

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

**С.В.Подлесний**  
**О.І.Шеремет**  
**О.А. Костіков**  
**Ю.О. Єрфорт**  
**О.В. Суботін**  
**О.М. Стадник**

## **Комп'ютерне моделювання електромеханічних систем**

Навчальний посібник для студентів електромеханічних спеціальностей

Затверджено  
на засіданні Вченої ради ДДМА  
Протокол № 4 від 26.11.2020

**Краматорськ 2021**

УДК 531.3

П 44

**Автори:**

*Подлесний С. В.*, канд. техн. наук, доцент;  
*Шеремет О.І.*, докт. техн. наук, професор;  
*Костіков О.А.*, канд. ф.-мат. наук, доцент;  
*Єрфорт Ю.О.*, доцент;  
*Суботін О.В.*, канд. техн. наук, доцент;  
*Стадник О.М.*, ст. викладач.

**Рецензенти:**

*Скрипник І.І.*, директор Інституту прикладної математики і механіки НАН України, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук;  
*Тарасов О.Ф.*, завідувач кафедри комп'ютерних інформаційних технологій Донбаської державної машинобудівної академії, професор, доктор технічних наук.

**Подлесний С.В.**

П 44                    Комп'ютерне моделювання електромеханічних систем:  
*навчальний посібник [для студентів електромеханічних спеціальностей]* / С.В.Подлесний, О.І. Шеремет, О.А. Костіков, Ю.О. Єрфорт, О.В. Суботін, О.М. Стадник – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 216 с.

ISBN

Навчальний посібник присвячено математичному та імітаційному моделюванню електромеханічних систем та електротехнічних комплексів. Розглянуто: принцип електромеханічних аналогій; математичне моделювання типових електричних кіл, осциляторів та маятників, вимірювальних перетворювачів, електродинамічних та електромагнітних вібростендів, електромеханічних перетворювачів постійного струму, електричних машин змінного струму. Посібник призначений для студентів електромеханічних спеціальностей. Посібник може бути корисним для аспірантів і науковців, що здійснюють дослідження електромеханічних систем та електротехнічних комплексів.

УДК 531.1

ISBN ISBN 978-617-7889-03-7

© С.В.Подлесний, О.І. Шеремет, О.А.,  
Костіков, Ю.О. Єрфорт, О.В.  
Суботін, О.М.Стадник, 2021  
© ДДМА, 2021

## ЗМІСТ

### Вступ

1 Принцип електромеханічних аналогій. Рівняння Лагранжа-Максвелла.

2 Математичне моделювання типових електричних кіл, осциляторів та маятників.

2.1 Послідовне ферорезонансне LRC-коло з індуктивністю, що залежить від струму.

2.2 Осцилятор Уеді.

2.3 Маятник Дубошинського.

2.4 Електростатичний осцилятор.

2.5 Маятник в швидкозмінному магнітному полі.

2.6 Модель динамо Рікітакі.

2.7 Динамічна модель електромагнітного і електростатичного підвісів ротора.

2.8 Електромеханічний осцилятор зі змінною індуктивністю.

2.9 Завдання до самостійної роботи.

3 Математичне моделювання вимірювальних перетворювачів.

3.1 Дослідження динаміки електровимірювальних приладів в системі MATHCAD.

3.2 Ємнісний датчик малих зсувів.

3.3 Аналіз динамічних властивостей сейсмометра і акселерометра.

3.4 Дослідження вимірювальних перетворювачів фотоелектричного типу

3.4.1 Характеристика вимірювальних перетворювачів оптичного типу

3.4.2 Розрахункова модель перетворювача оптичного типу

3.4.3 Дослідження перетворювача оптичного типу

4 Математичне моделювання електродинамічних та електромагнітних вібростендів.

4.1 Математична модель електродинамічного вібростенда.

4.2 Математична модель електромеханічної системи для віброобробки металевих деталей, побудована на основі електромеханічних аналогій.

4.3 Трьохкоординатний електромагнітний вібростенд.

5 Математичне моделювання електромеханічних перетворювачів постійного струму.

5.1 Електродвигун постійного струму з незалежним збудженням.

5.2 Аналіз динамічних властивостей уніполярного генератора.

5.3 Електромеханічна система автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму.

5.4 Електромеханічна система електромагнітного гальма.

5.5 Коливальна електромеханічна система, що складається з двох двигунів постійного струму.

6 Математичне моделювання електричних машин змінного струму.

6.1 Асинхронна машина у фазних координатах.

6.1.1 Теоретичні відомості.

6.1.2 Завдання.

6.1.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання роботи.

6.2 Координатні перетворювачі.

6.2.1 Загальні відомості.

6.2.2 Завдання.

6.2.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання роботи.

6.3 Асинхронна машина в ортогональній системі координат.

6.3.1 Загальні відомості.

6.3.2 Завдання.

6.3.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання практичних завдань.

## ВСТУП

Електро механічними називають системи, в яких механічні та електромагнітні процеси істотно пов'язані між собою. У механіці характеристиками стану є узагальнені координати і швидкості (або імпульси). Для електро механічних систем вони складають першу групу характеристик, друга включає величини, що описують електромагнітні процеси.

Електро механічні системи (ЕМС) знаходять широке застосування в багатьох областях техніки. Електричні двигуни, генератори, неконтактні (електромагнітні, електростатичні) підвіси твердого тіла, електровимірювальні прилади представляють різні приклади електро механічних систем. Розвиток ЕМС йде як по шляху вдосконалення технічних засобів, так і в напрямку пошуку нових алгоритмів управління. Для раціонального конструювання та подальшого аналізу властивостей таких систем сучасна інженерна практика вимагає створення коректних математичних моделей, які повинні містити диференціальні рівняння механічного руху, а також рівняння електромагнітних процесів. Для складання рівнянь електро механічних систем вельми зручним є апарат аналітичної механіки, в якому електромагнітні і механічні величини, що характеризують систему, фігурують як формально рівноправні і рівняння руху виводять за допомогою лагранжевого формалізму.

Узагальнено моделювання можна визначити як метод пізнання, при якому досліджуваний об'єкт (оригінал) знаходиться в деякому відповідно до іншого об'єкту (моделі), причому об'єкт-модель здатна в тому чи іншому відношенні заміщати оригінал на деяких стадіях пізнавального процесу. Стадії пізнання, на яких може відбуватися така заміна, так само, як і форма відповідності моделі і оригіналу, можуть бути різні.

Модель, таким чином, – це природний або штучний об'єкт, що знаходиться в певній відповідності з досліджуваними об'єктом або з будь-якою з його сторін і зручніший для вирішення конкретних завдань. У процесі вивчення модель служить відносно самостійним квазіоб'єктом (тобто уявним, несправжнім об'єктом), що дозволяє отримати при його дослідженні деяке опосередковане знання про об'єкт оригінал.

В теорії моделювання під оригіналом розуміється об'єкт, певні властивості якого підлягають вивченню методом моделювання. У загальному випадку поняття оригіналу може мати досить широку інтерпретацію, що охоплює як реально існуючі, так і проєктовані (на будь-яких стадіях) об'єкти. При вирішенні практичних завдань моделювання використовується для вивчення модельованого об'єкта, тобто оригіналу, і включає в себе побудову моделі, її дослідження та перенесення отриманої інформації на оригінал. Все це здійснюється на основі теорії подібності.

Теорія подібності і моделювання, що на ньому базується мають глибокі зв'язки з теорією пізнання. Так, при встановленні подібності однієї фізичної природи розкриваються залежності якісних сторін від їх

кількісних сторін. Більш того, ця теорія дає можливість встановити подібність між різнорідними по фізичній природі явищами. У матеріальному світі, внаслідок його єдності, для всіх різновидів матерії і різноманітних форм її проявів існують загальні фізичні закономірності. Це дозволяє узагальнювати процес пізнання і, відволікаючись від другорядних деталей, зображати ті чи інші сторони фізичних явищ математично у вигляді функціональних зв'язків і диференціальних рівнянь. Наприклад, в коливаннях маятника і коливаннях в електричному контурі, в поширенні пружних хвиль і поширення електромагнітних хвиль є фізична спільність, що дозволяє створити єдину теорію про коливання і хвилі з загальним математичним апаратом.

Моделювання є в даний час основою для різноманітних досліджень у всіх областях знань, в тому числі і в електромеханіці. Особливості теорії та практики моделювання в електромеханіці складаються, зокрема, в необхідності виділення зі складного електромеханічного об'єкта того, що є найважливішим при його вивченні. Це обумовлено тим, що функціонування електромеханічного перетворювача енергії пов'язано з різноманіттям різних за своєю природою фізичних процесів. Спроба пізнання такого об'єкта неможлива без створення моделі, завжди спрощеної порівняно з нескінченною глибиною оригіналу, але спрощеною так, щоб зберегти ті сторони явища, які істотні для даної теоретичної чи практичної проблеми.

Аналітичний метод рішення, який передбачає проведення певних математичних операцій над вихідним рівнянням і отримання рішення щодо невідомої величини в загальному вигляді в буквеному вираженні, в більшості випадків кращий, тому що характеризується універсальністю і великою інформативністю. Аналітичне рішення потребує перевірки експериментом на оригіналі або на фізичній або математичній моделі. Останнє простіше, дешевше, зручніше при розгляді варіацій різних параметрів і факторів, що впливають на перебіг процесу.

Можливість проведення фізичного моделювання або ж експерименту над реальним електромеханічним об'єктом не може послужити приводом для виключення аналітичного дослідження, так як це, навпаки, може дати матеріал для більш точного математичного аналізу подібно до того, як аналіз, в свою чергу, дозволяє уточнити експеримент.

Вирішувати пов'язані з процесами в електромеханічних об'єктах завдання чисто аналітичним шляхом часто буває надзвичайно важко і навіть неможливо через велику кількість залежностей і складності нелінійних характеристик деяких залежностей (наприклад, перехідних процесів в багатообмоточних електромашинах). Тому, якщо отримати рішення аналітично в загальному вигляді важко, то доцільно звернутися до чисельних методів. В останньому випадку для зниження трудомісткості розрахунків широко застосовують ЕОМ (комп'ютери), для яких розробляються спеціальні алгоритми і програми.

ЕОМ не є моделюючим пристроєм в тому сенсі, який вкладається в поняття моделі, що відтворює якийсь конкретний процес. Отримуючи дані для аналізу і обчислюючи якусь функцію, вона переробляє, зберігає і видає інформацію, створюючи формальну модель-алгоритм обчислювальної функції. Результати обчислень на ЕОМ можуть бути отримані з великим ступенем точності, що є безперечною гідністю комп'ютерів.

Найбільш часто використовуються пакети прикладних програм, такі як MatLab, Mathcad, Maple, Wolfram Mathematica та інші.

В даному посібнику моделювання ЕМС виконано за допомогою програмного забезпечення: Mathcad (2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.8, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.3, 5.4, ); MatLab (2.4, 2.5, 2.7, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3, 6); Wolfram Mathematica (2.1, 2.5, 3.3, 4.1, 5.5); Mapl (2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.3, 5.2, 5.4).

# 1 ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ АНАЛОГІЇ. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА – МАКСВЕЛЛА

Стисло нагадаємо відомості з теорії [1].

Електромеханічні системи описуються рівняннями Лагранжа-Максвелла.

Нехай  $q_1, q_2, \dots, q_s$  – геометричні узагальнені координати,  $L_m$  – кінетичний потенціал механічної системи. Прийmemo за Максвеллом як електричні координати  $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_{s+N}$  – кількість електрики (заряди), що протікає з деякого початкового моменту через поперечний перерв провідників, створюючи систему замкнених контурів. Тоді відповідні узагальнені швидкості будуть представляти контурні струми

$$i_j = \dot{q}_j, \quad j = s+1, s+2, \dots, N.$$

Електромагнітна і електростатична енергії системи відповідно

$$T_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=s+1}^N L_{jk} i_j i_k,$$

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=s+1}^N b_{jk} q_j q_k,$$

де  $L_{jk}$  і  $b_{jk}$  – електромагнітні та електростатичні коефіцієнти індукції.

Рух системи визначається  $N$  рівняннями, з яких  $s$  рівнянь є звичайними рівняннями Лагранжа другого роду, складеними за загальним правилом для  $j = 1, 2, \dots, s$ . До цих рівнянь можуть входити і неконсервативні узагальнені сили  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ . У ньому випадку рівняння Лагранжа другого роду матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1.1)$$

Необхідно скласти ще  $N-s$  електричних рівнянь. Для цього скористаємось тим, що  $\frac{\partial T_1^e}{\partial i_j}$  і  $\frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j}$  дорівнюють відповідно потокам індукції через контури струмів  $i_j$  та напругам в їх ємностях  $U_j$ , тобто

$$\frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} = \sum_{k=s+1}^N L_k i_k; \quad \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} = U_j.$$

Позначивши через  $R_{jk}$  і  $e_j$  ( $j, k = s+1, s+2, \dots, N$ ) омичні опори і прикладені напруги (електрорушійні сили), знайдемо співвідношення, яке визначатиме втрати енергії на джоулеве тепло і робочу напругу  $e_j$ :



$$- \sum_{j,k=s+1}^N R_{jk} i_k i_j dt + \sum_{j=s+1}^N e_j i_j dt = \sum_{j=s+1}^N Q_{1j}^e dq_j,$$

звідки, враховуючи, що  $dq_j^e = i_j dt$ , отримаємо

$$Q_{1j}^e = \sum_{k=s+1}^N R_{jk} i_k + e_j, j = s + 1, s + 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

Величини  $Q_{1(s+1)}^e, Q_{1(s+2)}^e, \dots, Q_{1N}^e$  прийемо за електричні неконсервативні сили.

Тоді рівняння Лагранжа другого роду, складені за загальним правилом для  $j=s+1, s+2, \dots, N$ , матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} \right) - \frac{\partial T_1^e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} = Q_{1j}^e, j = s + 1, s + 2, \dots, N$$

або, враховуючи (1.2) і те, що  $\frac{\partial T_1^e}{\partial q_j} = 0$ , отримаємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial i_j} + \sum_{k=s+1}^N R_{jk} i_k + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} = e_j, j = s + 1, s + 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Рівняння Лагранжа-Максвелла електромеханічної системи отримаємо тоді, коли об'єднаємо систему рівнянь (1.1) і (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} &= Q_j, \\ j &= 1, 2, \dots, s, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial i_v} + \sum_{k=s+1}^N R_{vk} i_k + \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_v} &= e_v, \\ v &= s + 1, s + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Неважко помітити, що в своїх міркуваннях Максвелл застосував аналогію “сила - напруга”. Аналогічний вигляд матимуть рівняння у випадку аналогії “сила - струм”:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_m}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_m}{\partial q_j} &= Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2^e}{\partial \dot{U}_v} + \sum_{k=s+1}^N \frac{1}{R_{vk}} \dot{U}_k + \frac{\partial \Pi_2^e}{\partial U_v} &= \frac{di_v}{dt}, \\ v &= s + 1, s + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Аналогії між механічними і електричними величинами, що описують

поведінку системи наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Аналогові величини в електромеханічних системах з одним ступенем вільності

Система	Узагальнена координата	Коефіцієнти диференціальних рівнянь			Кінетична енергія	Потенціальна енергія	Функція розсіювання	Узагальнена сила
		$a$	$\beta$	$c$				
Механічна	$q$	$a$	$\beta$	$c$	$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$	$\Pi = \frac{1}{2} c q^2$	$\Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2$	$Q(t)$
Аналогія «сила-напруга»	$q^e$	$L$	$R$	$\frac{1}{C}$	$T_1^e = \frac{L}{2} (\dot{q}^e)^2$	$\Pi_1^e = \frac{1}{2C} (q^e)^2$	$\Phi_1^e = \frac{R}{2} (\dot{q}^e)^2$	$e(t)$
Аналогія «сила-струм»	$U$	$C$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$T_2^e = \frac{C}{2} \dot{U}^2$	$\Pi_2^e = \frac{1}{2L} U^2$	$\Phi_2^e = \frac{1}{2R} \dot{U}^2$	$\frac{di}{dt}$

Перша система аналогій між механічними і електричними ланцюгами більш "фізична", тому в основному будемо користуватися нею, хоча в деяких випадках застосування другої системи дає більш прості рівняння.

З цієї системи видно, що ЕРС в електричному ланцюзі аналогічна силі, індуктивність аналогічна масі і володіє інерційністю, і енергія, що запасається в магнітному полі, є кінетичну енергію. Конденсатор, аналогічно пружині, запасає енергію, яку логічно вважати потенційною. Активний опір діє аналогічно механічному грузлому опору, і енергія, що виділяється на ньому, розсіюється у вигляді тепла.

Розглянемо застосування аналогій "сила - напруга" для складання рівнянь електричних контурів з багатьма степенями вільності.

Нехай маємо  $N$  електричних контурів, струми яких позначимо  $i_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Елементами електричного кола є: активні елементи - джерела напруги і струму; пасивні елементи - омичні опори, котушки, конденсатори. Узагальнені координати - кількість електрики (заряди)  $q_1^e, q_2^e, \dots, q_N^e$ , узагальнені швидкості – струми  $i_1, i_2, \dots, i_N$ .

Оскільки  $i = \frac{dq^e}{dt} = \dot{q}^e$ , де  $q^e$  – кількість електрики, що пройшла через поперечний

переріз провідника з деякого початкового часу, то енергія магнітного поля такого кола визначається виразом

$$T_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N L_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N L_{jk} \dot{q}_j^e \dot{q}_k^e, \quad (1.4)$$

де  $L_{jk}$  – індуктивності відповідних елементів кола.

Енергія електричного поля кола визначається формулою

$$\Pi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \frac{1}{C_{jk}} q_j^e q_k^e. \quad (1.5)$$

Втрати енергії на джоулеве тепло в колі визначаються функцією розсіювання

$$\Phi_1^e = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N R_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N R_{jk} \dot{q}_j^e \dot{q}_k^e. \quad (1.6)$$

Узагальнена сила, що визначається дією активного елемента - джерела напруги

$$Q_1^e = \sum_{j=1}^N \delta A_j = \sum_{j=1}^N e_j i_j dt = \sum_{j=1}^N e_j dq_j^e.$$

Для механічної системи з  $N$  степенями вільності та голономними в'язями кінетична енергія, потенціальна енергія і функція розсіювання енергії мають вигляд

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} q_j q_k; \\ \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \beta_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $a_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти інерції;  $c_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти жорсткості системи;  $\beta_{jk}$  – узагальнені коефіцієнти розсіювання енергії.

Для механічної системи елементарна робота

$$\delta A = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j.$$

Як відомо, рівняння механічної системи з  $N$  степенями вільності має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

або з урахуванням (1.7)

$$\sum_{j,k=1}^N (a_{jk} \ddot{q}_k + \beta_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (1.8)$$

Для електричної системи матимемо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1^e}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_1^e}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial \dot{q}_j} + e_j, j=1, 2, \dots, N.$$

а з урахуванням (1.4), (1.5) і (1.6) отримаємо

$$\sum_{k=1}^N \left( L_{jk} \ddot{q}_k + R_{jk} \dot{q}_k + \frac{1}{C_{jk}} q_k \right) = e_j, \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (1.9)$$

Рівняння (1.8) описує механічну систему з  $N$  степенями вільності, а (1.9) – коливання  $N$ -контурної електричної системи і виражає другий закон Кірхгофа: алгебрична сума електрорушійної сили ( $e_j$ ) в будь-якому контурі кола дорівнює алгебричній сумі падінь напруг на елементах цього контуру.

У системах (1.8) і (1.9) коефіцієнтам інерції  $a_{jk}$  відповідають індуктивності  $L_{jk}$ ; коефіцієнтам розсіювання енергії  $\beta_{jk}$  – омичні опори  $R_{jk}$ ; коефіцієнтам жорсткості  $c_{jk}$  – інверсні ємності  $\frac{1}{C_{jk}}$ ; узагальненим силам  $Q_j$  – електрорушійні сили  $e_j$ ; узагальненим координатам  $q_j$  – кількість електрики (заряду)  $q_j^e$ .

Для прикладу розглянемо електричний коливальний контур із послідовним з'єднанням елементів. У контурі з послідовним з'єднанням елементів (рис. 1.1, а) пасивні елементи – резистор  $R$ , котушка індуктивності  $L$ , конденсатор ємності  $C$  і активний елемент  $e$  (зовнішнє джерело електрорушійної сили) з'єднані послідовно.

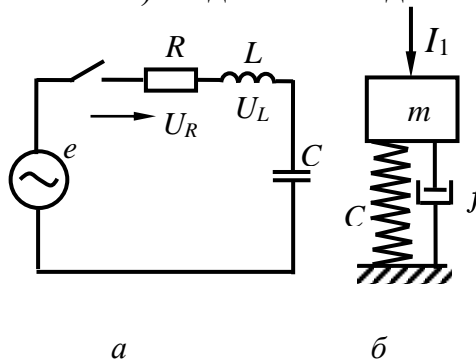


Рисунок 1. 1 – Електричний коливальний контур із послідовним з'єднанням елементів

Згідно з другим законом Кірхгофа, сума падінь напруги на окремих ділянках кола дорівнює різниці потенціалів на кінцях затискачів, тобто електрорушійній силі  $e(t)$  джерела напруги:

$$e(t) = U_R + U_L + U_C. \quad (1.10)$$

Розкриємо вирази  $U_R$ ,  $U_L$  і  $U_C$  в (1.10).

Якщо силу струму в цьому колі позначити через  $i(t)$ , то падіння напруги на резисторі  $R$  визначатиметься згідно з законом Ома  $U_R= Ri$ ; на індуктивності - згідно з законом Фарадея  $U_L = L \frac{di}{dt}$  і на конденсаторі  $U_C = \frac{q^e}{C}$ , де  $q^e$  – заряд конденсатора, який зв'язаний із силою струму і залежністю

$$i = \frac{dq^e}{dt}. \quad (1.11)$$

Отже, вираз (1.10) згідно з другим законом Кірхгофа запишемо у формі

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q^e = e(t), \quad (1.12)$$

або, з урахуванням виразу (1.11), матимемо

$$L \frac{d^2 q^e}{dt^2} + R \frac{dq^e}{dt} + \frac{q^e}{C} = e(t). \quad (1.13)$$

Якщо вираз (1.12) один раз здиференціювати за часом, то він, з урахуванням (1.11), набуде вигляду

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}. \quad (1.14)$$

Як бачимо, рівняння (1.13) і (1.14) є рівняннями коливального руху системи з одним ступенем вільності. Узагальненою координатою в (1.13) виступає заряд конденсатора ( $q=q^e$ ), а в (1.14) – сила струму в контурі ( $q=i$ ). Рівняння коливального руху механічних систем з одним ступенем вільності (рис. 1.1, б) має вигляд

$$a\ddot{q} + \beta \dot{q} + cq = Q(t). \quad (1.15)$$

Очевидно, що рівняння (1.13) - (1.15) мають однакову структуру, тобто вони аналогічні.

Порівнюючи ці рівняння між собою, бачимо, що узагальненому коефіцієнту інерції  $a$  (маса, осьовий момент інерції) механічної системи відповідає індуктивність  $L$ ; узагальненому коефіцієнту розсіювання енергії  $\beta$  (коефіцієнту демпфірування) – опір  $R$ , на якому електрична енергія аналогічно механічній перетворюється на теплоту; узагальненій

жорсткості  $c$  механічної системи відповідає інверсна (обернена) ємність конденсатора  $\frac{1}{C}$ .

Узагальненій силі механічної системи  $Q(t)$  в рівнянні (1.13) відповідає електрорушійна сила  $e(t)$  джерела напруга, а в рівнянні (1.14) – похідна за часом від  $e(t)$  –  $\frac{de}{dt}$ . Тому в цьому випадку говорять про аналогію “сила - напруга”.

Якщо кінетична  $T$  і потенціальна  $\Pi$  енергії та функція розсіювання  $\Phi$  механічної системи з одним ступенем вільності визначаються виразами

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2,$$

то для електричного контуру з послідовним з'єднанням елементів, в якому струм, що протікає в контурі, однаковий на всіх елементах і тому може бути узагальненою координатою; відповідно кінетична (електромагнітна) і потенціальна (електростатична) енергії електричного поля та функція розсіювання енергії мають вигляд

$$\begin{aligned} T_1^e &= \frac{1}{2} L (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} L i^2; \\ \Pi_1^e &= \frac{1}{2} \frac{1}{C} (q^e)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} \left( \int i dt \right)^2; \\ \Phi_1^e &= \frac{1}{2} R (\dot{q}^e)^2 = \frac{1}{2} R i^2. \end{aligned}$$

Узагальнена сила

$$Q_1^e(t) = e(t).$$

## 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТИПОВИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ, ОСЦИЛЯТОРІВ ТА МАЯТНИКІВ

### 2.1 Послідовне ферорезонансне LRC коло з індуктивністю, що залежить від струму [2]

Розглянемо реакцію послідовного LRC ланцюга на підключення постійної входної напруги (рис. 2.1). Мається на увазі ферорезонансний ланцюг з індуктивністю, що залежить від струму [2].

