеристик випадкової величини застосовуються й інші, які характеризують той чи інший бік розподілу випадкової величини. До них належать *початкові* і *центральні моменти* різних порядків.

Початковим моментом k-го порядку $v_k(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання k-го ступеня цієї величини:

$$v_k(X) = M(X^k).$$

Для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу (2.1), початковий момент *k*-го порядку згідно з означенням математичного сподівання обчислюється за формулою:

$$V_k(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,. \tag{2.19}$$

Для неперервної випадкової величини X, що має щільність розподілу $f(x)$ при $x \in (-\infty;\infty)$, початковий момент *k*-го порядку згідно з формулою (2.12) виражається інтегралом

$$V_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \tag{2.20}$$

Розглянемо вирази для початкових моментів першого і другого порядків, що дасть змогу пов'язати початкові моменти з основними числовими характеристиками випадкової величини– математичним сподіванням і дисперсією:

$$\begin{aligned} v_1(X) &= M(X), \\ v_2(X) &= M(X^2), \end{aligned} \tag{2.21}$$

отже, за формулою (2.17):

$$D(X) = v_2(X) - v_1^2(X). \tag{2.22}$$

Центральним моментом k-го порядку $\mu_k(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання *k*-го ступеня її відхилення від математичного сподівання:

$$\mu_k(X) = M\{[X - M(X)]^k\}.$$

Для дискретної випадкової величини з рядом розподілу (2.1)

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x - M(X)\right]^k p_i. \qquad (2.23)$$

для неперервної випадкової величини зі щільністю розподілу f (x) при $x \in (-\infty;\infty)$

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k \, f(x)dx \qquad (2.24)$$

Зауважимо, що відхилення $X - M(X)$ – також випадкова величина, але приведена до центру (середнього значення) можливих значень випадкової величини X. Тому величину $X = X - M(X)$ називають ще *центрованою випадковою величиною*, звідки походить назва *центральних моментів*.

Розглянемо центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го і 4-го порядків, найчастіше застосовувані на практиці, і встановимо їхній зв'язок із початковими моментами.

За властивістю 5 математичного сподівання:

$$\mu_1(X) = M[X - M(X)] = 0, \qquad (2.25)$$

а за означенням дисперсії:

$$\mu_2(X) = M\left\{[X - M(X)]^2\right\} = D(X), \qquad (2.26)$$

звідки за формулою (2.17)

$$\mu_2(X) = v_2(X) - v_1^2(X).$$

Розкриваючи степінь $[X - M(X)]^3$, дістаємо вираз центрального моменту 3-го порядку через початкові моменти:

$$\mu_3(X) = M\{[X - M(X)]^3\} = v_3(X) - 3v_2(X)v_1(X) + 2v_1^3(X) \qquad (2.27)$$

Аналогічно, розкривши степінь $[X - M(X)]^3$, дістанемо вираз центрального моменту 4-го порядку через початкові моменти:

$$\mu_4(X) = v_4(X) - 4v_3(X)v_1(X) + 6v_2(X)v_1^2(X) - 3v_1^4(X). \qquad (2.28)$$

Приклад 2.10. Знайти початкові і центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го і 4-го порядків дискретної випадкової величини X – кількості надійних приладів у системі, ряд розподілу якої побудовано у прикладі 2.1.

Розв'язання. Математичні сподівання випадкової величини X та її квадрата обчислено у прикладі 2.8: $M(X) = 2.4$, $M(X^2) = 6.22$.

Отже, за формулами (2.21)

$$v_1(X) = 2.4;\ v_2(X) = 6.22.$$

Далі за означенням початкових моментів:

$$v_3(X) = M(X^3) = 0.092 + 8 \cdot 0.0398 + 27 \cdot 0.504 = 16.884;$$
$$v_4(X) = M(X^4) = 0.092 + 16 \cdot 0.0398 + 81 \cdot 0.504 = 47.284.$$

Отже, початкові моменти до 4-го порядку заданої випадкової величини мають значення:

$$v_1(X) = 2.4;\ v_2(X) = 6.22;\ v_3(X) = 16.884;\ v_4(X) = 47.284.$$

Обчислимо центральні моменти, використовуючи формули (2.25) – (2.28).

Дисперсію знайдено в прикладі 2.8: $D(X) = 0.46$, тому:

$$\mu_1(X) = 0; \mu_2(X) = 0.46;$$
$$\mu_3(X) = 16.884 - 3 \cdot 6.22 \cdot 2{,}4 + (2.4)^3 = -0.252;$$
$$\mu^4(X) = 47.284 - 4 \cdot 16.884 \cdot 2.4 + 6 \cdot 6.22 \cdot (2.4)^3 - 3 \cdot (2.4)^4 = 0.628.$$

Таким чином,

$$\mu_1(X) = 0;\ \mu_2(X) = 0.46;\ \mu_3(X) = -0.252;\ \mu_4(X) = 0.628.$$

Приклад 2.11. Неперервна випадкова величина X, має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\in(1;e),\\ 0, & x\notin(1;e).\end{cases}$$

Знайти початкові і центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го і 4-го по рядків цієї величини.

Розв'язання. За формулою (2.12) та формулою для інтеграла

$$\int_1^e x^n \ln x dx=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2},$$

яку легко дістати інтегруванням частинами, маємо такі значення початкових моментів:

$$v_1(X)=\frac{e^2+1}{4}\approx 2.1;\quad v_2(X)=\frac{2e^3+1}{9}\approx 4.57;$$
$$v_3(X)=\frac{3e^4+1}{16}\approx 10.3;\quad v_4(X)=\frac{4e^5+1}{25}\approx 23.79.$$

Центральні моменти обчислюються за формулами (2.25) – (2.28). Тому:

$$\mu_1(X)=0;\ \mu_2(X)=0.46;$$
$$\mu_3(X)=10.3-3\cdot 4.57\cdot 2.1+2\cdot(2.1)^3=0.031;$$
$$\mu_4(X)=23.79-4\cdot 10.3\cdot 2.1+6\cdot 4.57\cdot(2.1)^2-3\cdot(2.1)^4=-0.152.$$

Зауваження. Якщо випадкова величина X має розподіл, симетричний відносно моди $Mo(X)$, то всі центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю, оскільки при непарному k для дискретної випадкової величини у формулі (2.23) кожному додатному члену відповідає такий, що дорівнює йому за абсолютною величиною, від'ємний, а для неперервної випадкової величини у формулі (2.24) обчислюється інтеграл у симетричних межах від непарної функції.

2 Основні розподіли дискретних випадкових величин

Імовірнісна твірна функція. Біноміальний розподіл дискретної випадкової величини. Розподіл Пуассона. Геометричний розподіл. Гіпергеометричний розподіл. Числові характеристики дискретних випадкових величин, розподілених за основними законами.

Література: [1, глава 5, п. 5.9], [2, глава 5], [4, глава 6, § 4 – 5], [7, тема 9].