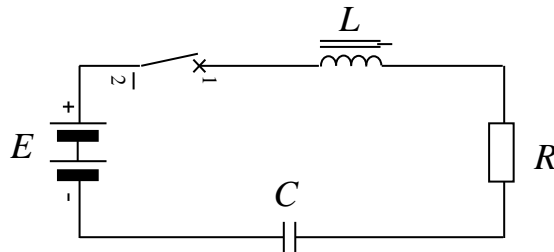


Рисунок 2.1 – LRC ланцюг

Рівняння ланцюга можна записати у вигляді

$$n \frac{d\varphi}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

де  $\varphi$  – магнітний потік сердечника,  $n$  – число витків обмотки сердечника,  $q$  – заряд конденсатора,  $R$  – омичний опір,  $i$  – струм,  $C$  – ємність конденсатора,  $E$  – електрорушійна сила (ЕРС),  $t$  – час. В даному випадку мається на увазі ферорезонансний ланцюг з індуктивністю, що залежить від струму.

Припустимо, що крива намагнічування сердечника визначається рівнянням

$$\varphi = c1 \cdot n \cdot i + c2 \cdot th(n \cdot i), \quad (2.2)$$

де  $c1$  і  $c2$  – постійні, залежні від матеріалу сердечника.

Вводячи чисельні значення параметрів

$$n = 1, R = 0,2, C = 2,5, c1 = 0,08, c2 = 0,4$$

і використовуючи рівняння (2.1) і (2.2), одержуємо

$$\left(1,2 - th^2 \frac{dq}{dt}\right) \frac{d^2 q}{dt^2} + 0,5 \frac{dq}{dt} + q = 2,5E.$$

Лістинг програми Mathcad і результати моделювання у вигляді залежностей заряду і струму від часу, а також фазовий портрет представлені на рис. 2.2.

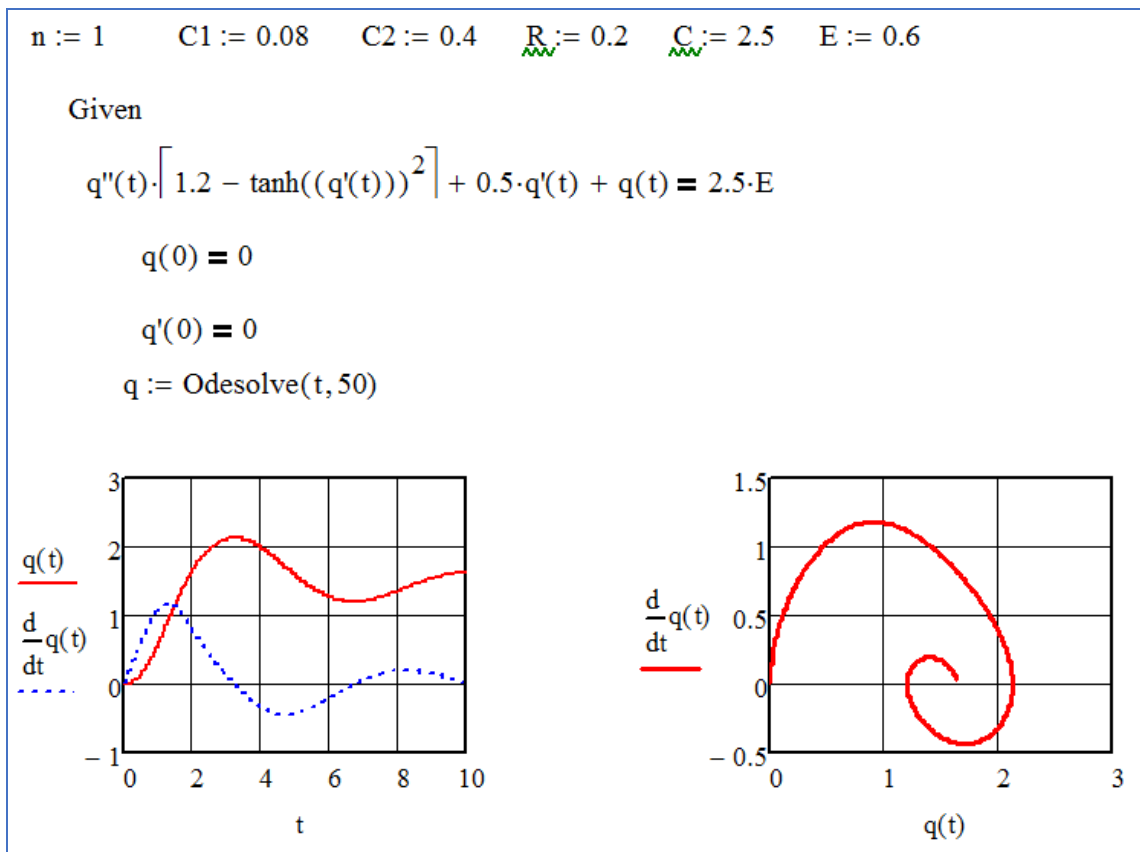


Рисунок 2.2 – Лістинг програми і результати моделювання

Рішення задачі в системі Wolfram Mathematica:

```

Remove[q, t],
удалить символ

sol = NDSolve[{q'[t] * (1.2 - (Tanh[q'[t]])^2) + 0.5 * q'[t] + q[t] == 1.5, q[0] == 0, q'[0] == 0},
численно решить ДУ      | гиперболический тангенс
{q}, {t, 0, 20}]

Out[84]= {{q -> InterpolatingFunction[...], Domain: {0, 20}]]

Plot[Evaluate[{q[t], q'[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
гр... | вычислить      | линии коор... | автоматич... | рамка | истинн

```

Можна отримати рішення списку задач, що відрізняються початковими умовами (рис. 2.3):

```

sol = Table[NDSolve[{q'[t] * (1.2 - (Tanh[q'[t]])^2) + 0.5 * q'[t] + q[t] == 1.5, q[0] == b, q'[0] == 0},
табл... | численно решить ДУ      | гиперболический тангенс
{q}, {t, 0, 10}], {b, 0.0, 0.8, 0.2}]

Plot[Evaluate[q[t] /. sol], {t, 0, 10}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
гр... | вычислить      | линии коор... | автоматич... | рамка | истинн

```



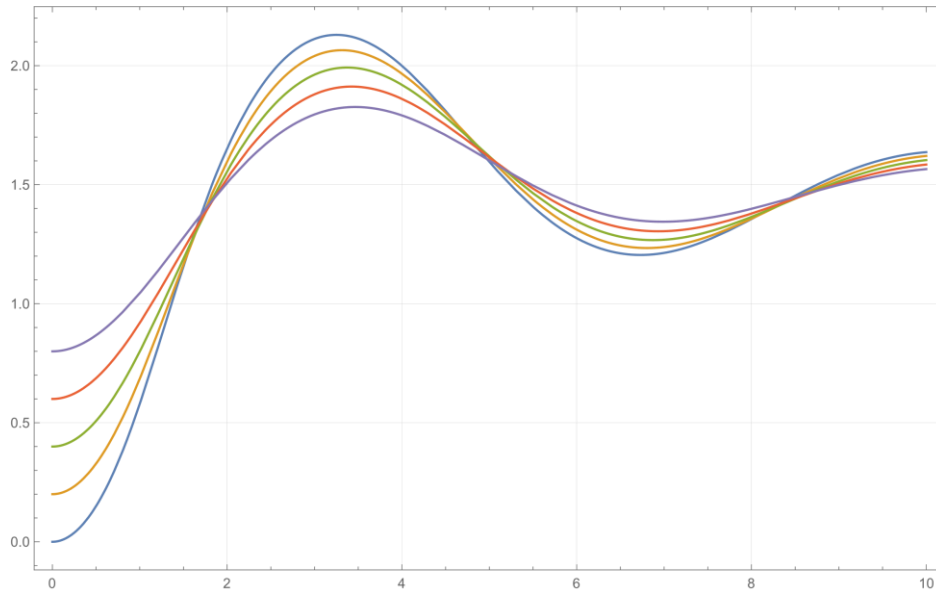


Рисунок 2.3 – Залежність  $q(t)$  від початкових умов.

Аналогічно можна отримати ряд рішень, якщо змінювати будь-який параметр, наприклад –  $E$  (рис. 2.4).

```

In[186]:= sol = Table[NDSolve[{q'[t] * (1.2 - (Tanh[q'[t]])^2) + 0.5 * q'[t] + q[t] == 2.5 * E, q[0] == 0, q'[0] == 0},
{q}, {t, 0, 10}], {E, 0.0, 0.8, 0.2}]
Out[186]= {{0.0, 0.0}, {0.2, 0.2}, {0.4, 0.4}, {0.6, 0.6}, {0.8, 0.8}, {1.0, 1.0}, {1.2, 1.2}, {1.4, 1.4}, {1.6, 1.6}, {1.8, 1.8}, {2.0, 2.0}, {2.2, 2.0}, {2.4, 1.9}, {2.6, 1.8}, {2.8, 1.7}, {3.0, 1.6}, {3.2, 1.5}, {3.4, 1.4}, {3.6, 1.3}, {3.8, 1.2}, {4.0, 1.1}, {4.2, 1.0}, {4.4, 0.9}, {4.6, 0.8}, {4.8, 0.7}, {5.0, 0.6}, {5.2, 0.5}, {5.4, 0.4}, {5.6, 0.3}, {5.8, 0.2}, {6.0, 0.1}, {6.2, 0.0}, {6.4, 0.0}, {6.6, 0.0}, {6.8, 0.0}, {7.0, 0.0}, {7.2, 0.0}, {7.4, 0.0}, {7.6, 0.0}, {7.8, 0.0}, {8.0, 0.0}, {8.2, 0.0}, {8.4, 0.0}, {8.6, 0.0}, {8.8, 0.0}, {9.0, 0.0}, {9.2, 0.0}, {9.4, 0.0}, {9.6, 0.0}, {9.8, 0.0}, {10.0, 0.0}}
In[187]:= Plot[Evaluate[q[t] /. sol], {t, 0, 10}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
Out[187]= {{0.0, 0.0}, {0.2, 0.2}, {0.4, 0.4}, {0.6, 0.6}, {0.8, 0.8}, {1.0, 1.0}, {1.2, 1.2}, {1.4, 1.4}, {1.6, 1.6}, {1.8, 1.8}, {2.0, 2.0}, {2.2, 2.0}, {2.4, 1.9}, {2.6, 1.8}, {2.8, 1.7}, {3.0, 1.6}, {3.2, 1.5}, {3.4, 1.4}, {3.6, 1.3}, {3.8, 1.2}, {4.0, 1.1}, {4.2, 1.0}, {4.4, 0.9}, {4.6, 0.8}, {4.8, 0.7}, {5.0, 0.6}, {5.2, 0.5}, {5.4, 0.4}, {5.6, 0.3}, {5.8, 0.2}, {6.0, 0.1}, {6.2, 0.0}, {6.4, 0.0}, {6.6, 0.0}, {6.8, 0.0}, {7.0, 0.0}, {7.2, 0.0}, {7.4, 0.0}, {7.6, 0.0}, {7.8, 0.0}, {8.0, 0.0}, {8.2, 0.0}, {8.4, 0.0}, {8.6, 0.0}, {8.8, 0.0}, {9.0, 0.0}, {9.2, 0.0}, {9.4, 0.0}, {9.6, 0.0}, {9.8, 0.0}, {10.0, 0.0}}

```

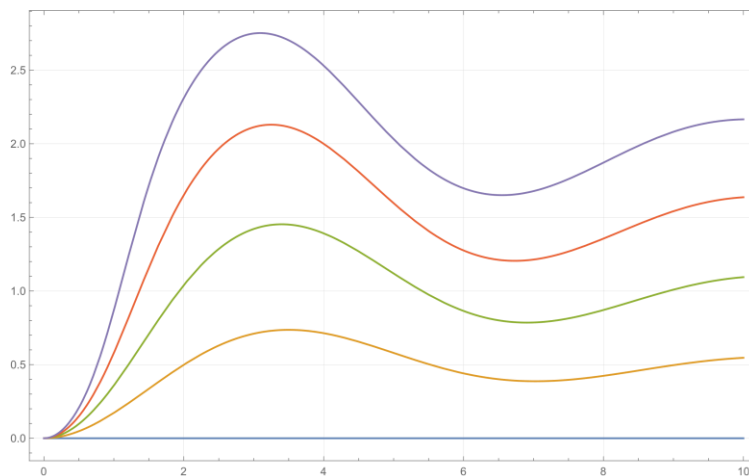


Рисунок 2.4 – Залежність  $q(t)$  від параметру  $E$ .

Можна побудувати параметричну поверхню, наприклад, залежності  $q(t)$  від початкових умов  $q(0)$  і часу  $t$  (рис. 2.5):

```

In[194]:= sol = ParametricNDSolveValue[{q'[t] * (1.2 - (Tanh[q'[t]])^2) + 0.5 * q'[t] + q[t] == 1.5,
q[0] == a, q'[0] == 0}, q, {t, 0, 10}, {a}]
Out[194]= ParametricFunction[Expression: q, Parameters: {a}]
In[195]:= Plot3D[sol[a][t], {a, 0., 1.}, {t, 0, 10}]
Out[195]= {{0.0, 0.0}, {0.2, 0.2}, {0.4, 0.4}, {0.6, 0.6}, {0.8, 0.8}, {1.0, 1.0}, {1.2, 1.2}, {1.4, 1.4}, {1.6, 1.4}, {1.8, 1.3}, {2.0, 1.2}, {2.2, 1.1}, {2.4, 1.0}, {2.6, 0.9}, {2.8, 0.8}, {3.0, 0.7}, {3.2, 0.6}, {3.4, 0.5}, {3.6, 0.4}, {3.8, 0.3}, {4.0, 0.2}, {4.2, 0.1}, {4.4, 0.0}, {4.6, 0.0}, {4.8, 0.0}, {5.0, 0.0}, {5.2, 0.0}, {5.4, 0.0}, {5.6, 0.0}, {5.8, 0.0}, {6.0, 0.0}, {6.2, 0.0}, {6.4, 0.0}, {6.6, 0.0}, {6.8, 0.0}, {7.0, 0.0}, {7.2, 0.0}, {7.4, 0.0}, {7.6, 0.0}, {7.8, 0.0}, {8.0, 0.0}, {8.2, 0.0}, {8.4, 0.0}, {8.6, 0.0}, {8.8, 0.0}, {9.0, 0.0}, {9.2, 0.0}, {9.4, 0.0}, {9.6, 0.0}, {9.8, 0.0}, {10.0, 0.0}}

```

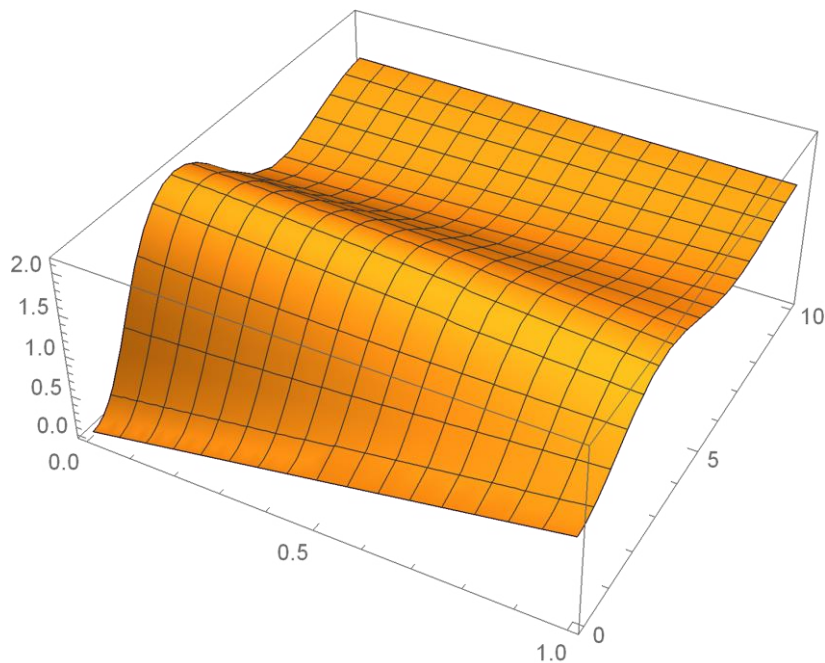


Рисунок 2.5 – Залежність  $q(t)$  від початкових умов  $q(0)$  і часу  $t$ .

Для порівняння розглянемо розв’язання цієї задачі в пакеті Maple.

Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей заряду і сили струму від часу, а також фазовий портрет представлені на рисунках 2.6 ... 2.8.

```

> restart;
> #Перший варіант вихідних даних
> n := 1 : R := 0.2 : C := 2.5 : c1 := 0.08 : c2 := 0.4 : E := 0.6 :
> #Числене рішення диференційного рівняння
> eqs := diff(q(t), t) = p(t), diff(p(t), t) · (1.2 - (tanh(p(t)))2)
+ 0.5 · p(t) + q(t) = 1.5;
eqs :=  $\frac{d}{dt} q(t) = p(t), \left( \frac{d}{dt} p(t) \right) (1.2 - \tanh(p(t))^2) + 0.5 p(t) + q(t) = 1.5$ 
> F := dsolve({eqs, q(0) = 0, p(0) = 0.5}, {q(t), p(t)},
numeric, stiff = true);
F := proc(x_rosenbrock) ... end proc
> F(1);
[t = 1., p(t) = 1.26661556579710144, q(t) = 1.02579874445920938]

> with(plots) :
> odeplot(F, [t, q(t)], 0 .. 30, numpoints = 1500, title = 'Залежність заряду від часу',
thickness = 2, gridlines = true, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

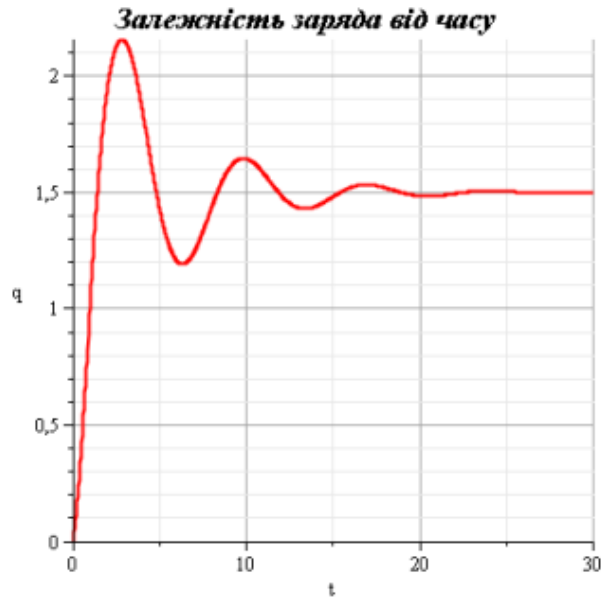


Рисунок 2.6 – Залежність заряду конденсатора ( $q$ ) від часу  $t$ .

```
> odeplot(F, [t, p(t)], 0..30, numpoints = 1500, title = 'Залежність сили струму від часу', color = blue, thickness = 2, gridlines = true, titlefont = [TIME, bold, 16]);
```



Рисунок 2.7 – Залежність сили струму ланцюга ( $p$ ) від часу  $t$ .

```
> #Побудова фазового портрета
> odeplot(F, [q(t), p(t)], 0..30, numpoints = 1500, title = 'Фазовий портрет', thickness = 2, gridlines = true, titlefont = [TIME, bold, 16]);
```



Рисунок 2.8 – Фазовий портрет в координатах сила струму ланцюга ( $p$ ) - заряд конденсатора ( $q$ ).

## 2.2. Осцилятор Уеди [2]

Розглянемо нелінійний осцилятор під періодичним зовнішнім впливом. При наявності зовнішнього періодичного впливу в рівняннях коливань з'являються члени, що містять явну залежність від часу, і нелінійний осцилятор перетворюється в неавтономну систему, яка може демонструвати складну динаміку і перехід до хаосу. Якщо припустити, що нелінійна залежність відновлюваної сили для осцилятора має вигляд  $f(x)$ , а сила тертя пропорційна швидкості, то приходимо до рівняння

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = a \sin \omega t, \quad (2.3)$$

де  $\gamma$  – параметр дисипації,  $a$  й  $\omega$  задають частоту і амплітуду впливу.

Інший варіант – параметричне збудження, коли ми маємо періодичну залежність коефіцієнта в рівнянні від часу:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + a \sin \omega t) f(x) = 0.$$

Прикладами можуть служити маятник з довжиною нитки, що періодично змінюється і нелінійний LCR-контур, в якому періодичним чином змінюють у часі ємність або індуктивність.

Як при силовому, так і при параметричному збудженні нелінійного дисипативного осцилятора, на площині параметрів зазвичай представлені області різних за характером періодичних і хаотичних режимів, біфуркації подвоєння періоду, складки, зборки і «перехрестя».

Прикладом може служити система типу (2.3) з кубічною нелінійною функцією  $f(x)=x^3$ . Її називають осцилятором Дуффінга або осцилятором Уеди. Механічна система, описувана рівнянням Дуффінга із зовнішнім

періодичним впливом представлена на рис. 2.9 [2]. Шарик закріплений на встановленій вертикально пружній пластині, причому коефіцієнт пружності підібраний так, що при малих кутах відхилення повертаюча сила пружності в точності компенсує відхиляючий момент сили тяжіння. Осцилятор Уеді може бути реалізований так само у вигляді електричної схеми – коливального контуру з нелінійною індуктивністю.

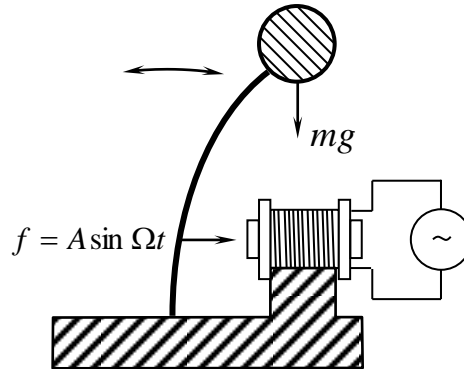


Рисунок 2.9 – Осцилятор Уеді

Лістинг програми:

```

a := 2      gamma := 0.1      nu := 0.5

Given

x''(t) + gamma * x'(t) + x(t)^3 = a * sin(nu * t)

x(0) = 0.0001    x'(0) = 0.0001    t := 0, 0.01 .. 10

x := Odesolve(t, 10)

v(t) := d/dt x(t)
    
```

Нижче на рисунках 2.10-2.12 наведено графіки, що моделюють рішення рівняння (2.3) при  $f(x)=x^3$ . Тут прийнято:  $a = 2$ ,  $\gamma = 0,1$ ,  $\nu = 0,5$ ,  $\nu = dx/dt$ .

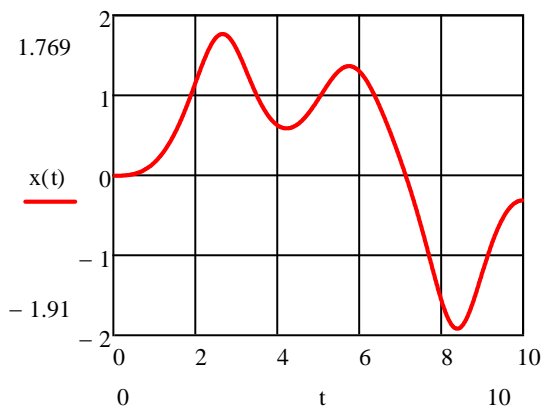


Рисунок 2.10 – Залежність координати  $x$  від часу

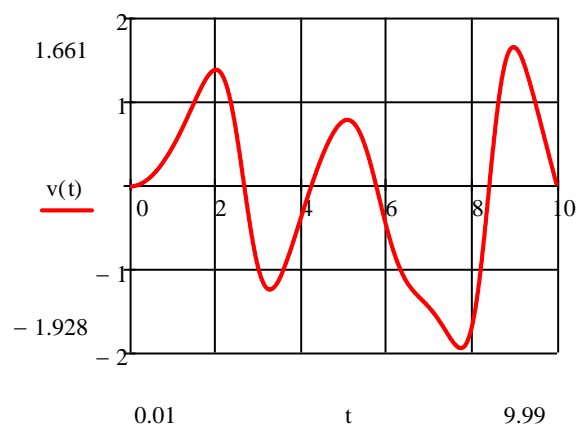


Рисунок 2.11 – Залежність швидкості від часу

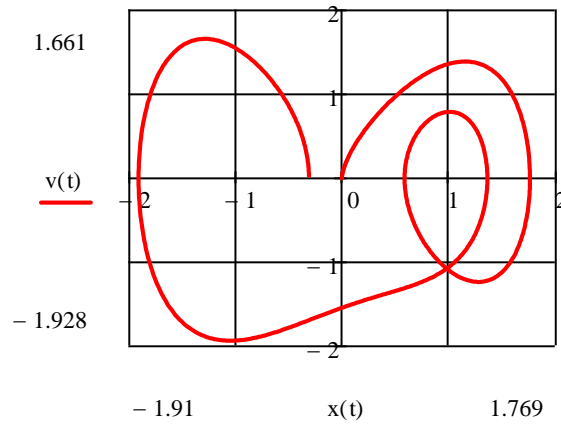


Рисунок 2.12 – Фазовий портрет в координатах  $v(t)$ - $x(t)$

Можна виконати моделювання із змінними параметрами але без програмування. В якості змінних візьмемо параметри  $a = (0,5, 1,0, 1,5, 2,0)$  і  $v = (0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5)$ . Лістинг програми:

```

γ := 0.1
Given

x''(t) + γ · x'(t) + x(t)3 = a · sin(v · t)
x(0) = 0.0001   x'(0) = 0.0001   t := 0, 0.01 .. 10
sol(a, v) := Odesolve(t, 10)

X1 := sol(0.5, 0.1)      V1(t) := d/dt X1(t)   X2 := sol(1.0, 0.1)      V2(t) := d/dt X2(t)
X3 := sol(1.5, 0.1)     V3(t) := d/dt X3(t)   X4 := sol(2.0, 0.1)     V4(t) := d/dt X4(t)
X5 := sol(2.0, 0.2)     V5(t) := d/dt X5(t)   X6 := sol(2.0, 0.3)     V6(t) := d/dt X6(t)
X7 := sol(2.0, 0.4)     V7(t) := d/dt X7(t)   X8 := sol(2.0, 0.5)     V8(t) := d/dt X8(t)

```

На рисунках 2.13...2.15 наведено графіки, аналогічні рисункам 2.10...2.12.

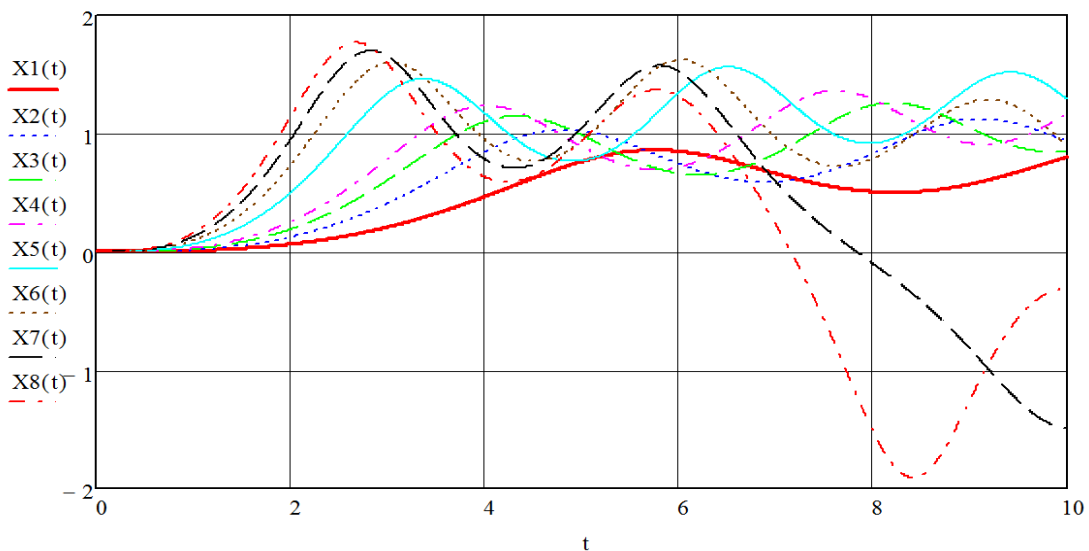


Рисунок 2.13 – Залежність координати  $x$  від часу

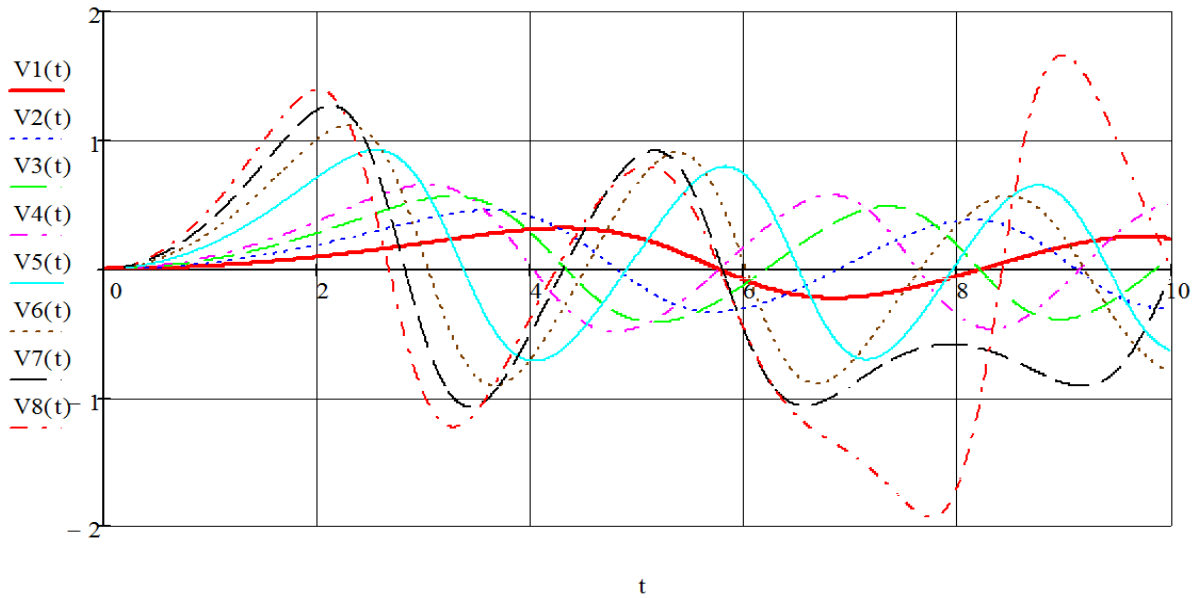


Рисунок 2.14 – Залежність швидкості від часу

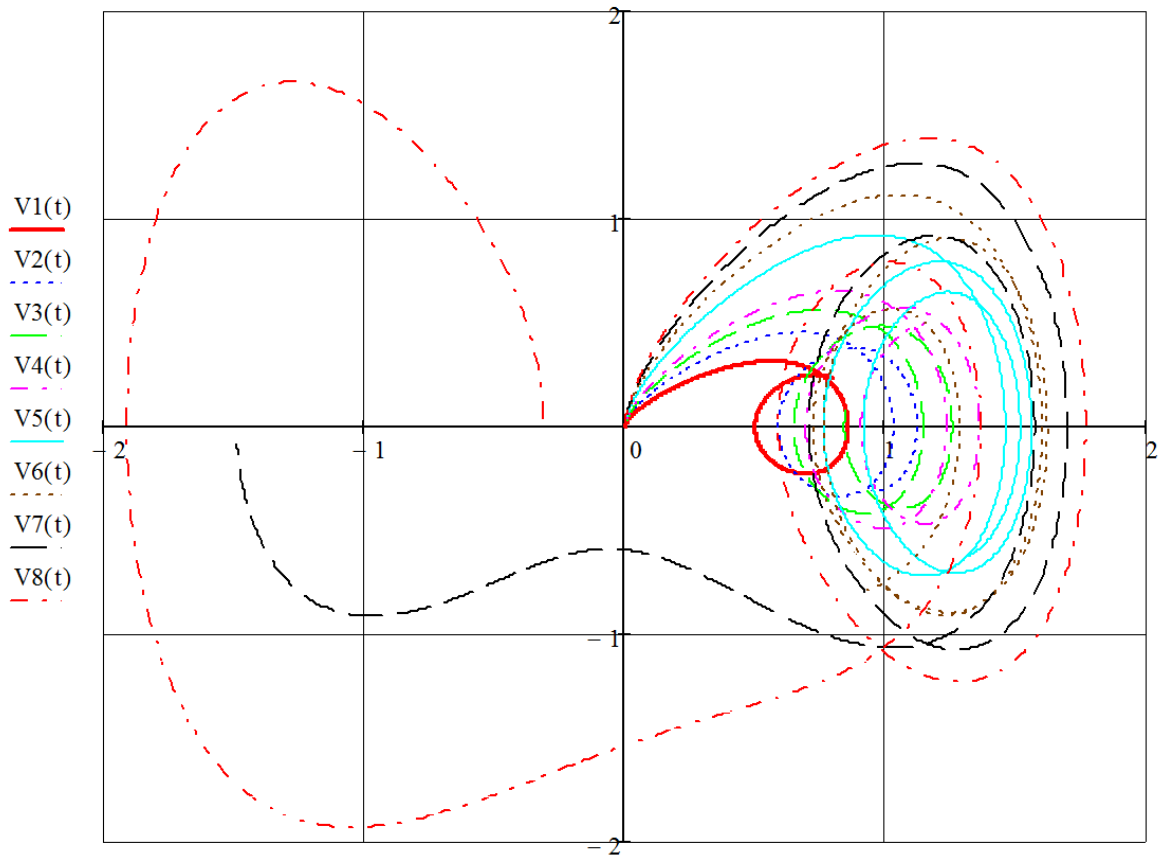


Рисунок 2.15 – Фазовий портрет в координатах  $v(t)$ - $x(t)$

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в пакеті Maple.

Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей руху і швидкості тіла від часу, а також фазовий портрет представлені на рисунках 2.16...2.18.

```

> restart,
> with(plots) :
> a := 2 : b := 0.1 : ω := 0.5 : # f(x) = x3 :
> #Чисельне рішення диференціального рівняння
#руху тіла
> sys := diff(x(t), t) = p(t), diff(p(t), t) = -b·diff(x(t), t) - x(t)3
+ a·sin(ω·t) :
> fcn := [x(t), p(t)] :
> dsol := dsolve({sys, x(0) = 1.0, p(0) = 0},
fcn, numeric, output = listprocedure);
dsol := [t = proc(t) ... end proc, x(t) = proc(t) ... end proc, p(t) = proc(t) ... end proc]

```

```

> #Побудова графіка руху тіла
> odeplot(dsol, [t, x(t)], 0..15, numpoints = 500, title = 'Залежність координати
тіла від часу', titlefont = [TIME, bold, 16]);

```



Рисунок 2.16 – Залежність координати  $x$  від часу

```

> #Побудова графіка швидкості тіла
> odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..15, numpoints = 500, title = 'Залежність швидкості
тіла від часу', titlefont = [TIME, bold, 16], color = blue, thickness = 2);

```



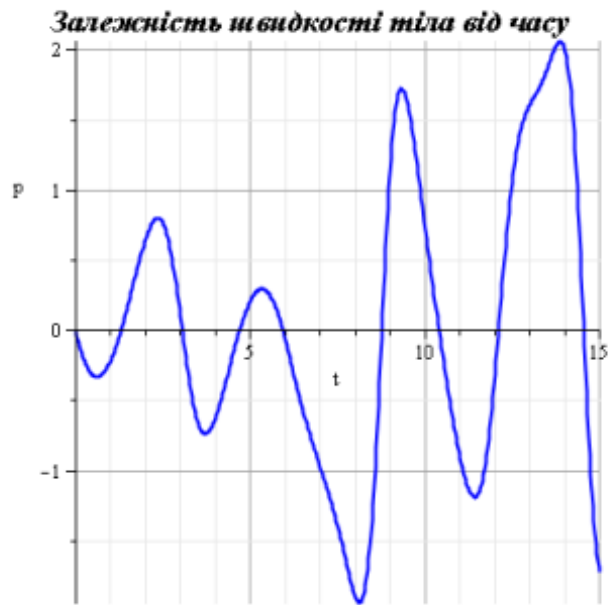


Рисунок 2.17 – Залежність швидкості ( $p$ ) від часу ( $t$ ).

### Побудова фазового портрета

```

> with(DEtools) :
> phaseportrait( [D(x)(t) = p(t), D(p)(t) = -b·p(t) - x(t)3 + a·sin(ω·t)],
[x(t), p(t)], t = 0..10, [[x(0) = 0, p(0) = 0], [x(0) = -1.0, p(0) = 0]],
stepsize = 0.05, linecolor = [blue, red], thickness = 2, scene = [x, p],
title = 'Нелінійний осцилятор - фазовий портрет', titlefont = [TIME, bold, 16] );

```

### Нелінійний осцилятор – фазовий портрет

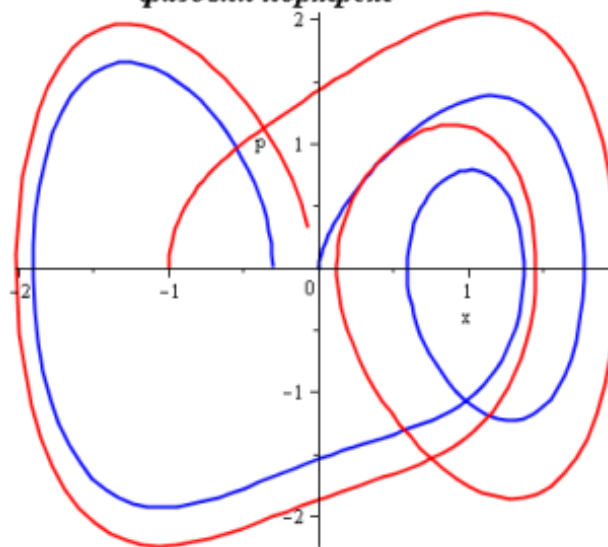


Рисунок 2.18 – Фазовий портрет в координатах швидкість ( $p$ ) – переміщення ( $x$ )

### 2.3. Маятник Дубошинського [2]

Розглянемо маятник Дубошинського (рис. 2.19) – механічний маятник, що здійснює незгасаючі квазі-власні коливання за рахунок взаємодії з високочастотним змінним магнітним полем [2]. Цей ефект був відкритий братами Данилом і Яковом Дубошинськими в 1968-1969 роках.

Маятник Дубошинського складається з двох взаємодіючих частин:

- механічного маятника з власної низькою частотою, з невеликим постійним магнітом, прикріпленим до його нижнього кінця;
- нерухомого електромагніту, що знаходиться під точкою рівноваги траєкторії маятника і живиться змінним струмом з частотою від десятків до тисяч герц.

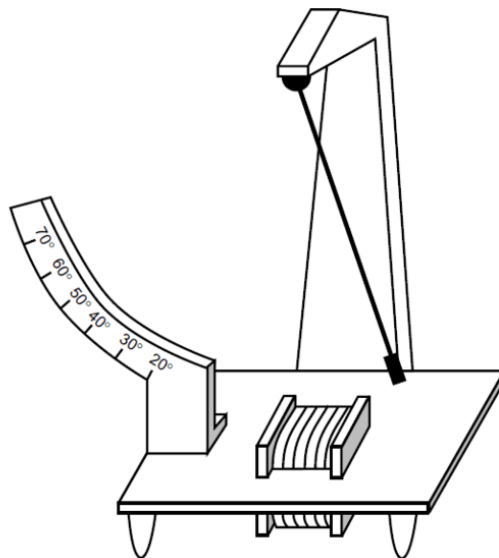


Рисунок 2.19 – Маятник Дубошинського

Постійний магніт на кінці маятника взаємодіє з магнітним полем соленоїда тільки на обмеженій частині траєкторії маятника над соленоїдом. Ця просторова неоднорідність взаємодії дозволяє маятнику регулювати свій обмін енергією з магнітним полем. Загасаючий рух маятника, спочатку відпущеного з будь-якого положення, може перейти в стійке, близьке до періодичного. При такому русі маятник за один або за кілька періодів коливань витягує з взаємодії з електромагнітом порцію енергії, в точності компенсуючи втрати на тертя за цей же час. Стійкість коливань підтримується самопідстроюванням фазового співвідношення між маятником і високочастотним полем.

Амплітуда коливань, що встановилися, приймає одне стаціонарне значення з дискретної безлічі значень, можливих для даної частоти живлення електромагніту. Квантовані амплітуди практично не залежать від сили змінного струму, що живить електромагніт. У той же час амплітуди вельми чутливі до змін частоти цього струму. Чим вище ця частота, тим більше кількість квантованих амплітуд, які здатний реалізувати маятник.

Рівняння коливань розглянутого маятника при досить малих відхиленнях від положення рівноваги має вигляд

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1 - \gamma x^2)x = f(x, t), \quad (2.4)$$

де  $f(x, t)$  – сила взаємодії між маятником і електромагнітом.

У рівнянні (2.4) збережені лінійний і кубічний члени в поворотальній силі. Облік нелінійних членів вищого порядку не вносить нічого принципово нового в результати.

Для простоти припустимо, що сила взаємодії має вигляд

$$f(x, t) = A \cos \omega t \quad \text{при } |x| \leq b,$$

$$= 0 \quad \text{при } |x| > b,$$

тобто

$$f(x, t) = \mathcal{G}(b+x)\mathcal{G}(b-x)A \cos \omega t,$$

де  $\mathcal{G}(z)$  – функція Хевісайда.

Будемо розглядати такі режими коливань маятника, для яких амплітуда  $a$  багато більше інтервалу взаємодії  $b$ .

Для прикладу розглянуто випадок з наступними параметрами:  $a = 6$ ,  $b = 0.4$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\omega_0 = 1.5$ ,  $\omega = 4$ .

Лістинг програми Mathcad і результати моделювання представлені на рисунках 2.20...2.23. Тут  $v(t) = dx(t)/dt$ .

```

b := 0.4  δ := 0.3  ω0 := 1.5  γ := 0.2  ω := 4  A := 6

Given

x''(t) + 2 · δ · x'(t) + ω0^2 · (1 - γ · x(t)^2) · x(t) = A · cos(ω · t) · (|x(t)| ≤ b) + 0 · (|x(t)| > b)

x(0) = 0.0001  x'(0) = 0.0001  t := 0, 0.01 .. 20

x := Odesolve(t, 20)  v(t) := d/dt x(t)
    
```

Рисунок 2.20 – Лістинг програми Mathcad.

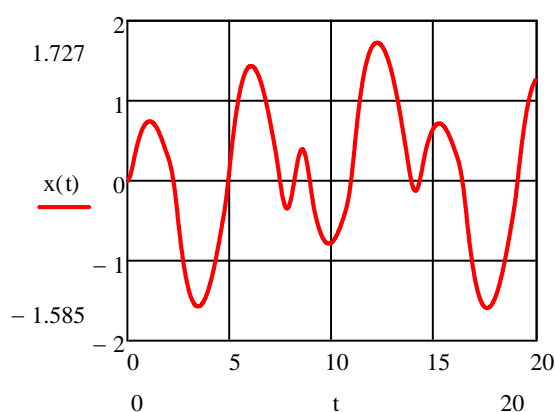


Рисунок 2.21 – Залежність координати  $x$  від часу

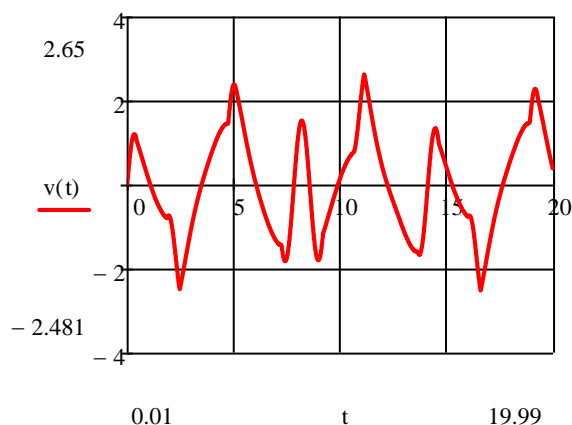


Рисунок 2.22 – Залежність швидкості від часу

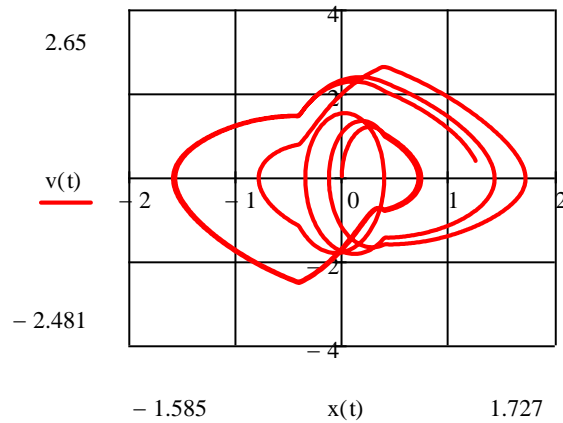


Рисунок 2.23 – Фазовий портрет.

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в пакеті Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей переміщення магніту маятника і його швидкості від часу, а також фазовий портрет представлені на рисунках 2.24...2.26.

```

=
> restart;
=
> with(plots) :
=
> a := 6 : b := 0.4 : delta := 0.3 : mu := 0.2 : omega := 4 : omega0 := 1.5 :
=
> #Вводимо функцію fB, яка залежить від деякої
=
> #змінної y
=
> fB := y -> piecewise(y <= 0, 1, y > 0, 0) :
=
> #Чисельне рішення диференційного рівняння
=
> #руху тіла
=
> sys := diff(x(t), t) = p(t), diff(p(t), t) + 2 * delta * p(t) + omega0^2 *
=
> (1 - mu * x(t)^2) * x(t) = fB(|x(t)| - b) * a * cos(omega * t) :
=
> fcn := [x(t), p(t)] :
=
> dsol := dsolve({sys, x(0) = 0.0001, p(0) = 0.0001},
=
> fcn, numeric, output = listprocedure) :
=
> #Побудова графіка руху магніта маятника
=
> odeplot(dsol, [t, x(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Залежність
=
> переміщення магніта від часу', gridlines = true, thickness = 2,
=
> titlefont = [TIME, bold, 16] );

```

**Залежність переміщення магніта від часу**

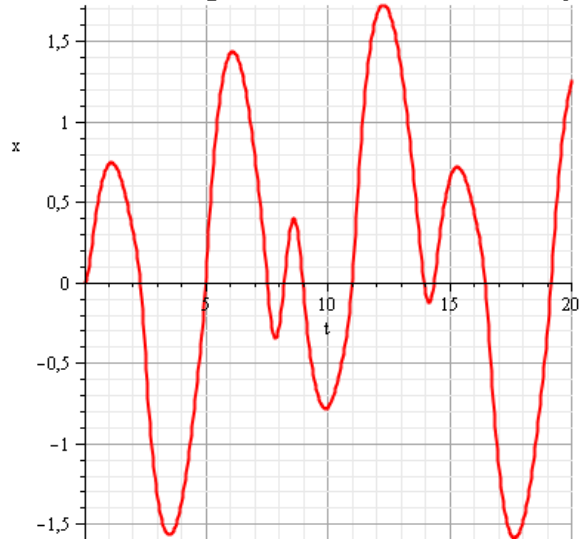


Рисунок 2.24 – Залежність переміщення магніту маятника ( $x$ ) від часу  $t$ .