2.1 Імовірнісна твірна функція та її застосування для знаходження числових характеристик дискретних розподілів

Нехай дискретна випадкова величина X набуває можливих значень k з імовірностями $p_k\,(k = 0,1,2,...,n,...)$.

Твірною функцією $\varphi(z)$ для такої випадкової величини називається функція

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\,, \tag{2.29}$$

де z – довільний параметр $(0 < z < 1)$.

Якщо випадкова величина має скінченну множину можливих значень *n*, то твірна функція набирає вигляду

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k.$$

Через значення похідних твірної функції при $z = 1$ виражаються основні числові характеристики дискретної випадкової величини з розглядуваним розподілом.

Зокрема, перша похідна твірної функції

$$\varphi'(z) = \sum_{k==0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$$

при $z = 1$ дорівнює математичному сподіванню величини X:

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M(X) = v_1(X). \tag{2.30}$$

Друга похідна твірної функції

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}$$

при $z = 1$ виражається через початкові моменти першого і другого порядків:

$$\varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \nu_2(X) - \nu_1(X).$$

Шляхом нескладних перетворень у формулі (2.22) через значення похідних твірної функції при $z = 1$ виражається дисперсія випадкової величини:

$$\begin{aligned} D(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X) = \nu_2(X) - \nu_1(X) + \nu_1(X) - \nu_1^2(X) = \\ = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Формули (2.30) і (2.31) застосовуються для знаходження основних числових характеристик дискретних випадкових величин з найбільш поширеними законами розподілу.

2.2 Розподіли цілочисельної дискретної випадкової величини

2.2.1 Біноміальний розподіл

Біноміальний закон розподілу виникає у схемі Бернуллі, коли проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова подія A може або відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$, а випадкова величина X – кількість появ події A в цих n випробуваннях.

Дискретна величина X набуває цілих невід'ємних значень k $(k = 0,1,2,...,n)$ з ймовірностями p_k, які обчислюються за формулою Бернуллі (1.23):

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

тобто величина X має ряд розподілу

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Імовірності p_k дорівнюють відповідним членам розкладу n – го ступеня бінома

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + ... + C_n^k q^{n-k} p^k + ... + p^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k, \tag{2.32}$$

звідки походить назва цього розподілу.

Для знаходження основних характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$ біноміального розподілу використовується твірна функція

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k,$$

яка згідно з формулою (2.32) набирає вигляду:

$$\varphi(z) = (q+pz)^n.$$

Її перша похідна за z $\varphi'(z) = n(q+pz)^{n-1} p$ при $z=1$ набуває значення

$$\varphi'(1) = n(q+pz)^{n-1} p = np,$$

яке, згідно з формулою (2.30), дорівнює $M(X)$, тобто

$$M(X) = np \tag{2.33}$$

Друга похідна твірної функції $\varphi''(z) = n(n-1)(q+pz)^{n-2} p^2$ при $z=1$ набуває значення

$$\varphi''(z) = n(n-1)(q+pz)^{n-2}\, p^2 = n(n-1)p^2,$$

тому за формулою (2.31) маємо дисперсію

$$D(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) - npq \qquad (2.34)$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Приклад 2.12. За метеорологічних умов, що склалися в аеропорту, імовірність своєчасного відправлення кожного рейсу дорівнює 0,6. Випадкова величина X – кількість своєчасно відправлених рейсів з трьох передбачених розкладом. Скласти ряд розподілу і знайти $M(X)$ і $\sigma(X)$ цієї випадкової величини.

Розв'язання. Випадкова величина X набуває можливих значень 0, 1, 2, 3 , а відповідні ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі при $n = 3; p = 0.6; q = 0.4$:

$$p_0 = P_3(0) = 0.4^3 = 0.064;$$
$$p_1 = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 = 0.288;$$
$$p_2 = P_3(2) = C_3^1 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432;$$
$$p_3 = P_3(3) = 0.6^3 = 0.216.$$

Отже, випадкова величина має ряд розподілу

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

Математичне сподівання і дисперсію обчислено за формулами (2.33) і (2.34):

$$M(X) = np = 1.8;\ D(X) = npq = 0.72;\ \sigma(X) \approx 0.85.$$

2.2.2 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона виникає в схемі Бернуллі, коли кількість n виконуваних незалежних випробувань велика, імовірність p появи події A в кожному випробуванні мала, а випадкова величина X – кількість появ події A в цих n випробуваннях.

У цьому випадку масових рідкісних подій випадкова величина X набуває цілих невід'ємних значень k $(k = 0,1,2,...,n)$ з імовірностями p_k, які обчислюються за формулою Пуассона (1.29):

$$p_k = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (\lambda = np),$$

тобто величина X має ряд розподілу

X	0	1	2	...	k	...	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Для знаходження основних числових характеристик $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$ розподілу Пуассона застосовують твірну функцію

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda z)^k}{k!}.$$

Оскільки n велике, то, використовуючи відомий розклад функції e^x у степеневий ряд

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

можна подати твірну функцію у вигляді :

$$\varphi(z) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Її перша похідна $\varphi'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}$, тому за формулою (2.30):

$$M(X) = \varphi'(1) = \lambda .$$

Друга похідна твірної функції

$$\varphi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} ,$$

тому за формулою (2.31) дисперсія набуває значення:

$$D(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Отже, характерною особливістю розподілу Пуассона є те, що його математичне сподівання збігається з дисперсією. Це робить його простим, але й більш обмеженим за можливостями.

Приклад 2.13. Система бронювання та продажу квитків має 1000 периферійних пультів. Імовірність надходження запиту з кожного пульта протягом однієї хвилини дорівнює 0,002. Знайти: а) закон розподілу випадкової величини X – кількості запитів, що надійдуть до системи протягом однієї хвилини; в) імовірність надходження протягом однієї хвилини принаймні двох запитів.

Розв'язання. а) За умовою $n = 1000,\ p = 0{,}002,$ тому $\lambda = 2$, отже, ряд розподілу має вигляд

X	0	1	2	3	...	1000
P	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{2^2}{2!e^2}$	$\frac{2^3}{3!e^2}$	...	$\frac{2^{1000}}{1000!e^2}$

або

X	0	1	2	3	...	1000
P	0.135	0.271	0.271	0.180	...	0.000

б) Середня кількість (математичне сподівання) запитів, що надійде до системи протягом однієї хвилини, $M(X)=2$.

в) Імовірність надходження протягом однієї хвилини принаймні двох запитів

$$P\{2 \le X \le 1000\} = 1 - P(0) - P(1) = 0.594.$$

2.2.3 Геометричний розподіл

Геометричний розподіл виникає, коли незалежні випробування, у кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, проводяться до першого «невдалого» випробування (подія A не відбулась) і далі припиняються, а випадкова величина X – кількість проведених «вдалих» випробувань.