```
=  
> #Побудова графіка зміни швидкості магніта маятника  
> odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Зміна швидкості  
магніта від часу', color = blue, gridlines = true, thickness = 2,  
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

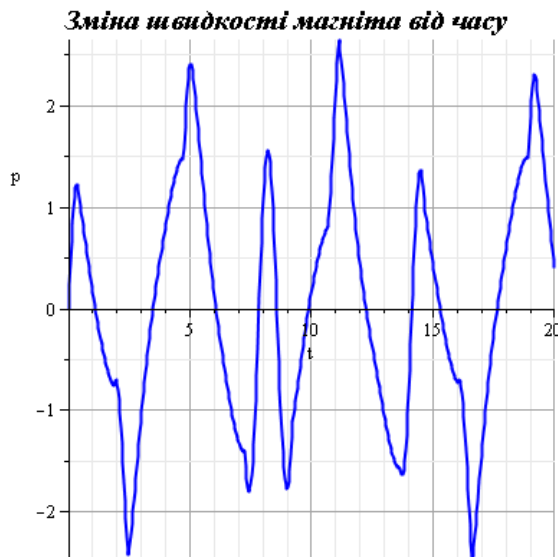


Рисунок 2.25 – Залежність швидкості магніту ( $p$ ) від часу  $t$ .

```
=  
> #Побудова фазового портрету  
> odeplot(dsol, [x(t), p(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Фазовий  
– портрет переміщення магніта – швидкість магніта',  
gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

### Фазовий портрет

- переміщення магніта
- швидкість магніта

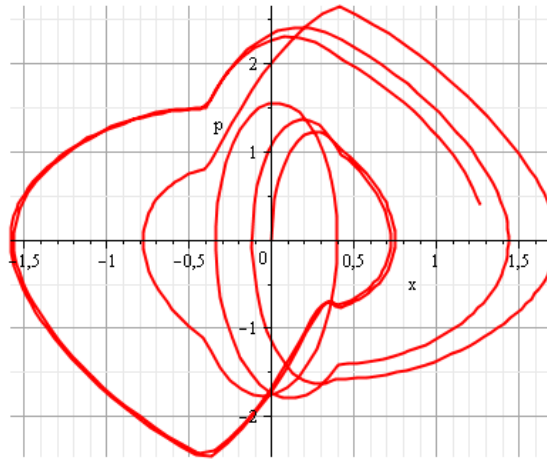


Рисунок 2.26 – Фазовий портрет: переміщення магніту ( $x$ ) – швидкість переміщення магніту ( $p$ )

## 2.4 Електростатичний осцилятор

Розглянемо динаміку електростатичного маятника (рис. 2.27) з урахуванням сил тертя. Вантажом в математичному маятнику служить електрично заряджена куля. Математичний електростатичний маятник спільно з провідною заземленою пластинною утворюють бістабільний осцилятор.

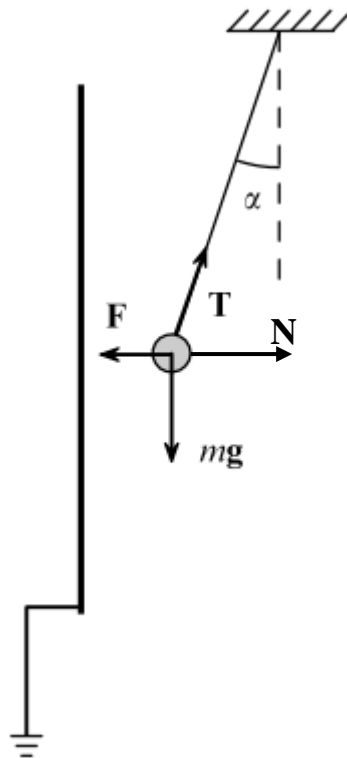


Рисунок 2.27 – Електростатичний маятник

Рівняння руху фізичного маятника:  $I\ddot{\alpha} = \sum_i M_e$ , де  $I$  – момент інерції маятника щодо осі обертання,  $M_e$  – моменти зовнішніх сил, що діють на нього. У нашому випадку можна записати

$$I\ddot{\alpha} = Fbc \cos \alpha - mga \sin \alpha - \gamma \dot{\alpha}. \quad (2.5)$$

Останній доданок в правій частині (2.5) являє собою момент сили тертя, пропорційний кутовий швидкості. Сила Кулона, діюча на кульку з боку його зображення в провідній пластині:

$$F = \frac{kq^2}{4(L - b \sin \alpha)^2} = \frac{kq^2}{4b^2(\tilde{L} - \sin \alpha)^2}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{b}.$$

(Далі знак тильда опускаємо). Наведемо рівняння руху до безрозмірного вигляду, поділивши обидві його частини на  $mga$ , а одиницю виміру часу виберемо так, щоб коефіцієнт при  $\ddot{\alpha}$  дорівнював одиниці:  $[t] = \sqrt{I/(mga)}$ . В остаточному вигляді рівняння руху маятника буде таким:

$$\ddot{\alpha} + \beta \dot{\alpha} + \sin \alpha - \frac{Q^2 \cos \alpha}{(L - \sin \alpha)^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$Q^2 = \frac{kq^2}{4mgab}, \quad \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{I m g a}}.$$

Знайдемо чисельний розв'язок рівняння (2.6) у пакеті Matlab. Для цього зведемо це диференційне рівняння другого порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Введемо позначення  $y_1 = \alpha$ ,  $y_2 = \dot{\alpha}$ , тоді рівняння (2.6) буде еквівалентно системі

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \beta y_2 - \sin y_1 + \frac{Q^2 \cos y_1}{(1 - \sin y_1)^2} \end{cases}$$

В якості початкових умов візьмемо  $\alpha(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

Програма розв'язку цієї системи у Matlab буде мати вигляд

```
Файл fun.m
function F=fun(x,y,beta,Q,L)
F=[y(2);-beta*y(2)-sin(y(1))+Q^2*cos(y(1))/(L-sin(y(1))^2)];

Файл oscillator.m
hold on;
Y0=[0.3;0];
bt=[0.2 0.3 0.4 0.5];
for i=1:4
[T,Y]=ode45(@(t,y) fun(t,y,bt(i),2,3),[0 50],Y0);
plot(T,Y(:,1));
```

```

end
grid on;hold off;
title('Залежність кута відхилення \alpha від часу t')
xlabel('t');
ylabel('\alpha');
legend('beta=0.2','beta=0.3','beta=0.4','beta=0.5');
figure;
hold on;
Y0=[0.3;0];
Q=[0 3 6 9];
for i=1:4
[T,Y]=ode45(@(t,y) fun(t,y,0.2,Q(i),3),[0 50],Y0);
plot(T,Y(:,1));
end
grid on;hold off;
title('Залежність кута відхилення \alpha від часу t')
xlabel('t');
ylabel('\alpha');
legend('Q=0','Q=3','Q=6','Q=8');
figure;
hold on;
Y0=[0.3;0];
L=[3 5 7 9];
for i=1:4
[T,Y]=ode45(@(t,y) fun(t,y,0.2,2,L(i)),[0 50],Y0);
plot(T,Y(:,1));
end
grid on;hold off;
title('Залежність кута відхилення \alpha від часу t')
xlabel('t');
ylabel('\alpha');
legend('L=2','L=4','L=7','L=9');

```

Графік залежності кута відхилення маятника  $\alpha$  в момент часу  $t$  від положення рівноваги показано на рис. 2.28...2.30

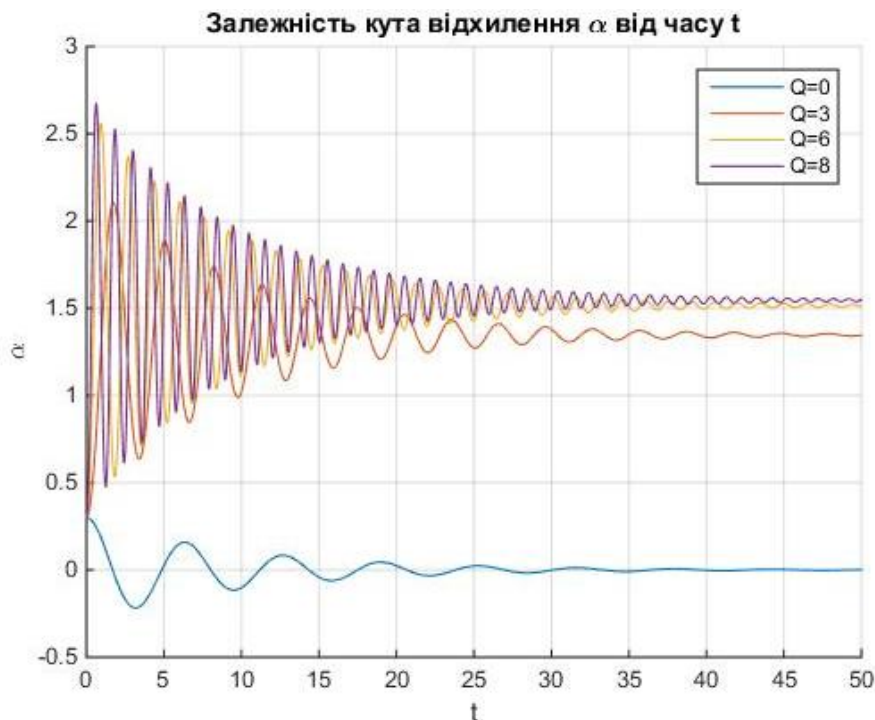


Рисунок 2.28 – Залежність кута відхилення  $\alpha$  від часу  $t$  для різних значень параметру  $Q$  ( $Q=0, 3, 6, 8$ ).



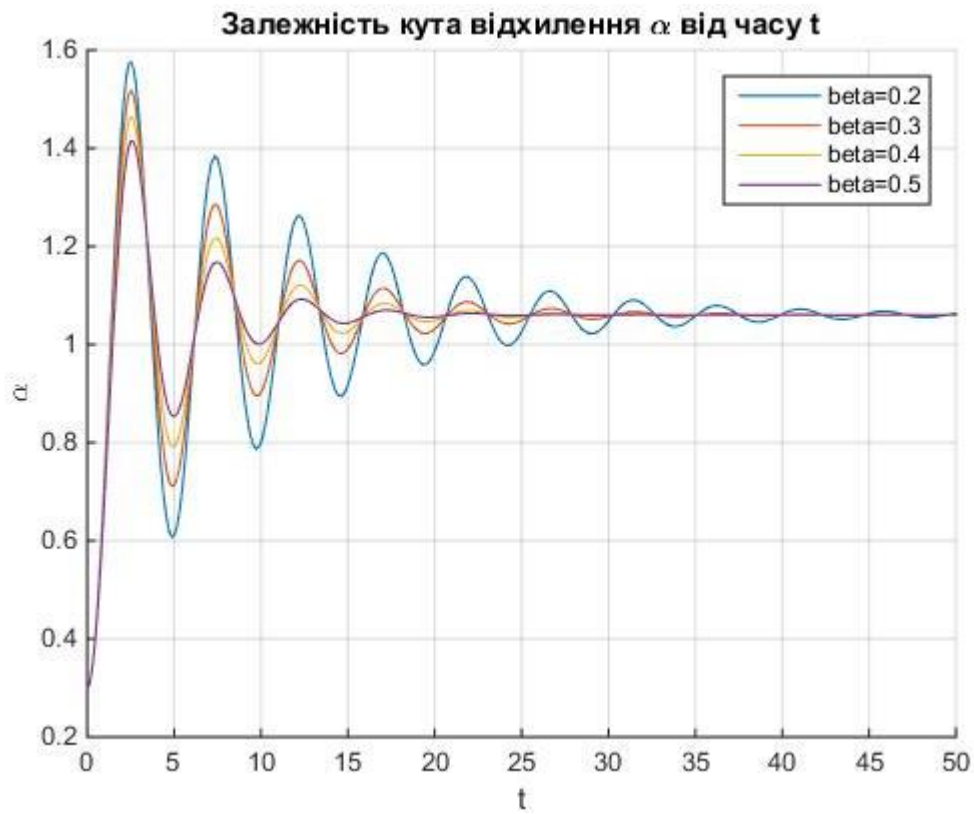


Рисунок 2.29 – Залежність кута відхилення  $\alpha$  від часу  $t$  для різних значень параметру  $\beta$  ( $\beta=0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ ).

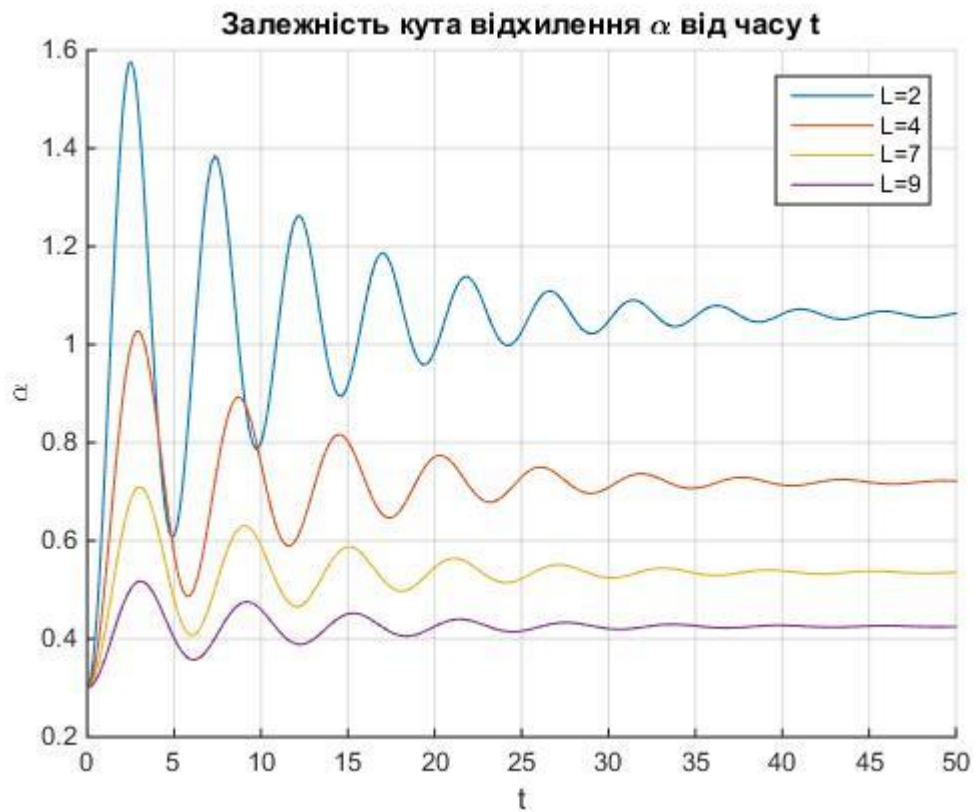


Рисунок 2.30 – Залежність кута відхилення  $\alpha$  від часу  $t$  для різних значень  $L$  ( $L=2, 4, 7, 9$ )

З рис. 2.28 видно, що при  $Q=0$  зі зростанням  $t$  коливання згасають і значення кута відхилення  $\alpha$  прямує до нуля. Якщо  $Q$  відрізняється від нуля, то зі зростанням  $t$  амплітуда коливань зменшується, але значення кута відхилення  $\alpha$  прямує до сталої величини, яка зростає зі зростанням  $Q$ . Зі зростанням  $Q$  також зменшується період коливань.

При зростанні параметра  $\beta$  зменшується амплітуда коливань, але період коливань і величина сталої, до якої прямує кут відхилення  $\alpha$  при зростанні  $t$ , не змінюється, що видно з рис. 2.29.

На рис.2.30 показана залежність кута відхилення  $\alpha$  від часу  $t$  для різних значень  $L$ , з якої видно, що збільшення параметру  $L$  призводить до зменшення амплітуди коливань і величини сталої, до якої прямує кут відхилення  $\alpha$  при зростанні часу  $t$ .

## 2.5 Маятник в швидкозмінному магнітному полі [2]

Як приклад електромеханічної системи в змінному магнітному полі розглянемо маятникову систему [2], роль твердого тіла в якій грає замкнутий контур струму, жорстко з'єднаний з підвісом невагомим стрижнем (рис. 2.31).

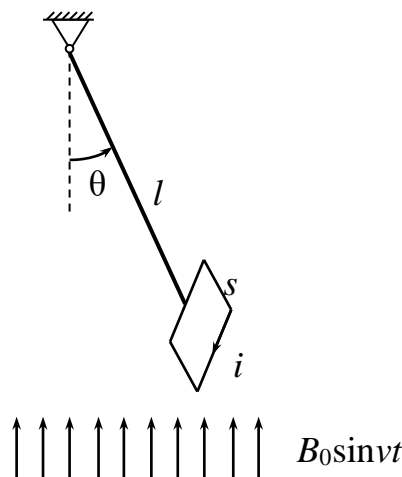


Рисунок 2.31 – Маятникова система в змінному магнітному полі

Припустимо, що маятник знаходиться в змінному магнітному полі, частота якого  $\nu$  багато більше, ніж частота малих вільних коливань маятника. Позначимо  $\theta$  кут відхилення маятника від вертикальної осі, приймаючи, що  $\theta = 0$  відповідає його нижньому положенню. Вирази для кінетичної енергії  $T$ , енергії магнітного поля  $W$  і потенційної енергії  $\Pi$  мають вигляд

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, W = \frac{1}{2} Li^2 + B_0 S \sin \nu t \sin \theta i, \Pi = mgl(1 - \cos \theta),$$

де  $I$  – момент інерції контуру щодо осі, що проходить через точку підвісу;  $m$  – маса контуру;  $l$  – довжина стрижня;  $L$  – коефіцієнт самоіндукції контуру струму  $i$ ;  $B_0$  – амплітуда зовнішнього поля.

Рівняння Лагранжа-Максвелла досліджуваної електромеханічної системи:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} - B_0 S \sin \nu t \cos \theta i + mgl \sin \theta &= 0, \\ Li + B_0 S \sin \nu t \cos \theta \dot{\theta} + B_0 S \nu \cos \nu t \sin \theta + Ri &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вважаючи, що частота магнітного поля багато більше власної частоти коливань маятника  $k = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \ll \nu$  введемо малий параметр

$\varepsilon^2 = \frac{k^2}{\nu^2}$ . Переходячи в рівняннях (2.7) до безрозмірного (швидкого) часу

$\tau = \nu t$  і безрозмірного току  $i_u = i/i_*$ , де базисне значення струму  $i_* = \frac{B_0 S}{L}$ , отримаємо такі рівняння в безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \varepsilon^2 \gamma \sin \tau \cos \theta i_u + \varepsilon^2 \sin \theta &= 0, \\ i_u + \sin \tau \cos \theta \dot{\theta} + \cos \tau \sin \theta + r i_u &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

У цих рівняннях введені безрозмірні параметри  $\gamma = \frac{(B_0 S)^2}{Lmg}$  та  $r = \frac{R}{L\nu}$ . Надалі збережемо за безрозмірними змінними колишні позначення. Маючи на увазі дослідження повільних рухів, близьких до вільних коливань маятника, перепишемо систему (2.8) як

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \varepsilon \omega, \quad \dot{\omega} = \varepsilon \gamma \sin \tau \cos \theta i - \varepsilon \sin \theta, \\ i + \sin \tau \cos \theta \dot{\theta} + \cos \tau \sin \theta + r i &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система (2.9) – квазілінійна з однією некритичною швидкою змінною. Перше наближення асимптотичної процедури описує консервативну систему. Електромагнітні сили в першому наближенні мають потенціал – середню енергію вихрових струмів, обчислених в тому ж наближенні. Консервативність може бути порушена в другому наближенні до електромагнітних сил.

Виконаємо в пакеті Mathcad моделювання динаміки системи, прийнявши параметри:  $\varepsilon = 2$ ,  $\gamma = 0,1$ ,  $r = 2$ .

Нижче представлений лістинг програми Mathcad:

```

ε := 2   γ := 0.1   r := 2
+
Given
Θ''(τ) - ε2 · γ · sin(τ) · cos(Θ(τ)) · iu(τ) + ε2 · sin(Θ(τ)) = 0

iu'(τ) + sin(τ) · cos(Θ(τ)) · Θ'(τ) + r · iu(τ) = 0

Θ(0) = 0.0001   Θ'(0) = 0.0001   iu(0) = 1.8   τ := 0, 0.1.. 60

(Θ
 iu) := Odesolve[ (Θ
 iu), τ, 60]   ω(τ) := d/dτ Θ(τ)

```

На рис. 2.32...2.33 представлені графіки залежності  $\theta(\tau)$  і  $\omega(\tau) = d\theta/d\tau$ .

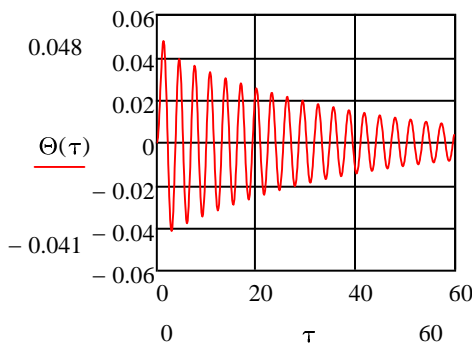


Рисунок 2.32 – Залежність кута  $\theta$  від часу

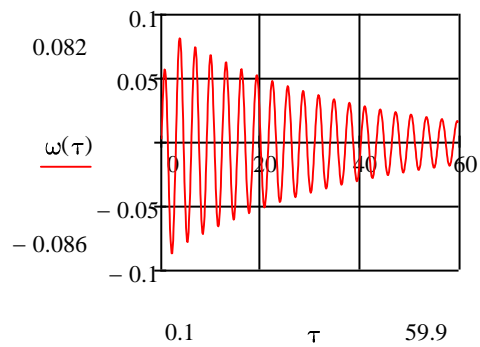


Рисунок 2.33 – Залежність кутової швидкості від часу

На наступному рис. 2.34 представлений фазовий портрет в координатах:  $\omega(\tau) - \theta(\tau)$ .

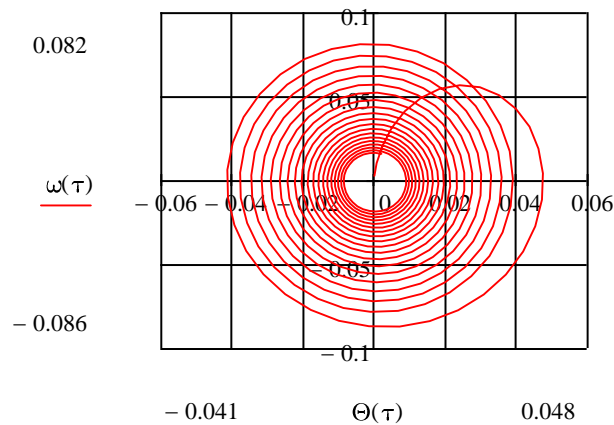


Рисунок 2.34 – Фазовий портрет в координатах:  $\omega(\tau) - \theta(\tau)$

Для порівняння наведемо лістинг програми в системі Wolfram Mathematica:

```

In[13]= Remove["Global' *"] × With[{ε = 2.0, γ = 0.1, r = 2.0},
  удалить символ | использовать
  sol = NDSolve[{θ'[t] - (ε^2) * γ * Sin[t] * Cos[θ[t]] * iu[t] + (ε^2) * Sin[θ[t]] == 0,
    численно решить ДУ | синус | косинус | синус
    iu'[t] + Sin[t] * Cos[θ[t]] * θ'[t] + r * iu[t] == 0, θ[0] == 0.0001, iu[0] == 1.8, θ'[0] == 0.0001},
    {θ, iu}, {t, 0, 60}]]
In[14]= Plot[Evaluate[{θ[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 60}, GridLines → Automatic, Frame → True]
  гр... | вычислить | линии коор... | автоматич... | рамка | истине
In[15]= Plot[Evaluate[{θ'[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 60}, GridLines → Automatic, Frame → True]
  гр... | вычислить | линии коор... | автоматич... | рамка | истине
In[16]= ParametricPlot[{θ[t], θ[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 60}, GridLines → Automatic, Frame → True]
  график параметрически заданной области на плоскости | линии коор... | автоматич... | рамка | истине

```

І на рис. 2.35...37 представлені графіки, аналогічні рис. 2.32...2.34 виконані за допомогою в системі Wolfram Mathematica.

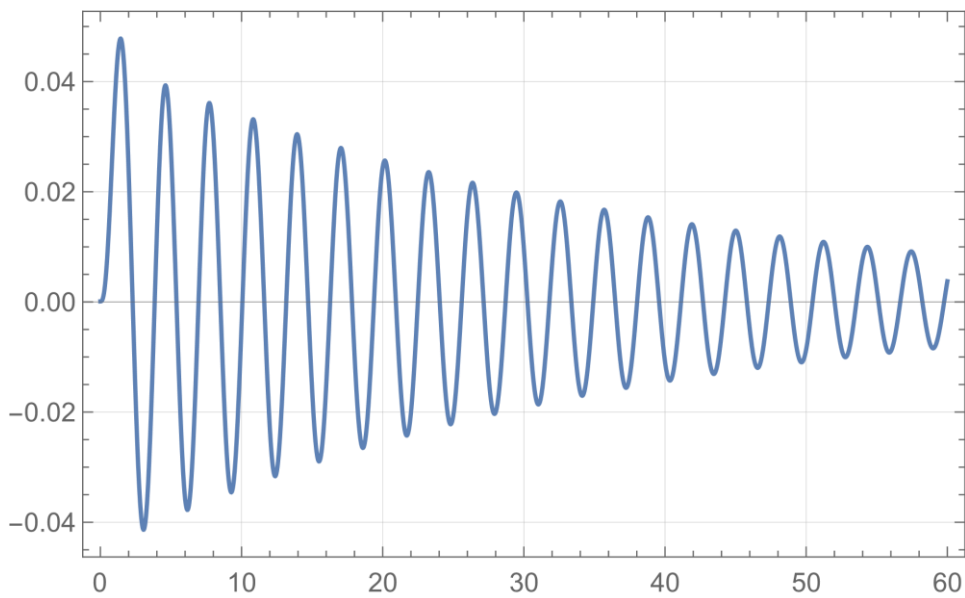


Рисунок 2.35 – Залежність кута  $\theta$  від часу

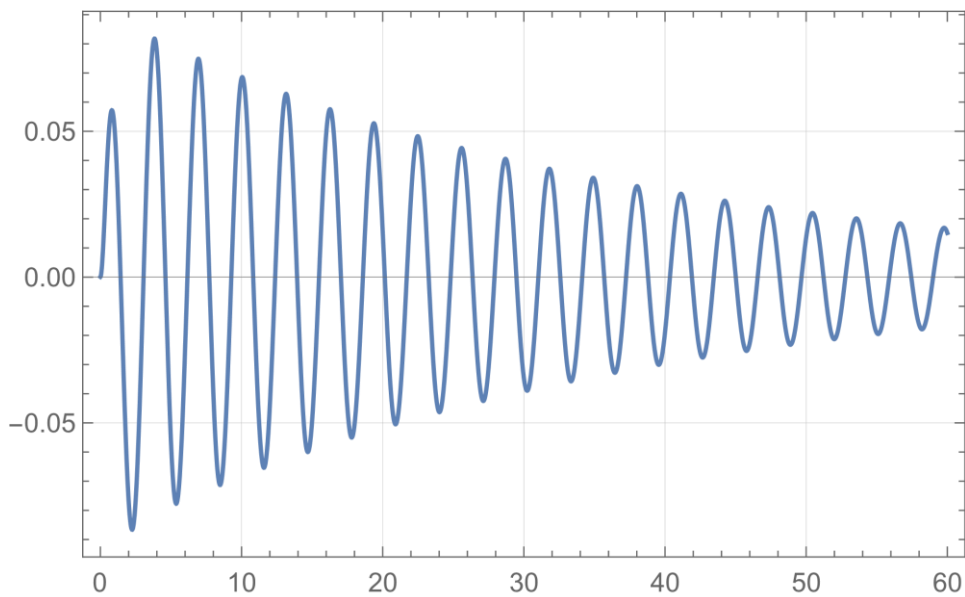


Рисунок 2.36 – Залежність кутової швидкості від часу

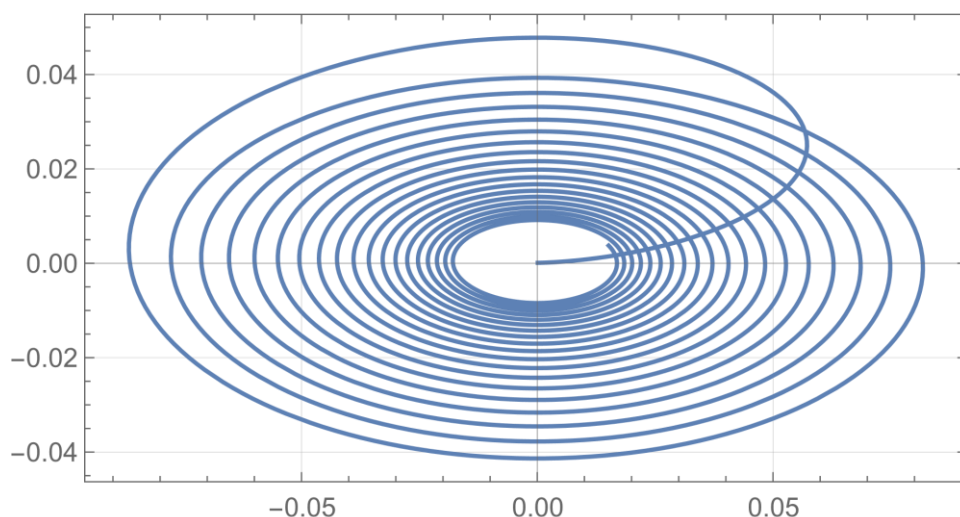


Рисунок 2.37 – Фазовий портрет в координатах:  $\omega(\tau) - \theta(\tau)$ .

Видно, що в обох системах комп'ютерної алгебри отримані однакові результати.

## 2.6 Модель динамо Рікітакі

Існує широке коло різномірних явищ і феноменів різної фізичної природи, які можна описати на основі сучасної теорії нелінійних динамічних систем. Ряд властивостей цих систем, такі, як нестійкість, нелінійність, відкритість, дисипація, породжують режими існування і еволюції, властиві широкому класу складних систем. В першу чергу це хаотичні режими, які зараз прийнято вважати характерними етапами розвитку будь-якої досить складної нелінійної системи.

Розглянемо ще одну галузь використання електромеханічних аналогій Лагранжа-Максвелла. Палеомагнітні дослідження показали, що магнітне поле Землі зазнає зміни напрямку (полярності) на зворотне. Протягом останніх сотень мільйонів років зміна напрямку відбувалася нерегулярним чином. Базовою моделлю в теорії земного динамо є чотиривимірна модель Рікітакі спарених динамо, запропонована в 1955 році. Модель показано на рис. 2.38 [10]. У динамо з двома взаємопов'язаними дисками, струм з однієї котушки диска перетікає в іншу і виробляє збудження другого диска, і навпаки. У певний момент система починає давати збої і показувати непередбачувану поведінку. Цю модель використовують для дослідження зв'язку великих вихорів магнітних полів в ядрі Землі і хаотичної інверсії геомагнітного поля Землі.

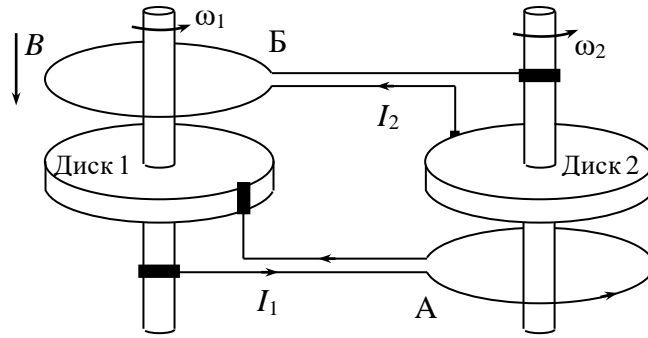


Рисунок 2.38 – Модель динамо Рікітакі

Модель Рікітакі в порівнянні з однодисковою не тільки могла самозбуджуватися, але і при критичних значеннях параметрів могла перебувати в нестійкому стані, яке призводило до зміни як величини, так і напрямку вектора збуджуваного нею магнітного поля. При обертанні обох дисків з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$  в магнітному полі  $B$ , напрямком вектора якого збігається з віссю обертання, в кожному з дисків виникає електрорушійна сила (ЕРС) і струм, спрямовані від периферії до центру або від центру до периферії, в залежності від напрямку  $\omega$  і  $B$ . Внаслідок цього в контурі А (див. рис. 2.38) потече струм, що порушується диском 1, який почне взаємодіяти з струмом в диску 2. І навпаки, струм в контурі Б почне взаємодіяти з струмом в диску 1. Така взаємодія призведе до перерозподілу як швидкостей  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , так і порушуваних струмів  $I_1$  та  $I_2$ , а отже, і магнітних полів, створюваних кожним контуром. Так в цій моделі буде здійснюватися процес генерації і регенерації магнітного поля. Теорія цього модельного процесу, дана Т. Рікітакі, зводиться до вирішення рівнянь руху дисків і їх електромагнітного стану. Ці рівняння за законами механіки та електродинаміки можуть бути записані у вигляді

$$\begin{cases} J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = M_{\omega_1} - M_{1,2} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = M_{\omega_2} - M_{2,1} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + R_1 \cdot I_1 = \omega_1 \cdot M_{1,2} \cdot I_2, \\ L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + R_2 \cdot I_2 = \omega_2 \cdot M_{2,1} \cdot I_1, \end{cases} \quad (2.10)$$

де  $L_1$  і  $L_2$  – індуктивності дисків 1 і 2, а  $J_1$  і  $J_2$  – їх моменти інерції;  $M_{1,2}$  і  $M_{2,1}$  – взаємні індуктивності між контуром А і диском 2, контуром Б і диском 1 відповідно;  $R_1$  і  $R_2$  – опори контурів А і Б;  $M_{\omega_1}$  і  $M_{\omega_2}$  – моменти обертання дисків, викликані зовнішніми силами.

Вважаємо, що  $L_1=L_2=L$ ,  $R_1=R_2=R$ ,  $M_{1,2}=M_{2,1}=M$ ,  $J_1=J_2=J$ , і  $M_{\omega 1}=M_{\omega 2}=M_{\omega}$ , і тоді в безрозмірних змінних  $x_1, x_2, x_3, x_4$  і  $\tau$ :

$$I_1 = \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot x_1, \quad I_2 = \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot x_2, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{M_{\omega} \cdot L}{J \cdot M}} \cdot x_3, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{M_{\omega} \cdot L}{J \cdot M}} \cdot x_4,$$

$$t = \sqrt{\frac{J \cdot L}{M \cdot M_{\omega}}} \cdot \tau,$$

система (2.10) з урахуванням тертя набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\mu \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -\mu \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_1 \cdot x_3, \\ \frac{dx_4}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_2 \cdot x_4, \end{cases}$$

де  $x_1$  і  $x_2$  – безрозмірні струми,  $x_3$  і  $x_4$  – безрозмірні кутові швидкості дисків,  $\mu$  – коефіцієнт омичний дисипації,  $\nu_1$  і  $\nu_2$  – коефіцієнти тертя в дисках 1 і 2 відповідно. Помічаємо, що реальний час пов'язано з безрозмірним співвідношенням:

$$t = \sqrt{\tau_e \cdot \tau_m} \cdot \tau,$$

де  $\tau_m$  – механічний час, що дорівнює

$$\tau_m = \frac{J \cdot R}{M_{\omega} \cdot M},$$

це час, протягом якого диски розганяються до типового значення кутової швидкості

$$\omega = \frac{R}{M},$$

а  $\tau_e$  – електромагнітний час, що дорівнює

$$\tau_e = \frac{L}{R},$$

це час, протягом якого зникнуть магнітні поля в разі зупинки дисків.

Ставлення цих часів пов'язано с коефіцієнтом омичної дисипації:

$$\mu^2 = \frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{J \cdot R^2}{M_{\omega} \cdot L \cdot M},$$



що збігається з відношенням запасеної механічної енергії до запасеної електричної енергії.

Проведемо комп'ютерне дослідження моделі Рікітакі.

Лістинг програми розрахунку в системі MATHCAD:

$$\nu 1 := 0.0022 \quad \mu := 1.1 \quad \nu 2 := 0.002$$

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t1 := 0 \quad t2 := 240 \quad \underline{F}(t,y) := \begin{pmatrix} -\mu \cdot y_0 + y_1 \cdot y_2 \\ -\mu \cdot y_1 + y_0 \cdot y_3 \\ 1 - \nu 1 \cdot y_2 - y_0 \cdot y_1 \\ 1 + \nu 2 \cdot y_3 - y_0 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N} := 5000$$

$$D := \text{rkfixed}(y, t1, t2, N, F)$$

$$i := 0..N \quad X_i := D_{i,1} \quad \sigma_i := D_{i,3} \quad Y_i := D_{i,2}$$

Даючи параметрам значення  $\mu=1.1$ ,  $\nu 1=0.0022$ ,  $\nu 2=0.002$ , отримаємо графіки зміни параметрів, що представлені на рис. 2.39...2.40.

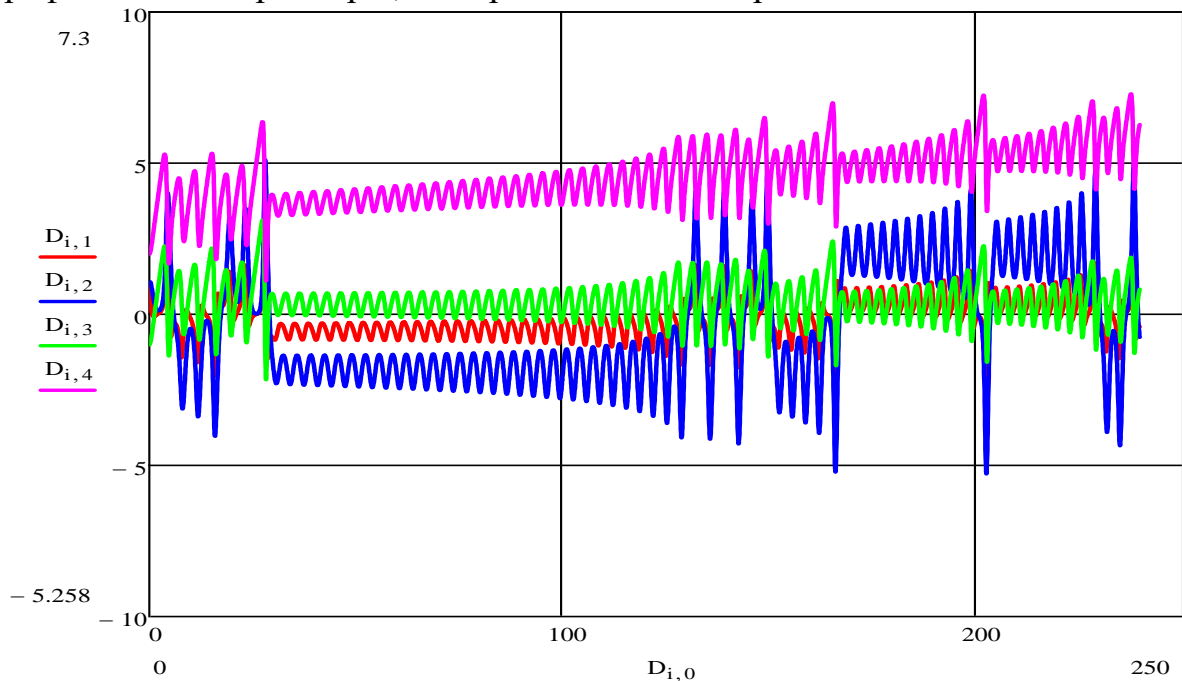


Рисунок 2.39 – Типові криві, що описують еволюцію параметрів в часі:  $D_{i,0}$  – час;  $D_{i,1}$  і  $D_{i,2}$  – це безрозмірні струми  $x_1$  і  $x_2$ ;  $D_{i,3}$  і  $D_{i,4}$  – це безрозмірні кутові швидкості  $x_3$  і  $x_4$  дисків

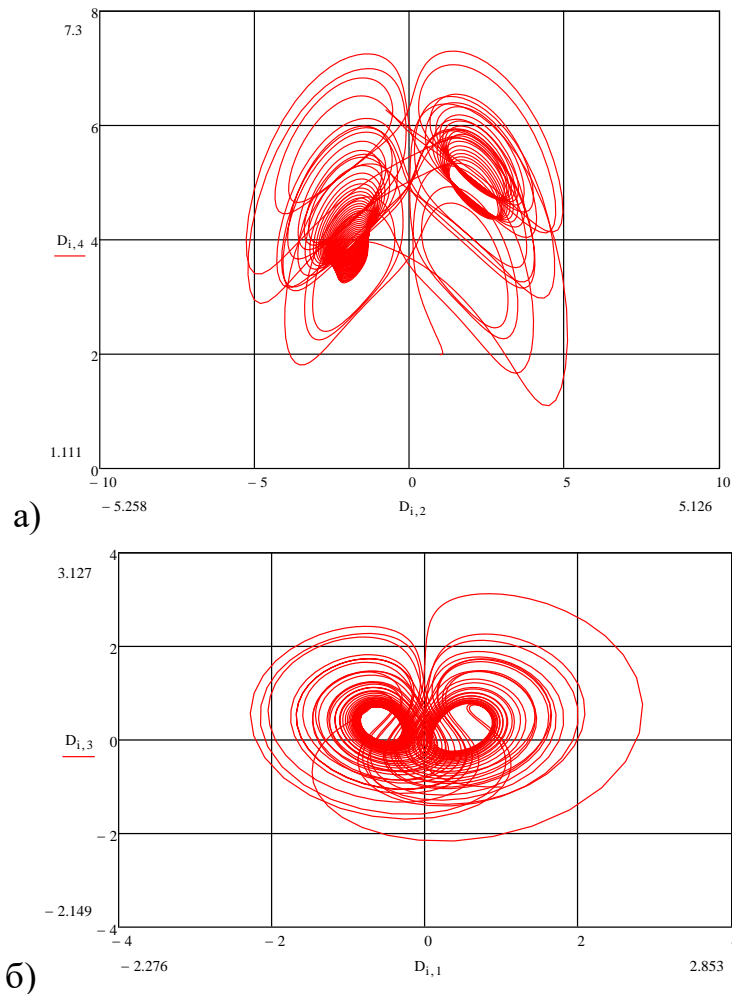


Рисунок 2.40 – Проекції траєкторій у фазовому просторі на площини:  
а)  $x_3-x_1$ ; б)  $x_4-x_2$

За рис. 2.36-2.37 видно, що динамо Рікітакі здійснює стохастичні коливання і відноситься до дивних атракторів (таких як атрактор Лоренца, атрактор Пликіна, атрактор Росслера та ін.).

## 2.7 Динаміка електромагнітного і електростатичного підвісів ротора

Традиційні опори ковзання і кочення в ряді випадків являються неефективними в застосуванні. Такі опори не можуть в повній мірі забезпечити виконання складних і суперечливих вимог. Сучасні опори повинні відповідати здатності тривалий час стійко працювати в будь-якому середовищі при малих і високих швидкостях, мати близькі до нуля моменти, споживати незначну кількість енергії, бути технологічними і не дуже дорогими. Найбільш повне рішення проблем досягається в електромагнітних або електростатичних підвісах (ЕМП або ЕСП), де вага тіла і діючих на нього навантажень врівноважується силами магнітного або електричного поля. В результаті такого врівноваження здійснюється вільне «паріння» (левітація) тіла без дотику з оточуючими його предметами.

Вільна левітація тіл в електричних і магнітних полях забезпечує роботу підвісу при високих швидкостях і отримання вкрай малих збурюючих моментів. Крім того, відсутність зносу, шуму і вібрацій, можливість нормального функціонування в вакуумі, агресивних середовищах, широкий температурний діапазон і незначне споживання енергії роблять такі підвіси все більш перспективними [8].

Розглянуто два завдання про поступальний вертикальний рух ротора в ЕМП і ЕСП. Магнітний підвіс ротора  $1$  складається з електромагніту  $2$  і датчика  $3$ , керуючого напругою живлення котушки електромагніта. Маса ротора дорівнює  $m$ ,  $b$  – коефіцієнт в'язкого тертя при русі ротора;  $R$  – омичний опір ланцюга (рис. 2.41). При номінальній силі струму в обмотці електромагніту і номінальному повітряному зазорі в магнітопроводі електромагнітна сила тяжіння врівноважує силу тяжіння ротора.  $D$  – діаметр сердечника магнітопроводу.

Будемо вважати, що ротор здійснює поступальний прямолінійний рух уздовж вертикальної осі  $Y$ . За початок відліку на осі  $Y$  приймемо точку  $O$ , з якою збігається центр мас ротора  $C$  при номінальній величині зазору в магнітопроводі. В якості узагальненої координати виберемо координату  $y$  центру мас ротора. Струм в обмотці електромагніту позначимо через  $i$ . Узагальненими координатами розглянутої електромеханічної системи будуть  $y$  і  $i$ . Система не містить конденсаторів, тому диференціальне рівняння для струму в електромагніті матиме перший порядок.

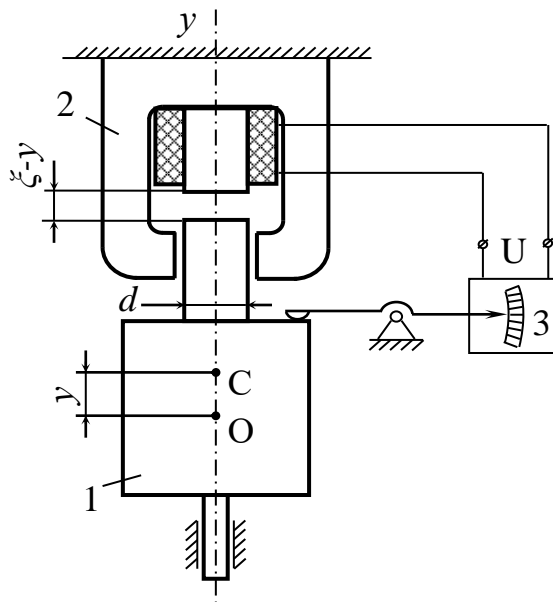


Рисунок 2.41 – Електромагнітний підвіс ротора:  
 $1$  - ротор;  $2$  - електромагніт;  $3$  - датчик.

Використовуючи формулу для кінетичної енергії твердого тіла, що здійснює поступальний рух, випишемо вираз для кінетичної енергії ротора:

$$T_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot y^2.$$

Потенційна енергія сили тяжіння:

$$P = mg \cdot y.$$

Енергія електричного поля дорівнює нулю, так як в системі відсутні ємності.

Підрахуємо енергію магнітного поля, яка, як відомо, визначається виразом (в системі СІ):

$$T_m = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \frac{1}{\mu} \cdot B^2 dV. \quad (2.11)$$

Тут  $\vec{B}$  – вектор магнітної індукції;  $\mu$  – магнітна проникність;  $V$  – область, яка містить магнітне поле.

Припустимо, що зазор в магнітопроводі ( $\xi - y$ ) малий у порівнянні з діаметром магнітопроводу. Тоді магнітне поле в повітряному зазорі магнітопроводу можна вважати однорідним і знехтувати крайовими ефектами. Поле розсіювання не враховуємо. Припустимо, що магнітна проникність магнітопроводу вельми велика і в (2.11) можна знехтувати інтегралом за обсягом. Тоді при зроблених припущеннях (2.11) залишиться інтегралом від постійного вектора за обсягом:

$$T_m = \frac{1}{2\mu_0} \cdot S(\xi - y) \cdot B^2, \quad (2.12)$$

де  $S = \pi \cdot D^2 / 4$  – площа поперечного перерізу магнітопроводу,  $\mu_0$  – магнітна проникність повітря.

Магнітний потік через обмотку електромагніту:

$$\Phi = B \cdot S \cdot N, \quad (2.13)$$

де  $N$  – число витків обмотки.

З іншого боку магнітний потік пропорційний току в ланцюгу:

$$\Phi = L_{11} \cdot i, \quad (2.14)$$

де  $L_{11}$  – коефіцієнт самоіндукції.

З (2.13) і (2.14) знаходимо величину вектора магнітної індукції:

$$B = L_{11} \cdot i / (S \cdot N).$$

Підставляючи цей вираз в формулу для магнітної енергії (2.12), отримуємо:

$$T_m = \frac{(\xi - y) \cdot L_{11}^2}{2\mu_a \cdot S \cdot N^2} \cdot i^2. \quad (2.15)$$

В той же час, магнітна енергія

$$T_m = \frac{1}{2} \cdot L_{11} \cdot i^2. \quad (2.16)$$

Прирівнюючи (2.15) і (2.16), знаходимо остаточний вираз для залежності коефіцієнта самоіндукції від узагальненої координати  $y$ :

$$L_{11} = \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{\xi - y}$$

і магнітної енергії системи:

$$W_m = \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{2 \cdot (\xi - y)} \cdot i^2.$$

Таким чином, лагранжіан електромеханічної системи, виявляється рівним:

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 - mg \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{\xi - y} \cdot i^2. \quad (2.17)$$

Дисипативна функція:

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot R \cdot i^2,$$

де  $b$  – коефіцієнт в'язкого тертя при русі ротора;  $R$  – омичний опір ланцюга.

Припустимо, що узагальнені неконсервативні сили  $Q_i$  механічної природи відсутні, і позначимо через  $U$  напругу, що подається на обмотки електромагніту. Для забезпечення стійкості підвісу ротора ця напруга формується в залежності від показань датчика, що вимірює величину зазору  $(\xi - y)$  в магнітопроводі. При збільшенні зазору струм в ланцюзі повинен зростати, щоб збільшити силу тяжіння ротора до магніту і повернути ротор у стан рівноваги, а при зменшенні зазору струм повинен зменшуватися.

Рівняння Лагранжа-Максвелла матимуть вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial i} = U;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Виконуючи операції диференціювання, знаходимо:

$$\frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{\xi - y} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{(\xi - y)^2} \cdot \dot{y} \cdot i + R \cdot i = U ;$$

$$m\ddot{y} + mg - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{(\xi - y)^2} \cdot i^2 + b\dot{y} = 0 .$$
(2.18)

Вираз  $-\frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{(\xi - y)^2} \cdot \dot{y} \cdot i$  являє собою електрорушійну силу (ЕРС)

індукції, що виникає при русі ротора;  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot S \cdot N^2}{(\xi - y)^2} \cdot i^2$  є сила тяжіння ротора до магніту.

Якщо в (2.18)  $U=U(y)$ , то система (2.18) буде системою нелінійних диференціальних рівнянь 3-го порядку.

Обмежимося для простоти випадком, коли напруга, що подається на обмотки електромагніту, пропорційна величині зазору в магнітопроводі, тобто

$$U = U_0 + k \cdot (\xi - y), \quad U_0 = const,$$

де  $k$  – коефіцієнт посилення сигналу датчика зміщення ротора.

У положенні рівноваги ротора:

$$y = 0, \dot{y} = 0, i = i_0$$

і з рівнянь (2.18) знаходимо необхідні величини сторонньої ЕРС і номінальною сили струму:

$$U_0 = R \cdot i_0 - k \cdot \xi; \quad i_0^2 = 2 \cdot mg \cdot \xi / L_0.$$

Тут  $L_0 = \mu_0 \cdot S \cdot N^2 / \xi$  – коефіцієнт самоіндукції в положенні рівноваги ротора, тобто при  $y=0$ .

Знайдемо розв'язок системи (2.18) використовуючи пакет Matlab. Систему (2.18) зведемо до системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку. Введемо позначення  $x_1(t) = i(t)$ ,  $x_2(t) = y(t)$ ,  $x_3(t) = \dot{y}(t)$ . Тоді система (2.18) буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (U_0 + k(\xi - x_2(t))) \frac{(\xi - x_2(t))}{\mu_0 SN^2} - R x_1(t) \frac{(\xi - x_2(t))}{\mu_0 SN^2} - \frac{x_3(t) x_1(t)}{\xi - x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -g - \frac{b x_3(t)}{m} + \frac{\mu_0 S N x_1^2(t)}{2m(\xi - x_2(t))^2} \end{cases}$$

Наведемо текст програми у системі Matlab

Файл solve 2\_10\_1.m