Дискретна величина X набуває цілих невід'ємних значень k $(k = 0,1,2,...)$ з імовірностями $p_k = p^k q$, оскільки X набуває значень k, якщо в k випробуваннях подія A відбулась (імовірність p^k), а в наступному – не відбулась (імовірність q).

Отже, X має такий нескінченний ряд розподілу:

X	0	1	2	...	k	...
P	q	pq	p^2q	...	p^kq	...

Для знаходження числових характеристик $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ застосовують твірну функцію

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k q z^k = q\sum_{k=0}^{\infty} (pz)^k,$$

доданки якої 1, pz, $(pz)^2$, ... є членами нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом $u_1 = 1$ і знаменником $b = pz < 1$.

Сума членів такої геометричної прогресії обчислюється за формулою $S = \frac{u_1}{1-b} = \frac{1}{1-pz}$, тому $\varphi(z) = \frac{q}{1-pz}$.

Перша похідна твірної функції

$$\varphi'(z) = \frac{pq}{(1-pz)^2},$$

тому за формулою (2.30) математичне сподівання набуває значення:

$$M(X) = \varphi'(1) = \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}. \tag{2.35}$$

Друга похідна твірної функції

$$\varphi''(z) = \frac{2p^2q}{(1-pz)^3},$$

тому за формулою (2.31) дисперсія набуває значення:

$$D(X) = \frac{2p^2q}{(1-p)^3} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} = 2\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p}{q^2} \tag{2.36}$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{p}}{q}. \tag{2.37}$$

Зауваження. Практичне застосування має також розподіл випадкової величини X_1 – кількості взагалі проведених випробувань. Ця величина набуває натуральних можливих значень k $(k = 1,2,3,...)$ з імовірностями $p_k = p^{k-1}q$, тобто X_1 має ряд розподілу

X_1	1	2	3	...	k	...
P	q	pq	p^2q	...	$p^{k-1}q$	...

Розподіл випадкової величини X_1 є зміщеним на 1 відносно геометричного розподілу, тому її основні числові характеристики обчислюються за формулами:

$$M(X_1) = M(X+1) = M(X) + 1 = \frac{p}{q} + 1 = \frac{1}{q};$$

$$D(X_1) = D(X+1) = D(X) = \frac{p}{q^2};\ \sigma(X_1) = \frac{\sqrt{p}}{q}.$$

Знайдені формули мають місце у випадку нескінченного ряду розподілу. Проте в деяких задачах умови випробувань передбачають обмеження ряду розподілу тобто геометрично розподілена випадкова величина X набуває значень 0, 1, 2, …, k, якщо в $k-$му випробуванні подія A не відбулась (імовірність $p^k q$) або відбулась (імовірність $p^{k=1}$), тобто за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P\{X = k\} = p^k q + p^{k+1} = p^k (q + p) = p^k,$$

а ряд розподілу цієї випадкової величини набирає вигляду:

X	0	1	2	…	$k-1$	k
P	q	pq	$p^2 q$	…	$p^{k-1} q$	p^k

Застосування формул (2.35) – (2.37) для знаходження основних числових характеристик цієї випадкової величини приводить до значних похибок, тому в цьому випадку доцільно використовувати загальні формули (2.11), (2.17).

Приклад 2.14. Брак у продукції цеху з використання однотипних виробів становить 10%. Для оцінювання якості великої партії виробів контролер навмання відбирає по одному виробу до появи першого бракованого. Знайти ряди розподілу, $M(X)$, $D(X)$, та $\sigma(X)$ випадкових величин:

а) X – кількості відібраних доброякісних виробів;

б) X_1 – кількості відібраних доброякісних виробів, якщо в кожній партії контролер перевіряє не більш як п'ять виробів.

Розв'язання. а) Випадкова величина X має геометричний розподіл, для якого $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ («невдале» випробування – поява бракованого виробу). Тому її ряд розподілу записується у вигляді:

X	0	1	2	3	...	k	...
P	0.1	0.09	0.081	0.0729	...	$0.9^k \cdot 0.1$	...

а основні числові характеристики обчислюються за формулами (2.35) – (2.37):

$$M(X) = \frac{p}{q} = 9;\ D(X) = \frac{p}{q^2} = 90;\ \sigma(X) \approx 9.5.$$

б) Випадкова величина X_1 має обмежений ряд розподілу при $k = 5$:

X_1	0	1	2	3	4	5
P	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.06561	0.059049

Математичне сподівання і дисперсію обчислимо за означеннями (формули (2.11), (2.17)):

$$M(X_1) = 1 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.081 + 3 \cdot 0.0729 + 4 \cdot 0.06561 + 5 \cdot 0.59049 \approx 3.686;$$
$$D(X_1) = 1 \cdot 0.09 + 4 \cdot 0.081 + 9 \cdot 0.0729 + 16 \cdot 0.06561 + 25 \cdot 0.59049 - (3.686)^2 \approx 3.3;$$
$$\sigma(X_1) \approx 1.8.$$

2.2.4 Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл виникає. Наприклад, у випробуваннях, коли з комплекту, що складається з N предметів, n з яких мають певну властивість (нестандартні, пофарбовані тощо), відбирається навмання m предметів (одноразово, або послідовно без повернення до комплекту), а випадкова величина X – кількість предметів із зазначеною властивістю серед відібраних. У загальному випадку X набуває можливих значень $0,1,2,...,m$ з ймовірностями

$$P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} (k = 0,1,2,...,m). \qquad (2.38)$$

Проте деякі з подій $\{X = k\}$ можуть виявитись неможливими, зокрема при $m > n,$ тобто відповідні ймовірності, обчислені за формулою

(2.38), дорівнюватимуть нулю. Тому при побудові ряду розподілу можливі значення випадкової величини X слід вибирати в межах від $m_1 = \max(0; m - N + n)$ до $m_2 = \min(n; m)$.

Знаходження математичного сподівання $M(X)$ і дисперсії $D(X)$ за допомогою твірної функції

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k C_{N-n}^{m-k} z^k / C_N^m$$

приводить до занадто складних обчислень, тобто гіпергеометричний розподіл дискретної випадкової величини X є прикладом розподілу, для якого твірна функція $\varphi(z)$ не є ефективним засобом знаходження числових характеристик.

Тому слід користуватись формулами (2.11), (2.17) або формулами, які наведемо без доведення:

$$M(X) = mp;$$
$$D(X) = mpq \cdot \frac{N-m}{N-1}, \qquad (2.39)$$

де $p = n/N$.

Приклад 2.15. Партія, що складається з 10 виробів, містить 7 виробів найвищого ґатунку. Навмання із партії відібрано 6 виробів. Знайти ряд розподілу, $M(X), D(X)$ та $\sigma(X)$ випадкової величини X – кількості виробів найкращого ґатунку серед відібраних.

Розв'язання. Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл, в якому $N = 10, n = 7, m = 6, p = \frac{n}{N} = 0.7, q = 0.3$. Визначимо межі m_1 і m_2 можливих значень величини $X: m - N + n = 3$, тому $m_1 = 3$ (більше з чисел 0 і 3), а $m_2 = 6$ (менше з чисел 6 і 7). Імовірності відповідних можливих значень обчислимо за формулою (2.38):

$$P\{X = 3\} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^3}{C_{10}^6} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}; \; P\{X = 4\} = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2};$$

$$P\{X = 5\} = \frac{C_7^5 \cdot C_3^1}{C_{10}^6} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}; \; P\{X = 6\} = \frac{C_7^6}{C_{10}^6} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}.$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Математичне сподівання і дисперсію обчислимо за формулами (2.11) і (2.17):

$$M(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{1}{30} = 4.2;$$

$$D(X) = 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{3}{10} + 36 \cdot \frac{1}{30} - (4.2)^2 = 0.56;$$

$$\sigma(X) = 0.748.$$

Той самий результат дають формули (2.39):

$$M(X) = mp = 4.2;$$

$$D(X) = mpq\frac{N-m}{N-1} = 1.26 \cdot \frac{4}{9} = 0.56.$$

Зауваження. Окрім розглянутих найбільш широко вживаних розподілів дискретних випадкових величин при розв'язанні багатьох технічних задач застосовується розподіл, розглянутий у прикладі 2.1.

3 Основні розподіли неперервних випадкових величин. Закон великих чисел

Рівномірний, нормальний, показниковий розподіли неперервних випадкових величин, їх числові характеристики. Закон великих чисел. Нерівності Чебишова. Теореми Чебишова та Бернуллі.

Література: [1, глава 5, п.п. 5.8 – 5.9, глава 6, глава 13, п.п. 13.1 – 13.5], [2, глава 6, п.п. 6.1 – 6.3, глава 10], [4, глава 9, глава 11, § 6, глава 12, § 2 – 7, глава 13], [7, тема 10, п.п. 1, 7, 11, тема 11], [10, розділ V, § 31, 34, 35].

3.1 Розподіли неперервних випадкових величин

3.1.1Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл неперервної випадкової величини X виникає у випробуваннях типу кидання навмання точки на відрізок $[a;b]$ (X – відстань точки від межі a відрізка), або у випробуваннях, пов'язаних з округленням вимірювань фізичних величин за допомогою приладів (X – похибка округлення).

Неперервна випадкова величина X є *рівномірно розподіленою на відрізку* $[a;b]$, якщо її щільність імовірності має стале значення на цьому відрізку:

$$f(x)=\begin{cases} c \ \ при \quad x\in[a;b]; \\ 0 \ \ при \quad x\in[a;b]. \end{cases}$$

Значення сталої величини c визначають за властивістю 4 щільності ймовірності:

$$\int_a^b f(x)dx = c\int_a^b dx = c(b-a)=1, \text{ звідки } \ c=\frac{1}{b-a}.$$

Тобто щільність імовірності рівномірно розподіленої на відрізку $[a;b]$ випадкової величини набирає вигляду:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \ \ при \ \ x\in[a;b]; \\ 0 \qquad при \ x\notin [a;b]. \end{cases}$$

Графік щільності ймовірності наведено на рис. 2.10.

Функцію розподілу $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ визначають за формулою (2.10):

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^x dx=\frac{x-a}{b-a},$$

а згідно з властивістю 4 функції розподілу $F(x)=0$ при $x\le a$ і $F(x)=1$ при $x>b$, тому

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & при\ a<x\le b;\\ 1 & при\ x>b.\end{cases} \qquad (2.40)$$

Графік функції розподілу $F(x)$ подано на рис. 2.11.

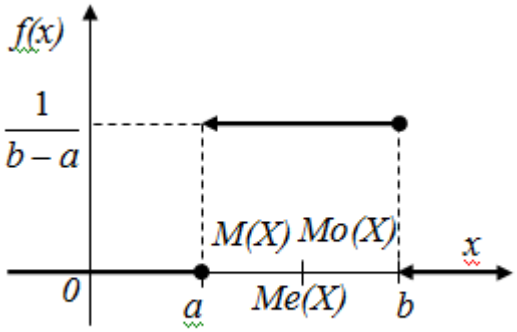


Рисунок 2.10

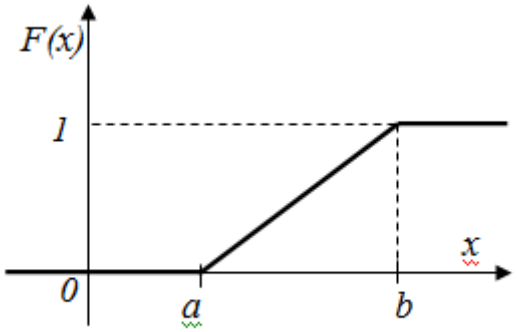


Рисунок 2.11

Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини знайдемо за формулою (2.12), а дисперсію – за формулою (2.18):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}, \qquad (2.41)$$

тобто математичне сподівання збігається з серединою $[a;b]$:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12};$$

отже,

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}; \qquad (2.42)$$

та середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (2.43)$$

Мода $M_0(X)$ рівномірно розподіленої випадкової величини X набуває нескінченної множини значень з відрізка $[a;b]$, оскільки щільність розподілу $f(x)$ є сталою величиною на цьому відрізку, отже, рівномірний розподіл – полімодальний.

Медіана обчислюється за формулою $M_e(X) = \frac{a+b}{2}$, оскільки пряма $x = \frac{a+b}{2}$ поділяє навпіл площу, обмежену прямою $f(x)$ і віссю Ox (рис. 2.10).

Імовірність того, що в результаті випробування рівномірно розподілена випадкова величина X набуде можливого значення з інтервалу $(a;\beta)$, який міститься у відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою (2.9):

$$P\{a < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (2.44)$$

Приклад 2.16. Автобуси «Політ» вирушають до аеропорту Бориспіль з інтервалом 30 хв. Час очікування автобуса на зупинці – випадкова рівномірно розподілена величина X. Знайти функцію розподілу, числові характеристики цієї випадкової величини, який у випадковий момент підійшов до зупинки, не перевищить 5хв.

Розв'язання. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку [0;30], тому на цьому відрізку щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{30}$, а функція розподілу, згідно з формулою (2.40) набирає вигляду

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0; \\ \frac{x}{30} & при\ 0 < x \le 30; \\ 1 & при\ x > 30. \end{cases}$$

Числові характеристики знаходимо за формулами (2.41) – (2.43):

$$M(X)=15;\ D(X)=75;\ \sigma(X)=5\sqrt{3},$$

а ймовірність того, що час очікування не перевищить 5 хв – за формулою (2.44):

$$P\{0<X<5\}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 2.17. Ціна однієї поділки на приладі визначення повітряної швидкості літака становить 5 км/год. Яка ймовірність при визначенні швидкості зробити помилку в межах ± 0.2 км/год, якщо відлік округлюється до найближчої цілої поділки?

Розв'язання. Похибка округлення показів приладу – випадкова величина X, рівномірно розподілена на відрізку $[-2.5;+2.5]$. Вона не перевищить $\pm 0{,}2$ км/год, якщо міститиметься в інтервалі $(-2.5;-2.3)$ або $(+2.3;+2.5)$, отже, за формулою (2.44):

$$P\{-2.5<X<-2.3\}+P\{2.3<X<2.5\}=\frac{0.2}{5}+\frac{0.2}{5}=0.08.$$

3.1.2. Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу неперервної величини є одним із найчастіше застосовуваних на практиці розподілів. Йому підлягають похибки вимірювань різних фізичних величин, розміри або маса виробів, які сходять з поточної лінії, тощо.

Неперервна випадкова величина X називається *розподіленою за нормальним законом* (або законом Гаусса) за параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.45)$$

для всіх $x\in(-\infty;\infty)$.

Параметри нормального розподілу мають такий імовірнісний зміст:

$$a = M(X);\ \sigma^2 = D(X) \qquad (2.46)$$

Графік щільності ймовірностей $f(x)$ нормального розподілу (рис. 2.12) називають *нормальною кривою,* або *кривою Гаусса*. Оскільки різниця $(x-a)$ входить в аналітичний вираз $f(x)$ у квадраті, нормальна крива симетрична прямої $x = a$. Її перша похідна

$$f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

у точці $x = a$ перетворюється на нуль, а при переході через цю точку змінює знак з «+» на «–», отже, у точці $x = a$ функція $f(x)$ має максимум:

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Друга похідна $f''(x) = \frac{(x-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ у точках $x = a \pm \sigma$ перетворюється на нуль, а при переході через ці точки змінює знак, отже, в точках $x = a \pm \sigma$ графік функції має перегин:

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

При $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 0$, отже, вісь абсцис є лівою і правою асимптотою графіка функції $f(x)$.

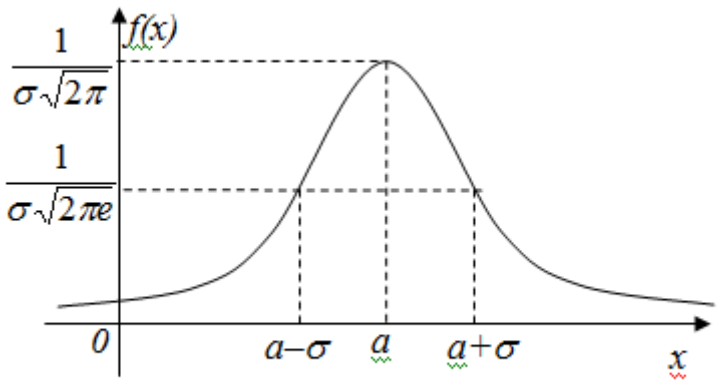


Рисунок 2.12

Мода і медіана нормально розподіленою випадкової величини, як і її математичне сподівання, збігається з параметром a, тобто

$$M(X) = M_0(X) = M_e(X) = a.$$

Імовірність того, що в результаті випробування нормально розподілена випадкова величина X набуде можливого значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$, обчислюється за формулою (2.9):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Застосовуючи заміну $t = \frac{x-a}{\sigma}$, дістаємо $dx = \sigma dt$ і межі інтегрування для змінної t від $\frac{\alpha-a}{\sigma}$ до $\frac{\beta-a}{\sigma}$, отже,

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

або з використанням функції Лапласа $\Phi(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\delta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ маємо остаточно

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (2.47)$$

Формула (2.47) дає можливість обчислити ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання за модулем буде меншим від заданого ε:

$$P\{|X-a|<\varepsilon\} = P\{-\varepsilon < X < a+\varepsilon\} = \\ = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (2.48)$$

Із формули (2.48) випливає важливе для нормального розподілу *правило* «*трьох сигм*» . При $\varepsilon = 3\sigma$

$$P\{|X-a|<3\sigma\} = P\{a-3\sigma < X < a+3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0.9973,$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина набуває можливих значень з інтервалу $(a-3\sigma; a+3\sigma),$ близька до одиниці, отже, ця подія практично достовірна. Виконання цього правила дає підставу вважати випадкову величину X розподіленою за нормальним законом.

Із формули (2.47) дістаємо вираз функції розподілу *F(x)* нормально розподіленою випадкової величини X через функцію Лапласа $\Phi(\delta)$:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0.5.$$

Приклад 2.18. Нормально розподілену випадкову величину X задано щільністю ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення з інтервалу (1,5; 4).

Розв'язання. За імовірнісним змістом параметрів розподілу маємо $a = 3, \sigma = 2,$ тому за формулою (2.47)

$$P\{1{,}5 < X < 4\} = \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1.5-3}{2}\right) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.75) = \\ = \Phi(0.5) + \Phi(0.75) = 0.1915 + 0.2734 = 0.4649$$

(значення функції $\Phi(x)$ взято з таблиці (дод.2)).

Приклад 2.19. За даними відділу технічного контролю 10% виробів підприємства має довжину, меншу від 14.7 см, а 20% – довжину, більшу 15.2 см. Довжина виробів – нормально розподілена випадкова величина X. Знайти середній (номінальний) розмір виробів і його середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

Розв'язання. За умовою задачі $P\{X<14.7\}=0.1,\ P\{X>15.2\}=0.2.$ Згідно з формулою (2.47)

$$P\{X<14.7\}=P\{-\infty<X<14.7\}=\Phi\left(\frac{14.7-a}{\sigma}\right)-\Phi(-\infty)=$$

$$=\Phi\left(\frac{14.7-a}{\sigma}\right)+0.5=0.1,\ \text{звідки}\ \Phi\left(\frac{14.7-a}{\sigma}\right)=-0.4.$$

Із таблиці (дод.2) за відомим значенням функції $\Phi(x)$ знаходимо $\frac{14.7-a}{\sigma}=-1.28$ або $a-1.28\sigma=14.7.$

Аналогічно за формулою (2.47)

$$P\{X>15.2\}=P\{15.2<X<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{15.2-a}{\sigma}\right)=$$

$$=0.5-\Phi\left(\frac{15.2-a}{\sigma}\right)=0.2,$$

звідки $\Phi\left(\frac{15.2-a}{\sigma}\right)=0.3,\ \frac{15.2-a}{\sigma}=0.84$ або $a+0.84\sigma=15.2.$

Здобута система

$$\begin{cases} a-1.28\sigma=14.7 \\ a+0.84\sigma=15.2 \end{cases}$$

має розв'язок $a=15,\ \sigma=0.235,$ отже, середній розмір виробів дорівнює 15 см, а стандартне відхилення – 0.235 см.

Приклад 2.20. Систематична похибка утримання висоти літаком складає ± 20 м, а випадкова похибка розподілена нормально із середнім квадратичним відхиленням 75 м. Для польоту літаку надано коридор висотою 100м. Знайти ймовірність того, що політ буде відбуватись а)

нижче; б) всередині; в) вище від коридора, якщо літаку задано висоту, відповідно середині коридора.

Розв'язання. Позначимо через X сумарну похибку утримання висоти. Її систематична складова $a = 20$ м, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 75$м. Оскільки літаку задано висоту, відповідну середині коридора, для того щоб політ відбувався нижче від коридора, має бути $X < -50,$ усередині коридора $-50 < X < 50$ і вище коридора $X > 50$.

За формулою (2.47) маємо:

$$\text{а) } P\{X < -50\} = P\{-\infty < X < -50\} = \Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$= -\Phi(-0.93) + 0.5 = -0.3238 + 0.5 = 0.1762;$$

$$\text{б) } P\{-50 < X < 50\} = \Phi\left(\frac{50-20}{75}\right) - \Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right) =$$

$$= \Phi(0.4) + \Phi(0.93) = 0.1554 + 0.3238 = 0.4792;$$

$$\text{в) } P\{X > 50\} = P\{50 < X < \infty\} = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{50-20}{75}\right) =$$

$$= 0.5 - 0.1554 = 0.3446.$$

Очевидно, розглянуті події утворюють повну групу, тому їхня сумарна ймовірність дорівнює одиниці.

3.1.3 Показниковий розподіл

Показниковий, або експоненціальний, розподіл неперервної випадкової величини має широке застосування в теорії надійності технічного обладнання для характеристики терміну безвідмовної роботи елементів та пристроїв і в теорії масового обслуговування для характеристики тривалості обслуговування.

Неперервна випадкова величина X розподілена за *показниковим (експоненціальним) законом* з параметром $\lambda > 0$ якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при \;\; x \geq 0, \\ 0 & при \;\; x < 0. \end{cases}$$

Функцію розподілу $F(x)$ при $x > 0$ знаходимо за формулою (2.10):

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Графіки щільності ймовірності $f(x)$ і функції розподілу $F(x)$ подано відповідно на рис. 2.13 і 2.14.

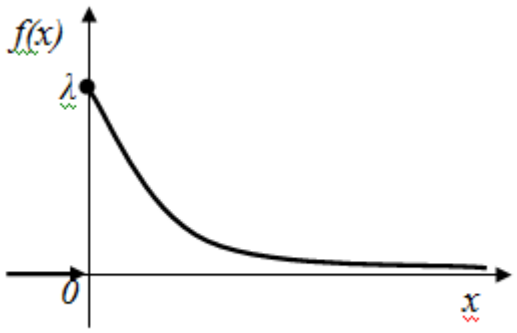


Рисунок 2.13

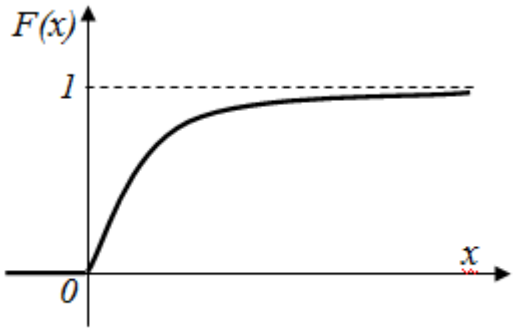


Рисунок 2.14

Математичне сподівання $M(X)$ знайдемо за формулою (2.12), застосувавши інтегрування частинами при обчисленні невласного інтеграла:

$$M(X) = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (2.49)$$

Дисперсію $D(X)$ знаходимо за формулою (2.18):

$$D(X) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda \cdot \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Інтегруючи частинами і застосувавши одержану формулу (2.49), маємо $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ і відповідно $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Імовірність того, що випадкова величина X ,яка має показників розподіл, у результаті випробування набуває можливого значення з інтервалу $(a;b)$ при $a > 0,\ b > 0,$ обчислюється за формулою (2.9):

$$P\{a < X < b\} = \lambda \int_a^{b} e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_a^{b} = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda b}. \qquad (2.50)$$

Зауваження. Якщо $a \le 0,$ то слід узяти a=0 і обчислювати ймовірність за формулою

$$P\{0 < X < b\} = 1 - e^{-\lambda b}.$$

Оскільки щільність імовірності $f(x)$ набуває найбільшого значення при $x = 0,$ то мода показникового розподілу $M_0(X) = 0,$ а медіана згідно з означенням визначається з умови

$$P\{X < M_e(X)\} = F(M_e(X)) = 1 - e^{-\lambda M_e(X)} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$e^{-\lambda M_e(X)} = \frac{1}{2},\ -\lambda M_e(X) = -\ln 2 \approx -0.693,\ M_e(X) \approx \frac{0.693}{\lambda}.$$

Приклад 2.21. Час обслуговування пасажира в авіакасі – випадкова величина $T,$ розподілена за показниковим законом із середнім значенням, що дорівнює 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся до каси, буде обслуговуватись:

а) від 2,5 до 5 хв;

б)більше 10 хв.

Розв'язання. а) За умовою математичне сподівання (середнє значення) $M(T) = 5,$ тому за формулою (2.49) параметр розподілу $\lambda = 0.2.$ Імовірність того, що час обслуговування пасажира міститиметься в межах від 2.5 до 5 хв, обчислюється за формулою (2.50):

$$P\{2.5 < T < 5\} = e^{-0.2 \cdot 2.5} - e^{-0.2 \cdot 5} - e^{-1} \approx 0.2386.$$

б) Імовірність того, що час обслуговування буде більший за 10 хв, також обчислюється за формулою (2.50):

$$P\{T > 10\} = P\{10 < T < \infty\} = e^{-0.2 \cdot 10} = e^{-2} \approx 0.1353.$$

Якщо випадкова величина T з показниковим розподілом – тривалість безвідмовної роботи деякого елемента, а λ- інтенсивність відказів цього елемента, то функція розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$ визначає ймовірність відказу елемента за час t. При цьому функція $R(t) = e^{-\lambda t}$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t і називається *функцією надійності.*

Приклад 2.22. Тривалість безвідмовної роботи елемента системи – випадкова величина T, розподілена за показниковим законом із функцією розподілу $F(t)=1-e^{0.01t}$. Знайти ймовірність того, що протягом доби елемент: а) відмовить; б) не відмовить.

Розв'язання. а) Імовірність відказу P_B елемента протягом доби дорівнює значенню функції розподілу $F(t)$ при $t=24$ год:

$$P_B = F(24) = 1 - e^{-0.24} \approx 1 - 0.7866 = 0.2134;$$

б) імовірність не відмови P_H елемента протягом доби дорівнює значення функцію надійності $R(t)$ при $t=24$ год:

$$P_H = R(t) = e^{-0.24} \approx 0.7866.$$

3.2 Закон великих чисел

Випадкова величина за означенням набуває тих чи інших можливих значень залежно від впливу різних факторів випадкового характеру. Природно сподіватись, що при великій кількості випадкових величин вплив втрачає випадковий характер і в ньому проявляються досить чіткі закономірності, а саме: середнє арифметичне великої кількості $(n \to \infty)$ випадкових величин з імовірністю, близькою до одиниці, набуває конкретного невипадкового значення.

У цьому полягає стислий зміст закону великих чисел, а умови, за яких цей закон має місце, сформульовано в ряді фундаментальних теорем, об'єднаних загальною назвою – *закон великих чисел* і пов'язаних з іменами видатних математиків Я. Бернуллі, П.Л. Чебишова, О.М. Ляпунова, А.А. Маркова та ін..

3.2.1 Нерівності та теорема П. Л. Чебишова

Перша та друга нерівності Чебишова мають велике прикладне значення для оцінювання ймовірностей.

Перша нерівність Чебишова: якщо випадкова величина $X \geq 0$ має скінчене математичне сподівання $M(X)$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}. \qquad (2.51)$$

Оскільки сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P\{X \geq \varepsilon\} + P\{X < \varepsilon\} = 1,$$

то крім оцінки (2.51) застосовується також оцінка

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Друга нерівність Чебишева: якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X)$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$P\{|\, X - M(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.52)$$

Для ймовірності протилежної події відповідна оцінка має вигляд:

$$P\{|\, X - M(X) \,| < \varepsilon \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.53)$$

Приклад 2.23. Річна виручка авіакомпанії від перевезень пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 250 млн грн. і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 30 млн грн..

Знайти:

а) оцінку ймовірності того, що в наступному році авіакомпанія матиме виручку, не менше за 280 млн грн; б) оцінку ймовірності того, що виручка міститиметься в межах від 200 до 300 млн грн.; в) в яких межах з імовірністю, не меншою за 0,9, можна очікувати виручку в наступному році.

Розв'язання. а) За умовою $M(X) = 250,\ \varepsilon = 280,$ тому за нерівністю (2.51)

$$P\{X \geq 280\} \leq \frac{250}{280} = 0.893.$$

б) За умовою задачі $\sigma(X)=30$, тому $D(X)=900$. Події $\{200<X<300\}$, $\{-50<X<-250<50\}$, $\{|X-250|<50\}$ – рівносильні, тому за нерівністю (2.53)

$$P\{200<X<300\}=P\{|X-250|<50\}\geq 1-\frac{900}{2500}=0.64.$$

в) за нерівністю (2.53)

$$P\{|X-250|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{900}{\varepsilon^2},$$

а за умовою ця ймовірність не менша від 0,9, тому можна взяти

$$1-\frac{900}{\varepsilon^2}=0.9,$$

звідки $\varepsilon=94.868$, $\varepsilon\approx 95$.

Отже, з імовірністю, не меншою від 0,9, настає подія

$$\{|X-250|<95\} \text{ або } \{155<X<345\}.$$

Приклад 2.24. При вимірюванні курсу літака систематична похибка приладу відсутня, а випадкова похибка має середнє квадратичне відхилення 0,5°. Оцінити ймовірність того, що при вимірюванні курсу похибка буде: а) не менше від 2°; б) менша від 1°.

Розв'язання. Позначимо через X випадкову величину – похибку визначення курсу. За умовою $M(X)=0$ (систематична похибка відсутня), $D(X)=0.25.$

а) За нерівністю (2.52)

$$P\{|X|\geq 2\}\leq\frac{0.25}{4}=0.0625.$$

б) за нерівністю (2.53)

$$P\{|X|<1\}\geq 1-\frac{0.25}{1}=0.75.$$

Теорема Чебишова. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями і дисперсіями, обмеженими однією і тією самою стало C:

$$D(X_i)\leq C,\ (i=1,2,...),$$

то для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \tag{2.54}$$

яка при $n \to \infty$ переходить у граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

оскільки ймовірність не може бути більшою за 1.

Тобто при виконанні умов теореми з імовірністю, що практично дорівнює одиниці, середнє арифметичне великої кількості випадкових величин як завгодно мало відрізняється від невипадкової (детермінованої) величини – середнього арифметичного їхніх математичних сподівань.

Частинним випадком теореми Чебишова, який виникає за умови, що всі випадкові величини задовольняють умови теореми і мають однакові математичні сподівання $M(X)$, є

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - M(X)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

З теореми Чебишова випливає, що при досить великих n з будь-яким заданим ступенем точності $\varepsilon > 0$ практично достовірною є наближена рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i). \tag{2.55}$$

Оцінка ймовірності цієї рівності $1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$ називається її надійністю, тому теорему Чебишова можна ще сформулювати так: якщо дисперсії попарно незалежних випадкових величин обмежені, то з будь-якими достатньо високими точністю і надійністю виконується рівність (2.55) для всіх доволі великих n.

3.2.2 Закон великих чисел у формі Бернуллі

Розглянемо схему Бернуллі: нехай у кожному з n незалежних випробувань подія A може або відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$. Позначимо через m кількість появ події A в цих n випробуваннях. Очевидно, різниця $\left(\frac{m}{n} - p\right)$ між частотою появи події і її ймовірністю залежить від випадкових факторів і може істотно змінюватись, оскільки m може набувати значень від 0 до n.

Проте при досить великих n ця різниця з імовірністю, близькою до одиниці, виявляється меншою від як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$. У цьому полягає суть теореми Бернуллі, яка є однією з форм закону великих чисел.

Теорема Бернуллі. Якщо m – кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, а p – імовірність появи події A в кожному цих випробувань, то для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{2.56}$$

яка при $n \to \infty$ переходить у граничну рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Із нерівності (2.56) випливає, що при необмеженому зростанні кількості випробувань наближена рівність $\frac{m}{n} \approx p$ виконується з як завгодно високими точністю ε та надійністю $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Ця обставина є обґрунтуванням визначення статистичної ймовірності як границі (в розумінні збіжності за ймовірністю) відносною частоти при необмеженому збільшенні кількості випробувань.

Приклад 2.25. За даними служби перевезень аеропорту кількість затриманих за метеоумовами рейсів становить 7% від їх загальної щорічної кількості. Наступного року планується виконати 1400 рейсів. Застосовуючи теорему Бернуллі,

а) оцінити ймовірність того, що в наступному році відносна частота затримки рейсів відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною менше, ніж на 0,02;

б) визначити, в яких межах з імовірністю, не меншою від 0.96, міститиметься відносна частота затримки рейсів;

в) знайти, скільки потрібно зробити рейсів, щоб з імовірністю, не меншою за 0,9, можна було б сподіватись, що абсолютна величина відхилення відносної частоти затримки рейсів від її ймовірності буде меншою за 0,01.

Розв'язання. За умовою $n = 1400,\ p = 0.07,\ q = 0.93.$

а) За нерівністю (2.56)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0.02\right) \geq 1 - \frac{0.07 \cdot 0.93}{1400 \cdot (0.02)^2} = 0.884;$$

б) щоб імовірність була не меншою за 0.96, достатньо в нерівності (2.56) узяти

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0.96, \text{ звідки } \varepsilon = 0.034.$$

Отже, з імовірністю, не меншою за 0.96, настає подія

$$\left|\frac{m}{n} - 0.07\right| < 0.034,\ 0.036 < \frac{m}{n} < 0.104;$$

в) за нерівністю (2.56) маємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0.01\right) \geq 1 - \frac{0.07 \cdot 0.93}{n \cdot (0.01)^2} \geq 0.9,$$

звідки $n \geq 6510.$

ДОДАТКИ

Додаток 1 Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3726	0.3712	0.3698
0.4	0.3683	0.3668	0.3652	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0395	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0353	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001

Додаток2 Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.0000	0.43	0.1664	0.86	0.3051	1.29	0.4015	1.72	0.4573	2.30	0.4893
0.01	0.0040	0.44	0.1700	0.87	0.3078	1.30	0.4032	1.73	0.4582	2.32	0.4898
0.02	0.0080	0.45	0.1736	0.88	0.3106	1.31	0.4049	1.74	0.4591	2.34	0.4904
0.03	0.0120	0.46	0.1772	0.89	0.3133	1.32	0.4066	1.75	0.4599	2.36	0.4909
0.04	0.0160	0.47	0.1808	0.90	0.3159	1.33	0.4082	1.76	0.4608	2.38	0.4913
0.05	0.0199	0.48	0.1844	0.91	0.3186	1.34	0.4099	1.77	0.4616	2.40	0.4918
0.06	0.0239	0.49	0.1879	0.92	0.3212	1.35	0.4115	1.78	0.4625	2.42	0.4922
0.07	0.0279	0.50	0.1915	0.93	0.3238	1.36	0.4131	1.79	0.4633	2.44	0.4927
0.08	0.0319	0.51	0.1950	0.94	0.3264	1.37	0.4147	1.80	0.4641	2.46	0.4931
0.09	0.0359	0.52	0.1985	0.95	0.3289	1.38	0.4162	1.81	0.4649	2.48	0.4934
0.10	0.0398	0.53	0.2019	0.96	0.3315	1.39	0.4177	1.82	0.4656	2.50	0.4938
0.11	0.0438	0.54	0.2054	0.97	0.3340	1.40	0.4192	1.83	0.4664	2.52	0.4941
0.12	0.0478	0.55	0.2088	0.98	0.3365	1.41	0.4207	1.84	0.4671	2.54	0.4945
0.13	0.0517	0.56	0.2123	0.99	0.3389	1.42	0.4222	1.85	0.4678	2.56	0.4948
0.14	0.0557	0.57	0.2157	1.00	0.3413	1.43	0.4236	1.86	0.4686	2.58	0.4951
0.15	0.0596	0.58	0.2190	1.01	0.3438	1.44	0.4251	1.87	0.4693	2.60	0.4953
0.16	0.0636	0.59	0.2224	1.02	0.3461	1.45	0.4265	1.88	0.4699	2.62	0.4956
0.17	0.0675	0.60	0.2257	1.03	0.3485	1.46	0.4279	1.89	0.4706	2.64	0.4959
0.18	0.0714	0.61	0.2291	1.04	0.3508	1.47	0.4292	1.90	0.4713	2.66	0.4961
0.19	0.0753	0.62	0.2324	1.05	0.3531	1.48	0.4306	1.91	0.4719	2.68	0.4963
0.20	0.0793	0.63	0.2357	1.06	0.3554	1.49	0.4319	1.92	0.4726	2.70	0.4965
0.21	0.0832	0.64	0.2389	1.07	0.3577	1.50	0.4332	1.93	0.4732	2.72	0.4967
0.22	0.0871	0.65	0.2422	1.08	0.3599	1.51	0.4345	1.94	0.4738	2.74	0.4969
0.23	0.0910	0.66	0.2454	1.09	0.3621	1.52	0.4357	1.95	0.4744	2.76	0.4971
0.24	0.0948	0.67	0.2486	1.10	0.3643	1.53	0.4370	1.96	0.4750	2.78	0.4973
0.25	0.0987	0.68	0.2517	1.11	0.3665	1.54	0.4382	1.97	0.4756	2.80	0.4974
0.26	0.1026	0.69	0.2549	1.12	0.3686	1.55	0.4394	1.98	0.4761	2.82	0.4976
0.27	0.1064	0.70	0.2580	1.13	0.3708	1.56	0.4406	1.99	0.4767	2.84	0.4977
0.28	0.1103	0.71	0.2611	1.14	0.3729	1.57	0.4418	2.00	0.4772	2.86	0.4979
0.29	0.1141	0.72	0.2642	1.15	0.3749	1.58	0.4429	2.02	0.4783	2.88	0.4980
0.30	0.1179	0.73	0.2673	1.16	0.3770	1.59	0.4441	2.04	0.4793	2.90	0.4981
0.31	0.1217	0.74	0.2703	1.17	0.3790	1.60	0.4452	2.06	0.4803	2.92	0.4982
0.32	0.1255	0.75	0.2734	1.18	0.3810	1.61	0.4463	2.08	0.4812	2.94	0.4984
0.33	0.1293	0.76	0.2764	1.19	0.3830	1.62	0.4474	2.10	0.4821	2.96	0.4985
0.34	0.1331	0.77	0.2794	1.20	0.3849	1.63	0.4484	2.12	0.4830	2.98	0.4986
0.35	0.1368	0.78	0.2823	1.21	0.3869	1.64	0.4495	2.14	0.4838	3.00	0.49865
0.36	0.1406	0.79	0.2852	1.22	0.3883	1.65	0.4505	2.16	0.4846	3.20	0.49931
0.37	0.1443	0.80	0.2881	1.23	0.3907	1.66	0.4515	2.18	0.4854	3.40	0.49966
0.38	0.1480	0.81	0.2910	1.24	0.3925	1.67	0.4525	2.20	0.4861	3.60	0.499841
0.39	0.1517	0.82	0.2939	1.25	0.3944	1.68	0.4535	2.22	0.4868	3.80	0.499928
0.40	0.1554	0.83	0.2967	1.26	0.3962	1.69	0.4545	2.24	0.4875	4.00	0.499968
0.41	0.1591	0.84	0.2995	1.27	0.3980	1.70	0.4554	2.26	0.4881	4.50	0.499997
0.42	0.1628	0.85	0.3023	1.28	0.3997	1.71	0.4564	2.28	0.4887	5.00	0.499997

ВЛАСЕНКО Катерина Володимирівна,
ШЕВЦОВ Сергій Олександрович
ГРУДКІНА Наталія Сергіївна
ЧУМАК Олена Олександрівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Курс лекцій

Редагування, комп’ютерне верстання Я. О. Бершацька

Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 2,73.
Обл.-вид. арк 0,87. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003