```
function sol2_10_1
S=0.003;
R=2;
b=0.01;
qsi=0.0002;
m=0.15;
mu0=1.2566e-6;
N=2100;
g=9.81;
k=1000;
L0=mu0*S*N^2/qsi;
i0=sqrt(2*m*g*qsi/L0);
U0=R*i0-k*qsi;
disp(i0);
Y0=[i0;0.00001;0.0];
disp(Y0);
P=fun21(0.1,Y0,S,R,b,qsi,m,mu0,N,g,k,U0);
disp(P);
disp('uo=');
disp(U0);
[T,Y]=ode45(@(t,x) fun21(t,x,S,R,b,qsi,m,mu0,N,g,k,U0),[0 0.18],Y0);
plot(T,Y(:,1));
grid on;
title('Графік залежності сили току i від часу t');
xlabel('t');
ylabel('i');
figure;
plot(T,Y(:,2));
title('Графік залежності координати центру мас ротора y від часу t');
xlabel('t');
ylabel('y');
grid on;
figure;
plot(T,Y(:,3));
title('Графік залежності швидкості зміни координати центру мас ротора y'' від часу t');
xlabel('t');
ylabel('y''');
```

Файл fun21.m

```
function F=fun21(t,x,S,R,b,qsi,m,mu0,N,g,k,U0)
dx1=(U0+k*(qsi-x(2)))*(qsi-x(2))/(mu0*S*N^2)-R.*x(1).*(qsi-x(2))/(mu0*S*N^2)-x(3).*x(1)./(qsi-x(2));
dx2=x(3);
dx3=-g-b.*x(3)/m+mu0*S*N^2.*x(1).^2/(qsi-x(2)).^2/2/m;
F=[dx1;dx2;dx3];
```

Графіки рішення наведено на рис.2.42...2.44

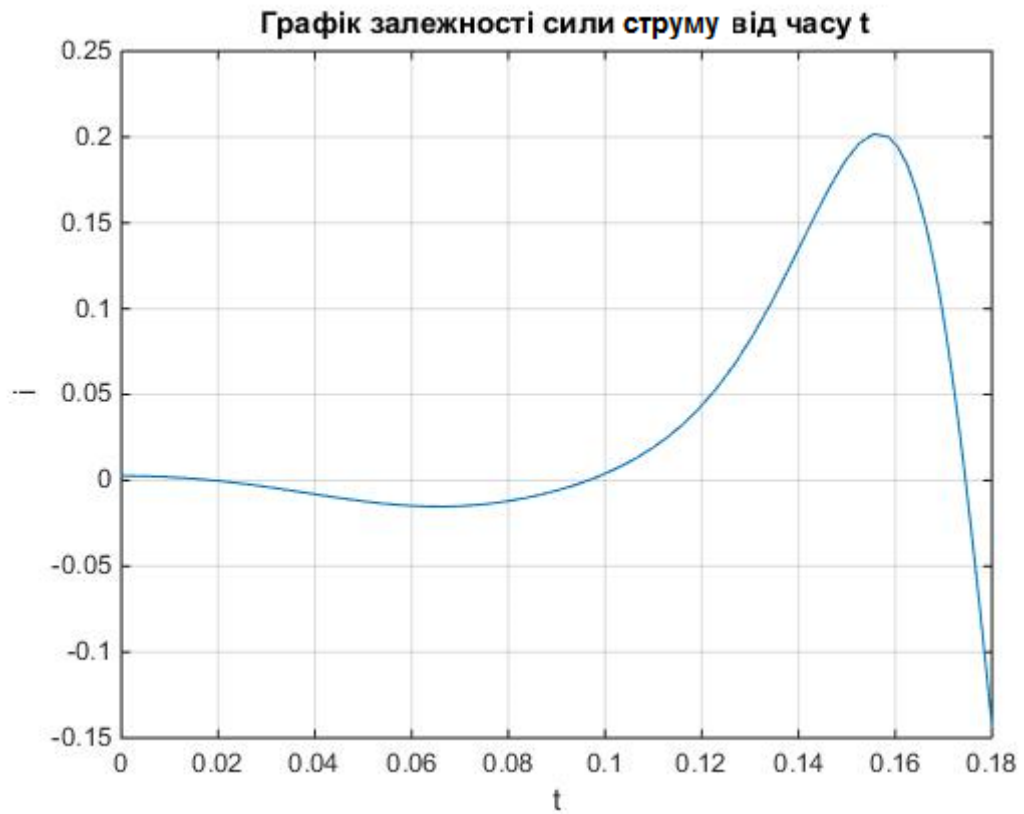


Рисунок 2.42 – Графік залежності сили струму  $i(t)$  від часу  $t$ .

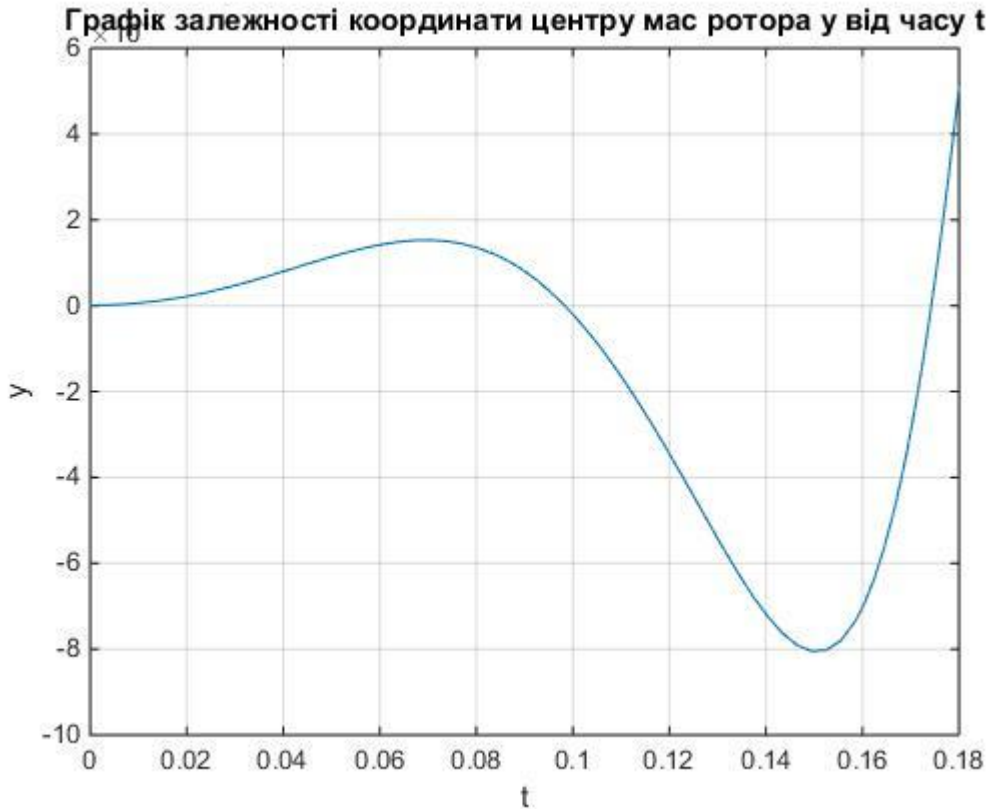


Рисунок 2.43 – Графік залежності координати центру мас ротора  $y(t)$  від часу  $t$



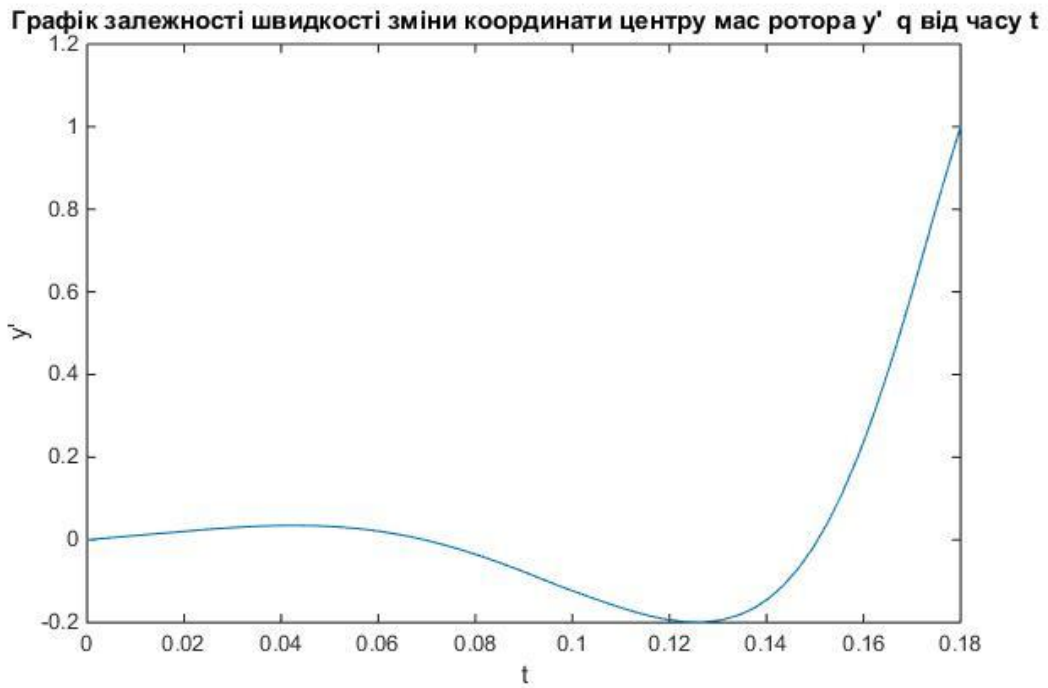


Рисунок 2.44 – Графік залежності швидкості зміни координати центру мас ротора  $y'(t)$  від часу  $t$

З графіків видно, що управління виду  $U = U_0 + k \cdot (\xi - y)$ ,  $U_0 = const$  не забезпечує повернення системи до положення рівноваги.

Розглянемо інший тип підвісу, а саме – односторонній електростатичний підвіс ротора разом з рухомою пластиною маси  $m$  (рис. 2.45). Основною частиною підвісу є плоский конденсатор. Внаслідок зсуву верхньої рухомої пластини ємність конденсатора змінюється. При цьому в електричному ланцюзі, утвореному ємністю  $C(y)$ , активним опором  $R$ , індуктивністю  $L_I$  і джерелом постійної електрорушійної сили  $E$ , виникає змінний струм.

Проводимо вертикальну вісь  $Y$ . За початок відліку вибираємо точку  $O$ , в якій знаходиться рухома пластина в той момент, коли відстань між обкладинками конденсатора дорівнює  $\xi$ .

В якості узагальнених координат електромеханічної системи вибираємо зміщення рухомої пластини  $y$  з точки  $O$  і повний заряд на конденсаторі  $q_0 + q$ , де  $q_0$  - заряд конденсатора в положенні рівноваги.

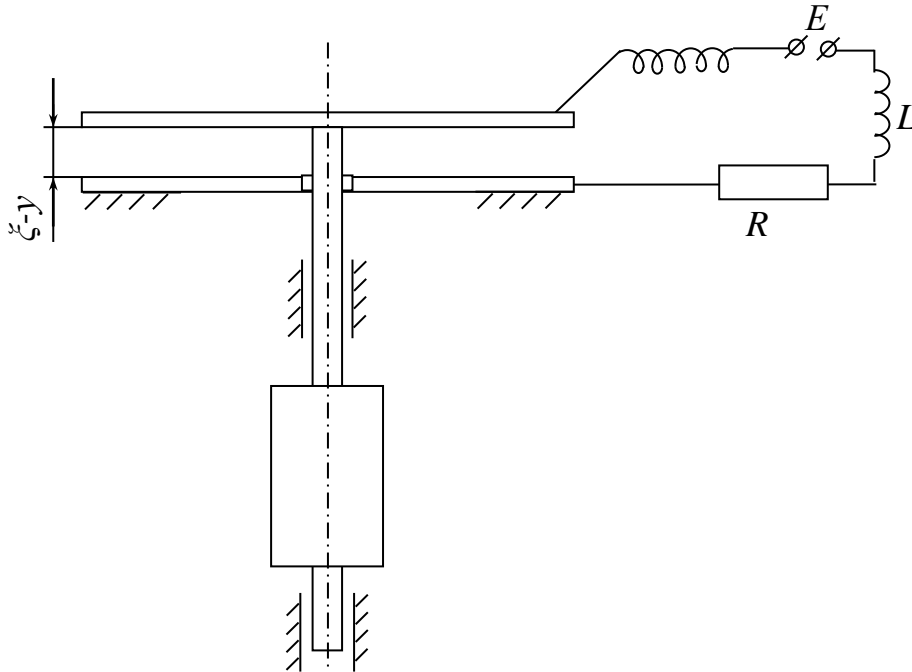


Рисунок 2.45 – Електростатичний підвіс ротора

При поступальному вертикальному русі ротора разом з рухомою пластиною уздовж осі  $Y$  кінетична енергія

$$T_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Потенційна енергія сили тяжіння

$$\Pi = mgy.$$

Магнітна енергія електричного кола (електрокінетичні енергія):

$$T_m = \frac{1}{2} L_1 \cdot \dot{q}^2.$$

Ємність конденсатора, яка обернено пропорційна відстані між його пластинами, при зміщенні рухомої пластини дорівнює

$$C = \frac{\xi}{\xi - y} C_0.$$

Потенційна енергія електричного поля в конденсаторі

$$\Pi_{\text{конд}} = \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 \xi} (\xi - y).$$

Складемо лангранжіан системи

$$L = T_k - \Pi + T_m - \Pi_{\text{конд}},$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy + \frac{1}{2} L_1 \cdot \dot{q}^2 - \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 \xi} (\xi - y).$$

Дисипативна функція має вигляд

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2 + \frac{1}{2} R \cdot \dot{q}^2,$$

де  $b$  – коефіцієнт демпфірування при вертикальному русі ротора разом з пластиною.

Рівняння Лагранжа - Максвелла для даної електромеханічної системи мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = E.$$

Обчислимо необхідні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m \ddot{y}; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg + \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 \xi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} = b \dot{y};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_1 \dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = L_1 \ddot{q}; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{(\xi - y)(q + q_0)}{C_0 \xi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = R \dot{q}.$$

Підставивши результати в рівняння Лагранжа - Максвелла, отримаємо

$$m \ddot{y} + mg - \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 \xi} + b \dot{y} = 0;$$

$$L_1 \ddot{q} + \frac{(\xi - y)(q + q_0)}{C_0 \xi} + R \dot{q} = E.$$

При рівновазі даної системи з цих рівнянь отримаємо

$$mg = \frac{q_0^2}{2C_0 \xi};$$

$$\frac{q_0}{C_0} = E.$$

З урахуванням знайдених співвідношень рівняння динаміки розглянутої електромеханічної системи перетворюються до виду

$$m\ddot{y} - \frac{Eq}{\xi} - \frac{q^2}{2C_0\xi} + b\dot{y} = 0;$$

$$L_1\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{y}{\xi}E - \frac{(\xi - y)}{C_0\xi}q = 0.$$

Зведемо систему диференціальних рівнянь другого порядку для функцій  $y(t)$  і  $q(t)$  до системи чотирьох рівнянь першого порядку. Введемо позначення  $y(t) = y_1(t)$ ,  $\dot{y}(t) = y_2(t)$ ,  $q(t) = y_3(t)$ ,  $\dot{q}(t) = y_4(t)$ . Тоді система першого порядку буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \frac{Ey_3(t)}{\xi m} + \frac{y_3^2(t)}{C_0\xi m} - \frac{by_2(t)}{m} \\ \dot{y}_3(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_4(t) = \frac{(\xi - y_1(t))y_3(t)}{C_0\xi L} + \frac{y_1(t)E}{\xi L} - \frac{Ry_4(t)}{L} \end{cases}$$

В якості початкових умов візьмемо  $y(0)=10^{-6}$ ,  $y'(0)=0.01$ ,  $q(0)=7 \cdot 10^{-8}$ ,  $q'(0)=0.01$ .

Наведемо текст програми у системі Matlab.

Файл solve2\_10.m

```
function sol2_10
Y0=[1e-6;0.01;7e-8;0.01];
[T,Y]=ode45(@fun2,[0 0.001],Y0);
plot(T,Y(:,1));
grid on;
title('Графік залежності зміщення рухомої пластини y від часу t');
xlabel('t');
ylabel('y');
figure;
plot(T,Y(:,2));
title('Графік залежності швидкості зміщення рухомої пластини y'' від часу t');
xlabel('t');
ylabel('y''');
grid on;
figure;
plot(T,Y(:,3));
title('Графік залежності зміни заряду конденсатора q від часу t');
xlabel('t');
ylabel('q');
grid on;
figure;
plot(T,Y(:,4));
```

```

title('Графік залежності швидкості зміни заряду конденсатора q'' від часу t')
xlabel('t');
ylabel('q''');

```

Файл fun2.m

```

function F=fun2(x,y)
m=6.25e-3;
E=2;
C0=4.5e-8;
qsi=3e-6;
b=30;
R=300;
L=2e-6;
F=[y(2);E.*y(3)/(qsi*m)+y(3).^2./(C0*qsi*m)-b.*y(2)./m;y(4);...
(qsi-y(1)).*y(3)/(C0*qsi*L)+y(1).*E/(qsi*L)-R.*y(4)./L];

```

Графіки рішення наведено на рис. 2.46...2.49.

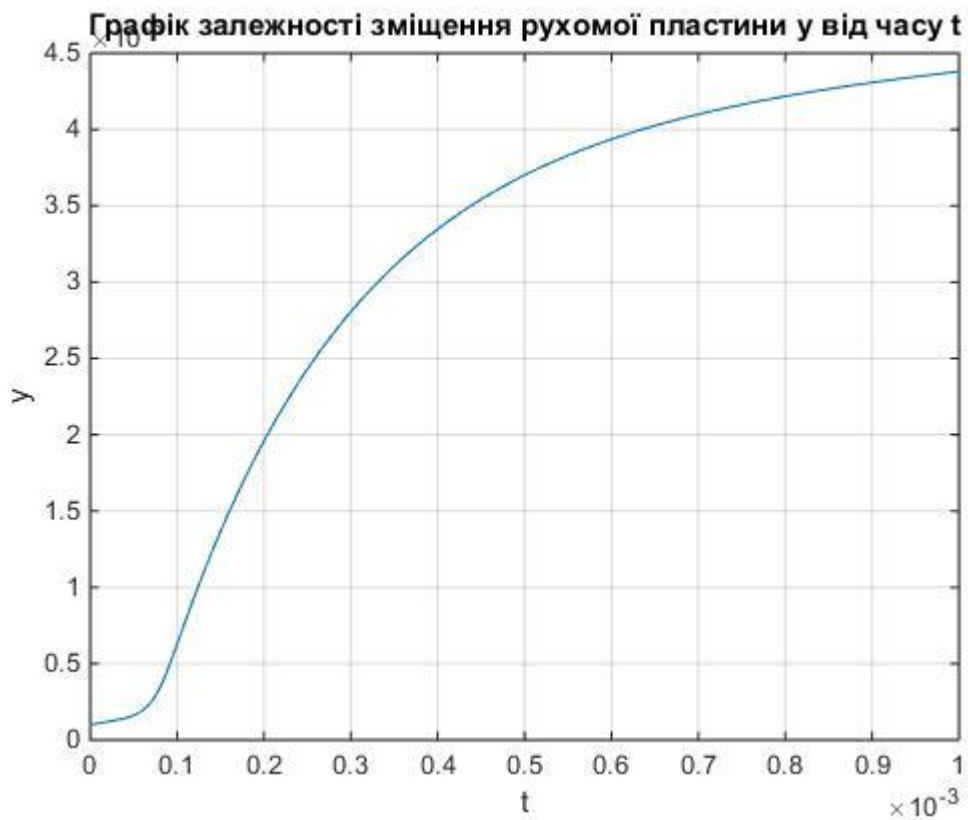
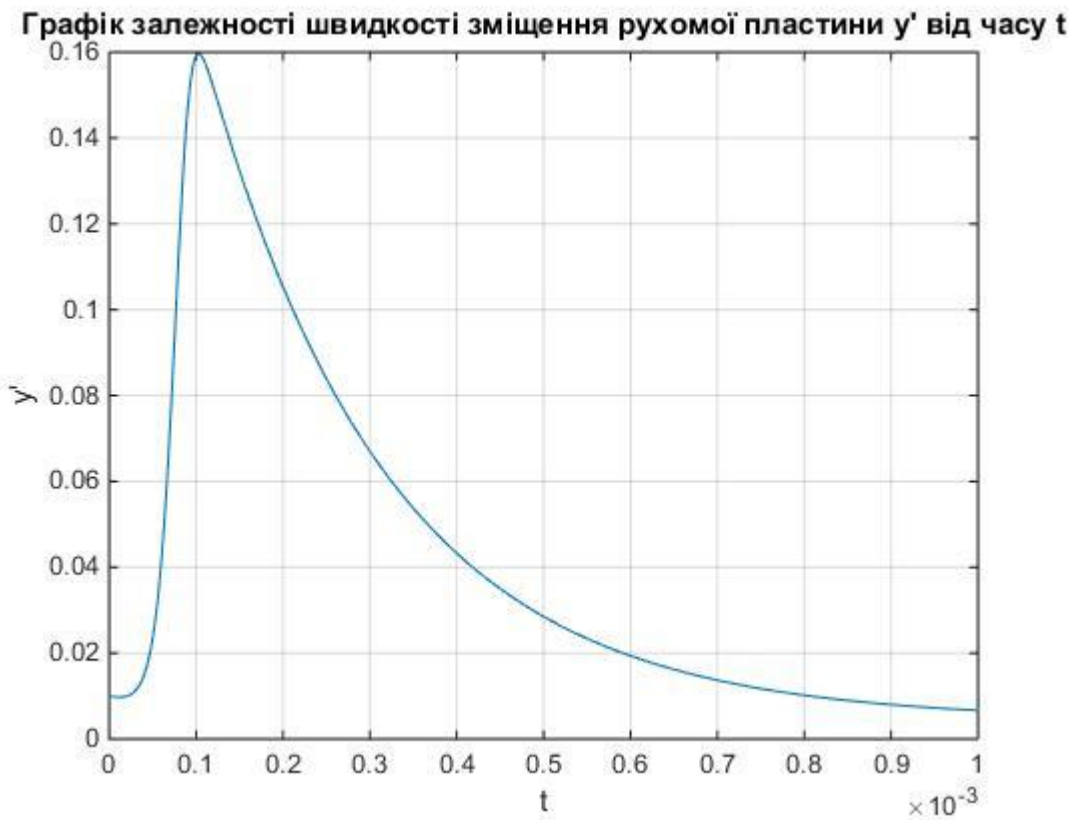
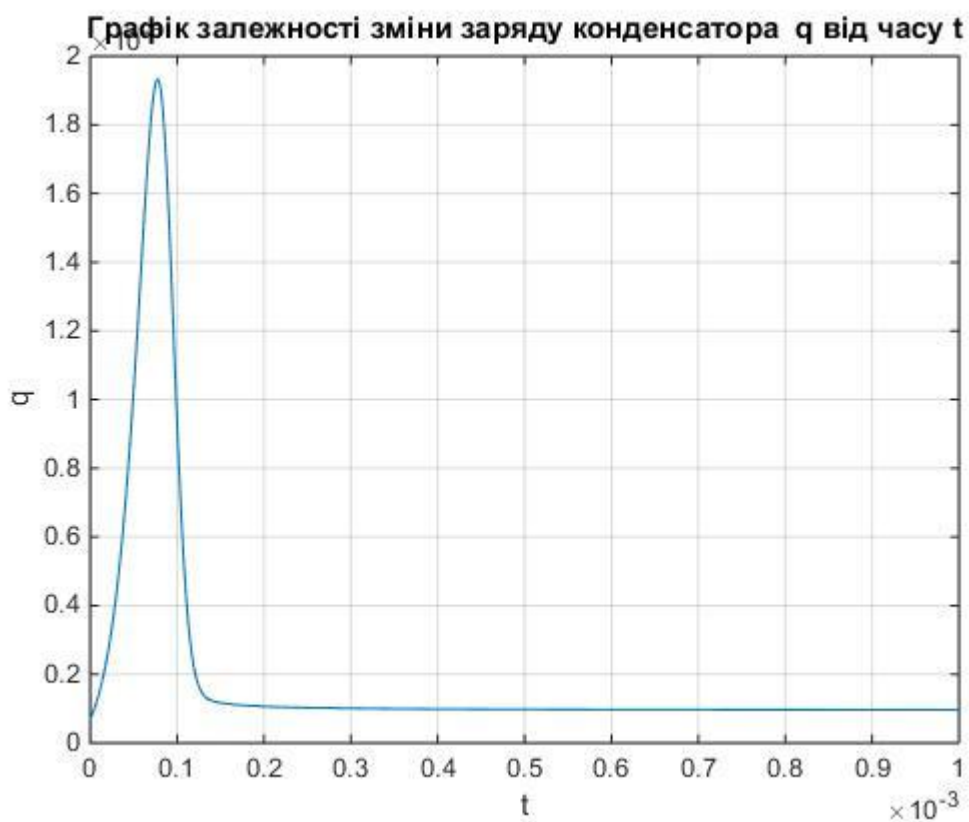


Рисунок 2.46 – Графік залежності зміщення рухомої пластини  $y$  від часу  $t$ .



*Рисунок 2.47– Графік залежності швидкості зміщення рухомої пластини  $y'$  від часу  $t$ .*



*Рисунок 2.48– Графік залежності зміни заряду конденсатора  $q$  від часу  $t$ .*

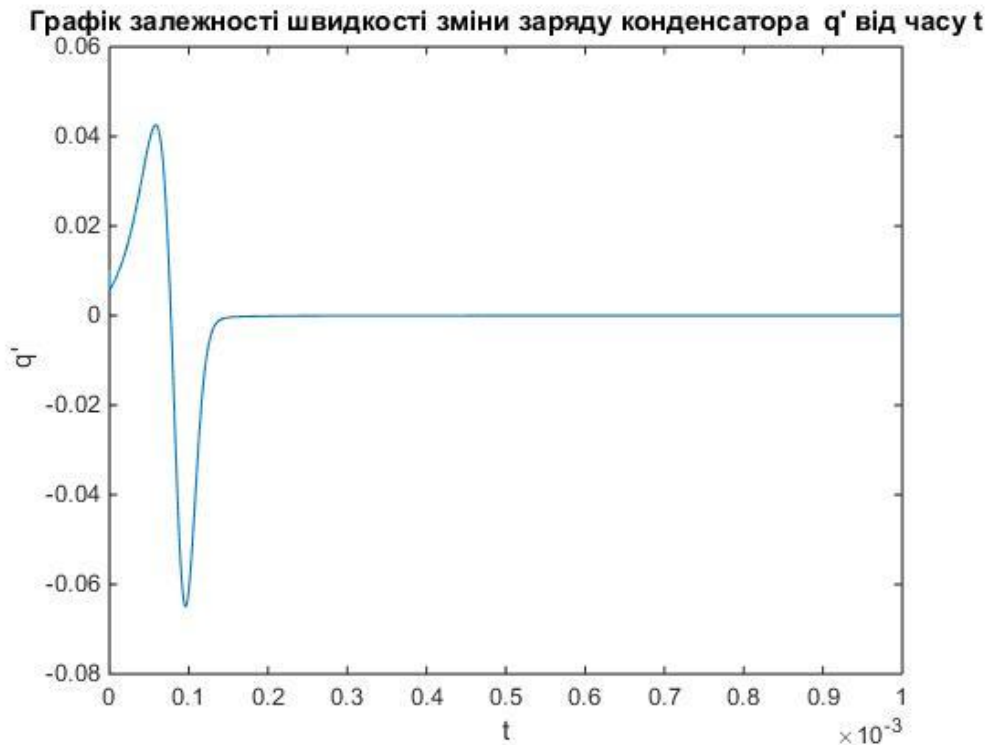


Рисунок 2.49 – Графік залежності швидкості зміни заряду конденсатора  $q'$  від часу  $t$ .

З графіків на рис. 2.46-2.49 видно, що при зростанні часу система наближається до положення рівноваги. Це означає стійкість точки рівноваги даної динамічної системи.

## 2.8 Електромеханічний осцилятор із змінною індуктивністю

Розглянемо електромеханічну систему із змінною індуктивністю [10], представлену на рис. 2.50.

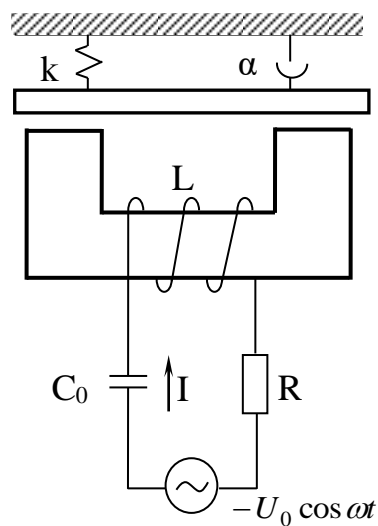


Рисунок 2.50 – Електромеханічна система із змінною індуктивністю

Рівняння системи мають вигляд

$$\frac{d^2}{dt^2}(L(x)I) + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C_0} = U_0 \omega \sin \omega t,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F(x, I).$$

де  $L(x)$  – індуктивність котушки з сердечником, яка залежить від величини зазору між плитою маси  $m$  і сердечником, яка визначається зміщенням плити  $x$ ,  $F(x, I) = (I/2) d\Phi/dx$  – пондеромоторна сила, що діє на плиту,  $\Phi = b(x)I$  – магнітний потік.

С достатньою точністю можна покласти  $d\Phi/dx = IdL/dx$ .

При малих  $x$  індуктивність  $L(x)$  можна представити у вигляді полінома

$$L(x) = L_0(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3).$$

Тоді

$$F(x, I) = L_0((a_1/2) + a_2 x + (3/2)a_3 x^2)I^2.$$

Очевидно, що через залежність  $L$  від  $x$  коливання струму в електричному коливальному контурі можуть бути квазіперіодичними з основною частотою  $\omega$  і квазіперіодом  $2\pi/\nu$ , де  $\nu$  – частота коливань механічної частини системи (змінної  $x$ ).

Проведено чисельне моделювання даної системи при наступних параметрах:  $m=0.005$ ,  $\alpha=500$ ,  $k_1=8000$ ,  $C_0=620 \cdot 10^{-8}$ ,  $U_0=220$ ,  $\omega_0=24\pi$ ,  $R=5$ ,  $a_1=2$ ,  $a_2=0.5$ ,  $a_3=0.2$ ,  $L_0=10^{-4}$  при нульових початкових умовах.

Лістинг програми розрахунку в програмі MATHCAD:

```

m1 := 0.005      alpha := 1000      k1 := 80000      C01 := 620·10-8      U0 := 220      R := 5
omega0 := 157    a1 := 2      a2 := 1      a3 := 0.5      L0 := 10-4      Z(t) := U0·omega0·sin(omega0·t)
F1(p, I1) := L0·(a1/2 + a2·p + 3/2·a3·p2)·I12
L1(p) := L0·(1 + a1·p + a2·p2 + a3·p3)
L2(p) := L0·(a1 + 2·a2·p + 3·a3·p2)
L3(p) := L0·(2·a2 + 6·a3·p)
Given
L1(x(t))·d2(I(t))/dt2 + 2·L2(x(t))·(dx(t)/dt)·(dI(t)/dt) + L3(x(t))·(dx(t)/dt)2·I(t) + L2(x(t))·I(t)·d2x(t)/dt2 + R·(dI(t)/dt) + I(t)/C0 = U·omega0·sin(omega0·t)

```



$$m_1 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \alpha \cdot \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) + k_1 \cdot x(t) = F_1(x(t), I(t))$$

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad I(0) = 0 \quad \dot{I}(0) = 0$$

$$FZ(C0, U) := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ I \end{pmatrix}, t, 0.2 \right] \quad t := 0, 0.0005 \dots 0.2$$

$$X1 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 140)_0 \quad I1 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 140)_1$$

$$X2 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 180)_0 \quad I2 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 180)_1$$

$$X3 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 220)_0 \quad I3 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 220)_1$$

$$X4 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 260)_0 \quad I4 := FZ(620 \cdot 10^{-8}, 260)_1$$

$$V3(t) := \frac{d}{dt} X3(t)$$

Результати моделювання наведені на рис. 2.51...2.53.

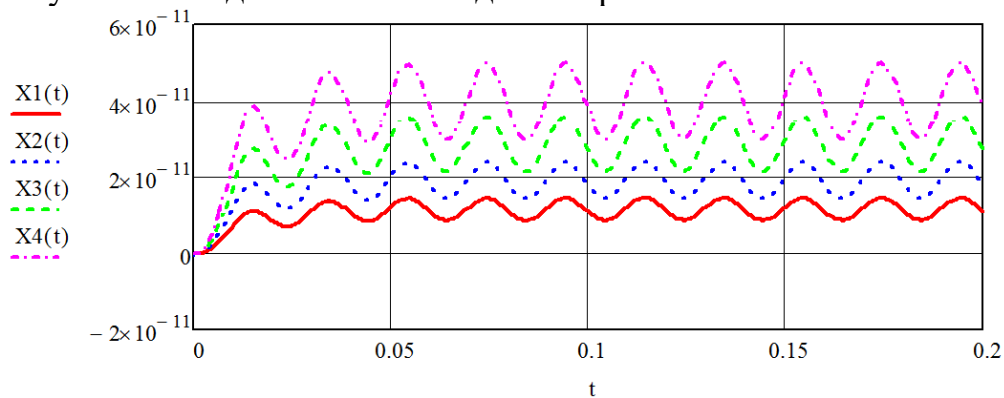


Рисунок 2.51 – Графік залежності координати  $x$  від часу при різних значеннях  $U_0$ :  $X1$  ( $U_0=140$ ),  $X2$  ( $U_0=180$ ),  $X3$  ( $U_0=220$ ),  $X4$  ( $U_0=260$ )

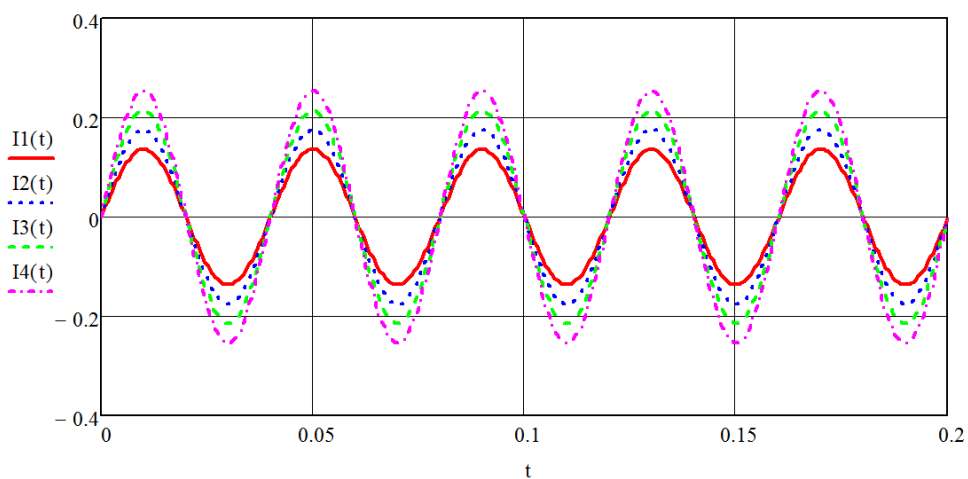


Рисунок 2.52 – Графік залежності сили струму  $I$  від часу при різних значеннях  $U_0$ :  $I1$  ( $U_0=140$ ),  $I2$  ( $U_0=180$ ),  $I3$  ( $U_0=220$ ),  $I4$  ( $U_0=260$ )

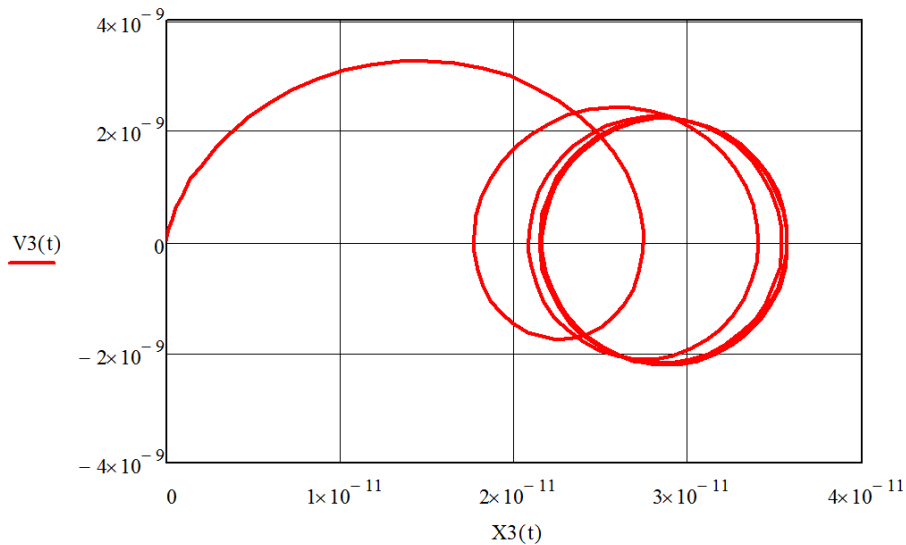


Рисунок 2.53 – Фазовий портрет, залежність швидкості  $v$  від координати  $x$  при  $U_0=220$

З рис. 2.51 і 2.53 видно, що приблизно через 0,05 с система переходить в сталий режим незалежно від значення змінного параметру. Також чисельний експеримент показав дуже незначну залежність сили струму від параметрів механічної частини системи.

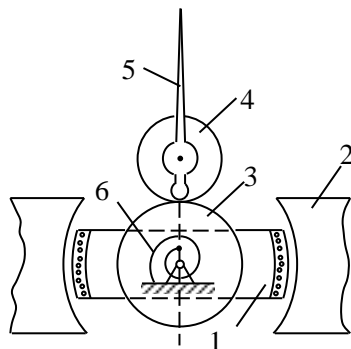
## 2.9 Завдання до самостійної роботи

Пропоновані в цьому розділі кілька завдань для самостійного рішення взяті з відомих збірок [15-16].

1. Математичний маятник поміщений в однорідне електростатичне поле, вектор  $E$  напруженості якого спрямований вертикально вгору. Довжина маятника дорівнює  $l$ , маса  $m$ , величина позитивного електричного заряду вантажу  $q$ . Визначити частоту  $\omega_0$  малих коливань маятника, якщо  $Eq < mg$ .

$$\text{Відповідь: } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{l} \left( g - \frac{Eq}{m} \right)}$$

2. Котушка 1 вольтметра поміщена - між полюсами 2 магніту, що створює постійне однорідне поле індукції  $B$ . Довжина котушки дорівнює її діаметру  $D$ , число витків  $N$ , питомий опір дроту  $\rho$ . З котушкою жорстко пов'язана шестерня 3 радіуса  $R$ , що знаходиться в зачепленні з шестірнею 4, на осі якої укріплена стрілка 5 індикатора. Радіус шестерні 4  $r=R/3$ . При відсутності струму котушка розташована горизонтально, а спіральна пружина 6, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $c$ , не деформована.



Визначити кут повороту стрілки, що встановлюється при подачі на клемми вольтметра постійної напруги  $U$ .

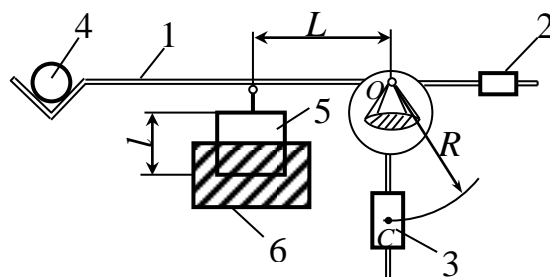
Відповідь: 
$$\varphi = \frac{3UBd}{4\rho c} .$$

3. В умовах попередньої задачі знайти час практичного заспокоєння стрілки вольтметра, якщо момент інерції котушки з шестернею 3  $J_k$ , момент інерції шестерні 4 зі стрілкою  $J_c$ . Індуктивний опір котушки знехтувати.

Вказівка. Час практичного заспокоєння відповідає амплітуді коливань, що становить 5% від початкової.

Відповідь: 
$$t_{\text{усп}} = 8 \ln 20 \frac{\rho(J_k + 9J_c)}{B^2 d^3 N} .$$

4. Ваги важелів, що застосовуються в роторних автоматичних лініях, є важіль 1 з противагами 2 і 3, що обертається навколо горизонтальної осі  $O$ . Ваги регулюються так, щоб центр ваги  $C$  важеля з деталлю 4 номінальної маси розташовувався на одній вертикалі з віссю  $O$ . Для гасіння коливань важеля, що виникають при установці деталей, застосовується електромагнітний демпфер, який складається з квадратної рамки 5, прикріпленою до важеля на відстані  $L$  від осі обертання і вміщеної між полюсами магніту 6, що створює постійне однорідне поле індукції  $B$ .



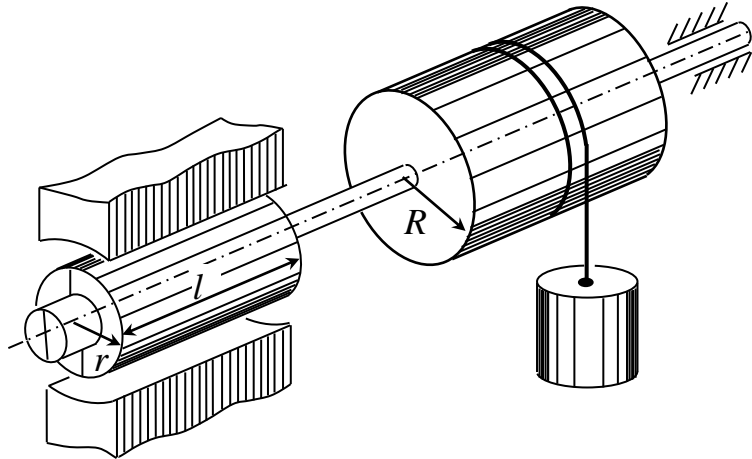
Визначити, при якому числі  $N$  короткозамкнених витків рамки демпфера процес заспокоєння коливань важеля терезів буде аперіодичним, якщо довжина сторони рамки дорівнює  $l$ , питомий опір дроту  $\rho$ , маса і момент інерції щодо осі  $O$  важеля з деталлю рівні  $M$  і  $J$  відповідно,  $OC = R$ .

Відповідь: 
$$N \geq \frac{8\rho\sqrt{JMgR}}{B^2 L^2 l} .$$

5. У режимі динамічного гальмування електродвигун лебідки працює як генератор з короткозамкненими витками якоря. Радіус барабана лебідки дорівнює  $R$ , радіус якоря  $r$ , довжина  $l$ , кількість короткозамкнених витків якоря, що знаходяться між полюсами магніту, так само  $N$ , питомий опір дроту обмотки якоря  $\rho$ . Магнітні полюси статора створюють постійне однорідне поле індукції  $B$ .

Визначити сталу швидкість опускання вантажу маси  $m$ , якщо  $R = 2r$ ,  $l = 3r$ .

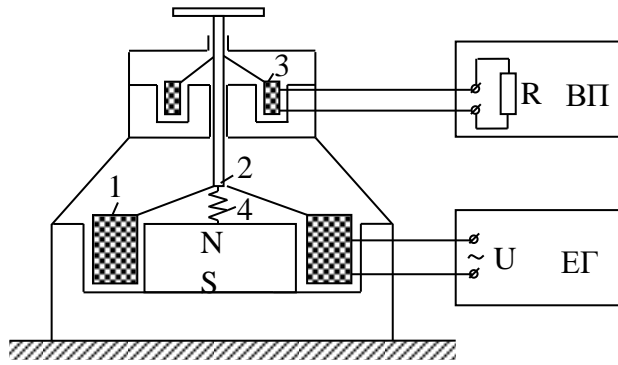
$$\text{Відповідь: } v_{\text{уст}} = \frac{16mg\rho}{9B^2 r N}.$$



6. В умовах попередньої задачі визначити, за який час  $T$  вантаж, який почав рух зі стану спокою, набуває швидкість  $v = 0,9v_{\text{уст}}$ , якщо момент інерції барабана лебідки разом з якорем дорівнює  $J$ .

$$\text{Відповідь: } T = \frac{4}{9} \ln 10 \frac{\rho(J + mR^2)}{B^2 r^3 N}$$

7. Вібростенд типу ГМК-1 має два магнітоелектричних механізми (МЕМ). Збудження коливань вібростенда здійснюється подачею напруги  $U = U_0 \sin pt$  від генератора електричних коливань (ЕГ) на котушку 1 силового МЕМ, жорстко пов'язану з рухомим штоком 2. Другий МЕМ служить для реєстрації руху штока, його котушка 3 включена в ланцюг вимірювального приладу (ВП). Маса рухомих частин вібростенда дорівнює  $m$ , коефіцієнт жорсткості пружини 4 дорівнює  $c$ , індукція в зазорах полюсних; наконечників магнітів силової і вимірювальної систем  $B_1$  і  $B_2$ , довжина і опір дроти котушок  $l_1, R_1$  і  $l_2, R_2$ , відповідно, вхідний опір вимірювального приладу  $R = R_2$ .



Нехтуючи індуктивним опором котушок, знайти максимальне значення вимушених коливань вібростенда і добротність його коливальної системи.

$$\text{Відповідь: } F_0 = \frac{B_1 l_1}{R_1} \cdot U_0, \quad Q = \frac{2R_1 R_2 \sqrt{cm}}{2 \cdot R_2 (B_1 l_1)^2 + R_1 (B_2 l_2)^2}.$$

8. Три пластини утворюють послідовне з'єднання двох конденсаторів змінної ємності. Середня пластина нерухома, верхня маси  $m_1$ , підвішена на пружині жорсткості  $k_1$ , і нижня маси  $m_2$ , підперта пружиною жорсткості  $k_2$  з'єднані пружиною, яка не проводить струм, жорсткості  $k_3$  і можуть переміщатися по вертикалі. Конденсатори включені в електричний контур, що містить крім них елементи  $e(t)$ ,  $R$ ,  $L$  і  $C_0$ . Скласти рівняння стану системи, якщо в положенні рівноваги верхня пружина розтягнута, а середня і нижня стиснуті (їх деформації рівні  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  і  $\Delta_3$  відповідно), відстані між пластинами в цьому положенні складають  $a_1$  і  $a_2$ , а ємності конденсаторів рівні  $C_1$  і  $C_2$ .

*Відповідь:*

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 - \frac{q^2}{2C_1 a_1} = m_1 g - k_1 \Delta_1 + k_2 \Delta_2,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2 x_1 + \frac{q^2}{2C_2 a_2} = m_2 g - k_2 \Delta_2 - k_3 \Delta_3,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q \left( \frac{a_1 - x_1}{C_1 a_1} + \frac{a_2 + x_2}{C_2 a_2} + \frac{1}{C_0} \right) = e(t).$$

## 3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

### 3.1 Дослідження динаміки електровимірювальних приладів в системі MATHCAD

Аналогові електровимірювальні прилади являють собою найважливішу групу технічних засобів електричних вимірювань. Простота, зручність реалізації, висока точність, широкий частотний діапазон, наочність показань, реєстрації і висока надійність сприяють широкому поширенню аналогових приладів в різних галузях науки і техніки. Роль динамічних вимірювань особливо велика в галузях техніки і виробництва, для яких характерне створення нових технологічних процесів і випробування нових машин, приладів і апаратів, вивчення об'єктів в екстремальних умовах [9].

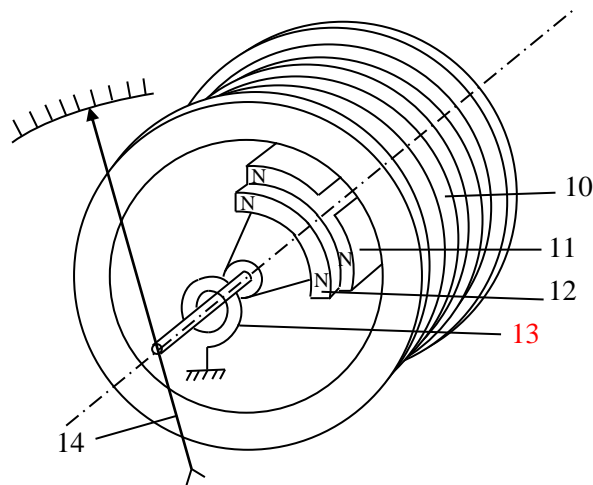
Розглянемо динаміку одного з таких приладів (рис. 3.1). Електромагнітний датчик для реєстрації крутильних коливань навколо осі  $z$  включає намотану з товстого дроту круглу котушку 1 (10) з повітряним центральним зазором. Усередині зазору нерухомо розташована феромагнітна пластина 2 (11), а на осі закріплена друга, але вже рухлива феромагнітна пластина 3 (12). На осі пластини закріплена спіральна пружина 4 (13) і стрілка 5 (14) приладу. Вал коливається під дією збурюючого моменту  $M_z = M_z(t)$ , моменту спіральної пружини  $M_{\text{пр}} = c\varphi$ . Електричний ланцюг складається з елемента із заданою електрорушійною силою  $E$  і активного опору  $R$ . Центр мас рухомої системи лежить на осі обертання  $z$ , а момент інерції вала щодо цієї осі дорівнює  $J_z$ . При крутильних коливаннях вала змінюється індуктивність котушки  $L = L(\varphi)$ , де  $\varphi$  - кут повороту вала. При зміні індуктивності змінюється струм ланцюга. На вал так само діє сила опору, пропорційна його кутовій швидкості, що викликається демпфером, що створює момент опору  $M_{\text{оп}} = \beta\dot{\varphi}$ .

Електромеханічна система має два ступені свободи. Виберемо узагальнені координати:  $\varphi$  – кут повороту вала,  $q$  (електричний заряд) - узагальнена координата, яка фіксує стан електричної частини ланцюга.

Рівняння Лагранжа-Максвелла для системи з двома степенями вільності мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + Q_{\varphi}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} + Q_q. \quad (3.2)$$



цифри???

Рисунок 3.1 – Електромагнітний датчик для реєстрації крутильних коливань

Кінетична енергія  $T$  електромеханічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії  $T_1$  механічної частини системи і енергії магнітного поля  $T_2$  електричного кола:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) \dot{q}^2. \quad (3.3)$$

Потенційна енергія

$$\Pi = \frac{c \varphi^2}{2}. \quad (3.4)$$

Дисипативна функція має вигляд

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} R \cdot \dot{q}^2. \quad (3.5)$$

Узагальнені сили:

$$Q_\varphi = M_z(t), \quad Q_q = E. \quad (3.6)$$

Підставляючи (3.3)...(3.6) в (3.1)...(3.2), отримаємо:

$$J \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{q}^2 + \beta \dot{\varphi} + c \varphi = M_z(t), \quad (3.7)$$

$$L(\varphi) \ddot{q} + \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \dot{q} + R \dot{q} = E. \quad (3.8)$$

Для того, що б рівняння (3.7), (3.8) можна було проінтегрувати, потрібно задати значення збурюючого і магнітного моментів, а також індуктивності. Будемо вважати:

$$M_z(t) = \alpha \cos(\nu t) + \gamma \sin(\nu t), \quad L(\varphi) = \eta_1 \varphi + \eta_2 \varphi^2.$$

Тоді рівняння (3.7), (3.8) приймуть вигляд:

$$J\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}(\eta_1 + 2\eta_2\varphi)\dot{q}^2 + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = \alpha \cos(\nu t) + \gamma \sin(\nu t),$$

$$(\eta_1\varphi + \eta_2\varphi^2)\ddot{q} + (\eta_1 + 2\eta_2\varphi)\dot{\varphi}\dot{q} + R\dot{q} = E.$$

Для моделювання роботи механізму задамося конкретними значеннями параметрів:  $J=12(\text{кг}\cdot\text{м}^2)$ ,  $c=20(\text{Н}/\text{м})$ ,  $\beta=2(\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м})$ ,  $\eta_1=2(\text{мкГн})$ ,  $\eta_2=0,05(\text{мкГн})$ ,  $\alpha=3(\text{Н}\cdot\text{м})$ ,  $\gamma=2(\text{Н}\cdot\text{м})$ ,  $\nu=\pi/3$ ,  $R=10(\text{Ом})$ ,  $E=60(\text{В})$ .

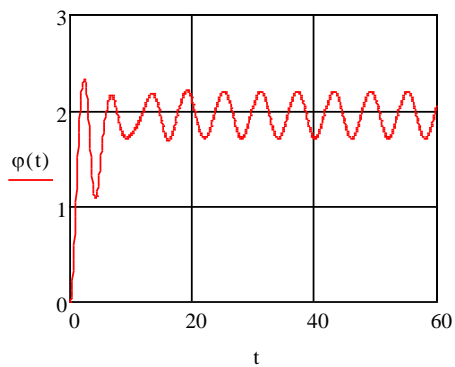
Нижче представлений лістинг програми в програмі MATHCAD:

```
Jz := 12    E := 60    R := 20    beta := 2
beta1 := 0.002    c1 := 0.001    c := 20
Given
Jz * phi''(t) - 1/2 * 6 * phi(t) * q'(t)^2 + beta * phi'(t) - beta1 * phi'(t)^3 + c * phi(t) - c1 * phi(t)^3 = 50 * sin(phi(t))
3 * phi(t)^2 * q''(t) + R * q'(t) + 6 * phi'(t) * q'(t) = E
phi(0) = 0.0001    phi'(0) = 0.0001    q(0) = 0.1    q'(0) = 0.2    t := 0, 0.1 .. 90
(phi) := Odesolve([phi, q], t, 90)
omega(t) := d/dt phi(t)
epsilon(t) := d^2/dt^2 phi(t)
i(t) := d/dt q(t)
```

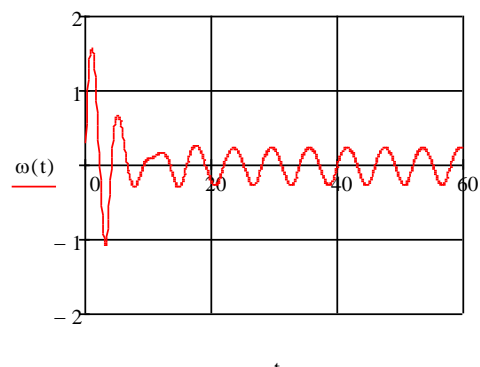
Результати моделювання представлені на наведених графіках (рис.

3.2).

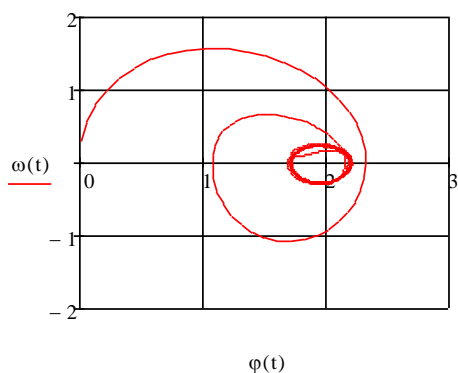




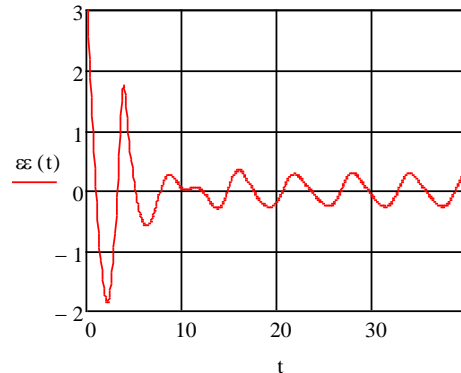
а)



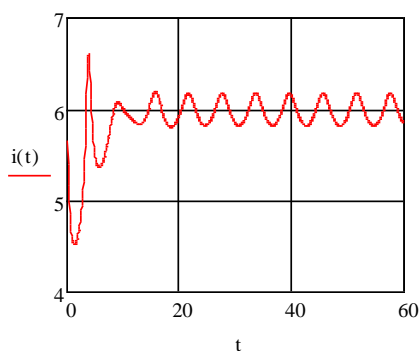
б)



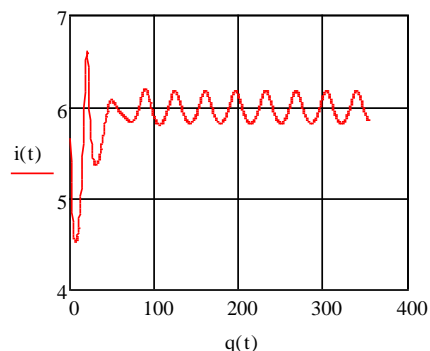
в)



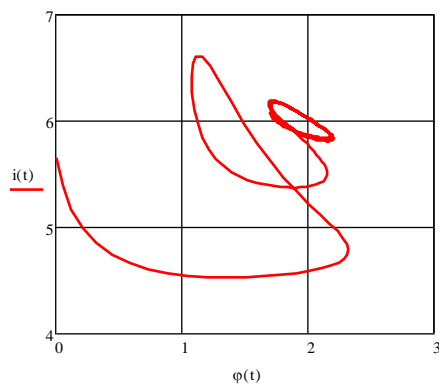
г)



д)



е)



ж)

Рисунок 3.2 – Результати моделювання: а – залежність кута повороту від часу; б - залежність кутової швидкості від часу; в – фазовий портрет механічних коливань, г - залежність кутового прискорення від часу; д - залежність струму від часу; е - фазовий портрет електричних коливань; ж - залежність струму від кута повороту вала.

Загасання в системі визначається наявністю відповідних коефіцієнтів демпфірування.

Розглянемо іншу електродинамічну систему.

Для вимірювання крутильних коливань застосовується електродинамічний датчик (рис. 3.3). Датчик складається з двох котушок: нерухомої 1 і рухомої 2, насадженої на вісь  $O_1O_2$ . Вісь датчика кріпиться до торця вала, що здійснює крутильні коливання (на рисунку не зображений). Нерухома котушка конструктивно виконана у вигляді двох половин, між якими проходить вісь  $O_1O_2$  рухливої котушки.

Вал здійснює крутильні коливання під дією збурюючого моменту  $M_B$  щодо геометричної осі вала  $z$ . Момент сил пружності щодо цієї осі  $M_{np} = -c\varphi$ , де  $c$  – постійний коефіцієнт пружності на кручення, а  $\varphi$  – кут повороту вала. Момент інерції вала щодо осі  $z$  дорівнює  $J$ . На валу так само встановлений демпфер 3, що створює момент опору пропорційний кутовій швидкості вала  $M_o = -\beta (d\varphi/dt)$ .

Обидві котушки послідовно з'єднані і підключені до одного джерела постійного струму з електрорушійною силою  $E$ .

При коливаннях вала і, отже, осі  $O_1O_2$  датчика рухлива котушка 1 повертається по відношенню до нерухомої котушки 2. Це викликає зміну взаємної індуктивності  $M$  котушок, яка залежить від кута повороту  $\varphi$  вала:  $M = M(\varphi)$ . Зі зміною взаємної індуктивності змінюється струм в електричному ланцюзі, вимірюваний амперметром  $A$ . Амперметр, градуйований в одиницях кута повороту, безпосередньо вимірює крутильні коливання вала.

Індуктивності котушок 1 і 2 постійні і відповідно рівні  $L_1$  і  $L_2$ . Омичний опір ланцюга постійний і дорівнює  $R$ . Силою тяжкості і моментом інерції рухомих частин датчика нехтуємо.

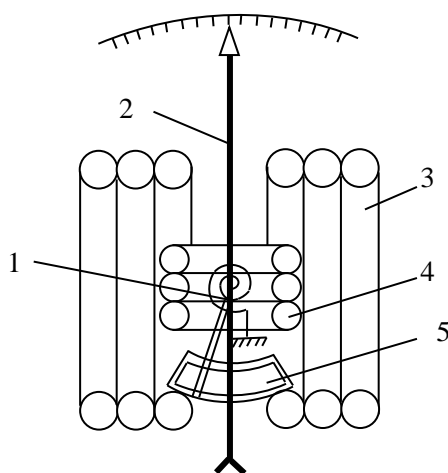


Рисунок 3.3 – Електродинамічний датчик

Так само як і в вищерозглянутому прикладі електродинамічна система має два ступені свободи. Виберемо узагальнені координати:  $\varphi$  – кут повороту вала,  $q$  (електричний заряд) – узагальнена координата, яка фіксує стан електричної частини ланцюга.

Використаємо рівняння Лагранжа-Максвелла (3.1), (3.2).

Електрокінетична енергія  $T$  даної електродинамічної системи дорівнює:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (L_1 + M(\varphi) + L_2) \dot{q}^2. \quad (3.9)$$

Потенційна енергія  $\Pi$ , дисипативна функція  $\Phi$ , узагальнені сили  $Q_\varphi$  і  $Q_q$  відповідно дорівнюють:

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2}, \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} R \cdot \dot{q}^2, \quad Q_\varphi = M_B(t), \quad Q_q = E. \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.9) - (3.10) в (3.1) - (3.2), отримаємо:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{q}^2 + c\varphi = M_B(t), \quad (3.11)$$

$$(L_1 + M(\varphi) + L_2)\ddot{q} + \left(\frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + R\right)\dot{q} = E. \quad (3.12)$$

Диференціальні рівняння (3.11) - (3.12) описують «рух» даної електродинамічної системи. Зауважимо, що в кожне з цих рівнянь входять як механічні, так і електричні параметри системи. Врахуємо, що струм  $i$  та електричний заряд  $q$  пов'язані залежністю:  $i = dq/dt$ .

Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (3.11), (3.12) і отримати рівняння «руху» можна, знаючи залежність збурюючого моменту  $M_B$  від часу і залежність взаємної індуктивності  $M$  котушок від кута повороту  $\varphi$  вала.

Для визначеності приймаємо:

$$M_B(t) = \alpha \cos(\nu t) + \gamma \sin(\nu t), \quad M(\varphi) = \eta_1 \varphi + \eta_2 \varphi^2.$$

Тоді рівняння (3.11), (3.12) приймуть вигляд:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{2} (\eta_1 + 2\eta_2 \varphi) i^2 + c\varphi = \alpha \cos(\nu t) + \gamma \sin(\nu t),$$

$$(L_1 + \eta_1 \varphi + \eta_2 \varphi^2 + L_2) \frac{di}{dt} + ((\eta_1 + 2\eta_2 \varphi) \dot{\varphi} + R) i = E.$$

Виконаємо моделювання роботи пристрою при наступних параметрах:  $J=20(\text{кг}\cdot\text{м}^2)$ ,  $c=20(\text{Н}/\text{м})$ ,  $\beta=3(\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м})$ ,  $\eta_1=20(\text{мкГн})$ ,  $\eta_2=4(\text{мкГн})$ ,  $\alpha=12(\text{Н}\cdot\text{м})$ ,  $\gamma=8(\text{Н}\cdot\text{м})$ ,  $\nu=\pi/4$ ,  $R=6(\text{Ом})$ ,  $E=30(\text{В})$ ,  $L_1=4(\text{мкГн})$ ,  $L_2=20(\text{мкГн})$ .

Лістинг програми розрахунку в програмі MATHCAD:

$$\underline{J} := 20 \quad \eta_1 := 20 \quad \eta_2 := 4 \quad \beta := 3 \quad \underline{c} := 20 \quad \alpha := 12 \quad \gamma := 8 \quad \nu := \frac{\pi}{4} \quad E := 30 \quad \underline{R} := 6$$

$$L_1 := 4 \quad L_2 := 20$$

Given

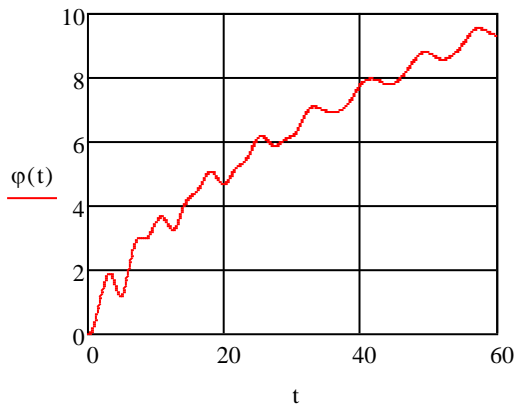
$$J \cdot \varphi''(t) - \frac{1}{2} \cdot (\eta_1 + 2 \cdot \eta_2 \cdot \varphi(t)) \cdot i(t)^2 + \beta \cdot \varphi'(t) + c \cdot \varphi(t) = \alpha \cdot \cos(\nu \cdot t) + \gamma \cdot \sin(\nu \cdot t)$$

$$(L_1 + \eta_1 \cdot \varphi(t) + \eta_2 \cdot \varphi(t)^2 + L_2) \cdot i'(t) + R \cdot i(t) + (\eta_1 + 2 \cdot \eta_2 \cdot \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot i(t) = E$$

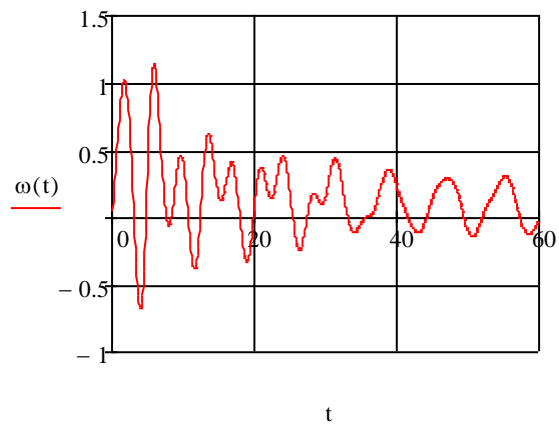
$$\varphi(0) = 0.0001 \quad \varphi'(0) = 0.0001 \quad i(0) = 0.1 \quad t := 0, 0.1 .. 60$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix}, t, 60 \right] \quad \omega(t) := \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad \varepsilon\varepsilon(t) := \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t)$$

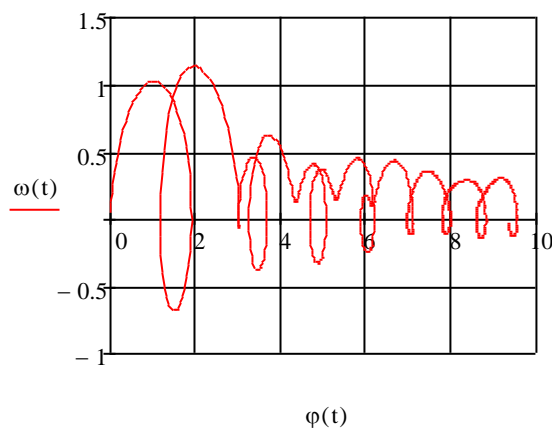
Результати моделювання представлені на графіках (рис. 3.4).



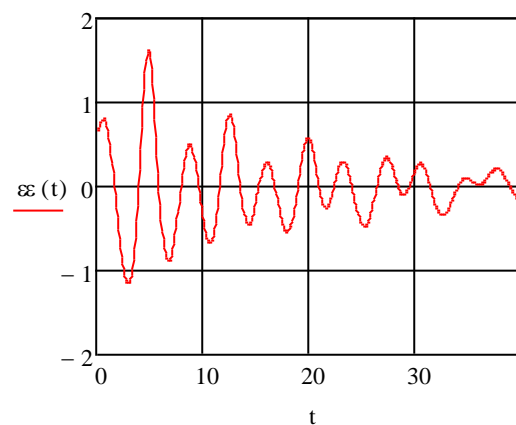
а)



б)



в)



г)

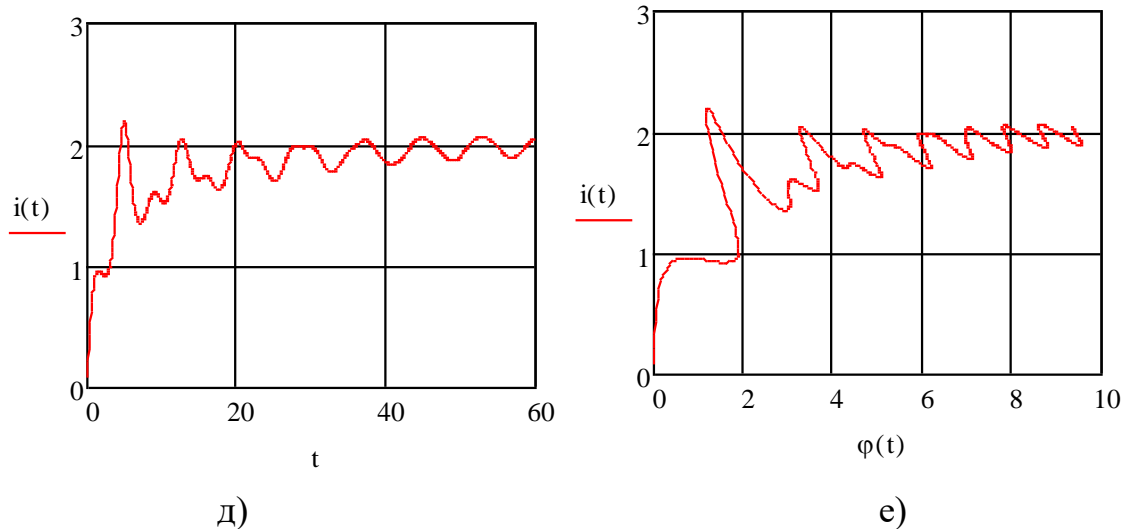


Рисунок 3.4 – Результати моделювання: а – залежність кута повороту від часу; б - залежність кутової швидкості від часу; в – фазовий портрет механічних коливань, г - залежність кутового прискорення від часу; д - залежність струму від часу; е - залежність струму від кута повороту вала.

Для порівняння розглянемо розв’язання цієї задачі в програмах Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей руху осі датчика, його кутової швидкості, зміни сили електричного струму в обмотці приладу від часу, а також фазові портрети представлені на рис. 3.5...3.10.

```

=> restart;
=> with(plots):
> J := 20: c := 20: alpha := 12: beta := 3: mu := 8: eta1 := 20:
eta2 := 4: L1 := 4: L2 := 20: v := Pi/4: R := 6: E := 30:
=
=> #Чисельне рішення системи диференціальних рівнянь
> sys := diff(phi(t), t) = p(t), diff(p(t), t) = epsilon(t), J*diff(p(t), t) +
beta*p(t) - 1/2*(eta1 + 2*eta2*phi(t))*i(t)^2 + c*phi(t) = alpha*cos(v*t) + mu*sin(v*t),
(L1 + eta1*phi(t) + eta2*phi(t)^2 + L2)*diff(i(t), t) +
=
((eta1 + 2*eta2*phi(t))*p(t) + R)*i(t) = E:
=> fcns := [phi(t), p(t), i(t), epsilon(t)]:
> dsol := dsolve({sys, phi(0) = 0.0001, p(0) = 0.0001, i(0) = 0.1}, fcns,
numeric, output = listprocedure):
=
=> #Побудова графіка руху осі датчика
> odeplot(dsol, [t, phi(t)], 0.01..60, numpoints = 500, title = 'Залежність кута повороту
осі датчика від часу', gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

**Залежність кута повороту осі датчика від часу**

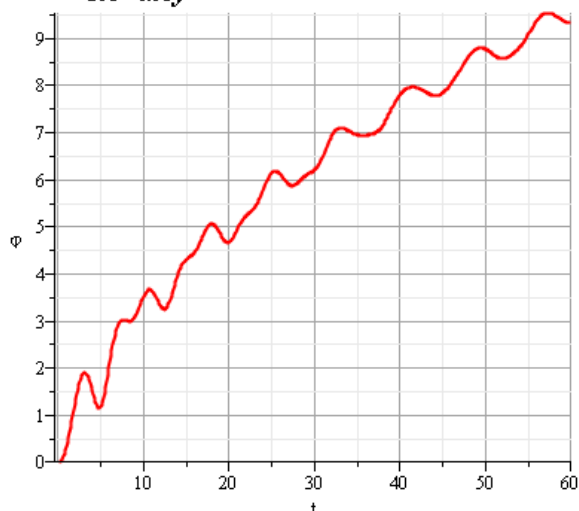


Рисунок 3.5 – Залежність кута повороту осі датчика ( $\phi$ ) від часу  $t$ .

- ```
=  
> #Побудова графіка зміни кутової швидкості осі датчика  
= > odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..60, numpoints = 500, title = 'Залежність кутової швидкості осі  
датчика від часу', color = blue, gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

**Залежність кутової швидкості осі датчика від часу**

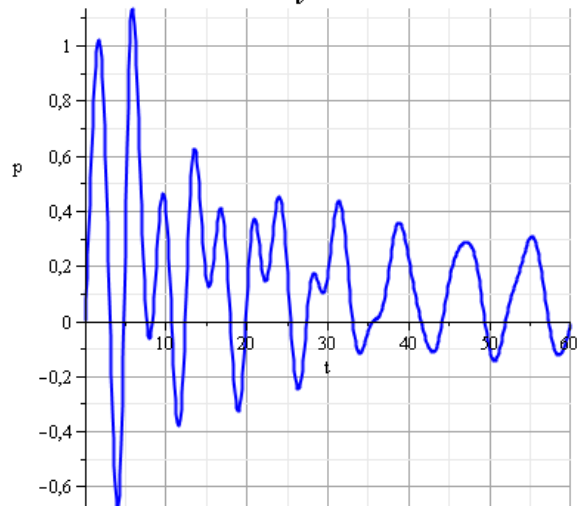


Рисунок 3.6 – Залежність кутової швидкості осі датчика ( $p$ ) від часу  $t$ .

- ```
=  
> #Побудова графіка зміни кутового прискорення осі датчика  
= > odeplot(dsol, [t, ε(t)], 0..60, numpoints = 500, title = 'Залежність кутового  
прискорення осі датчика від часу', gridlines = true, thickness = 2,  
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

**Залежність кутового прискорення осі датчика від часу**

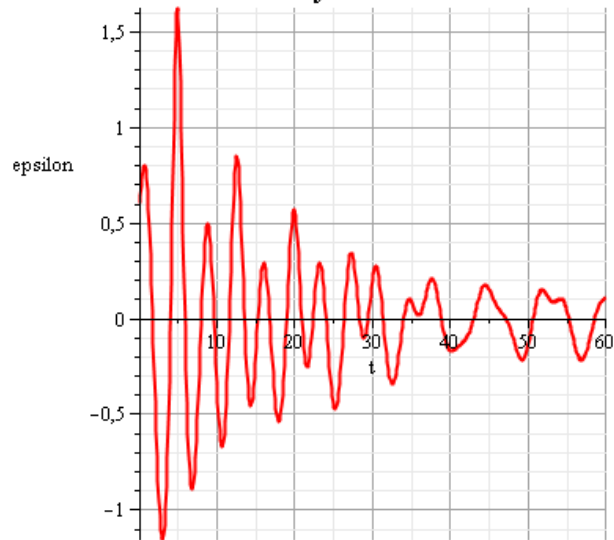


Рисунок 3.7 – Залежність кутового прискорення осі датчика ( $\epsilon$ ) від часу  $t$

```

=
> #Побудова графіка зміни сили електричного струму від часу
=
> odeplot(dsol, [t, i(t)], 0..60, numpoints = 500, title = 'Залежність сили
    струму від часу', gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

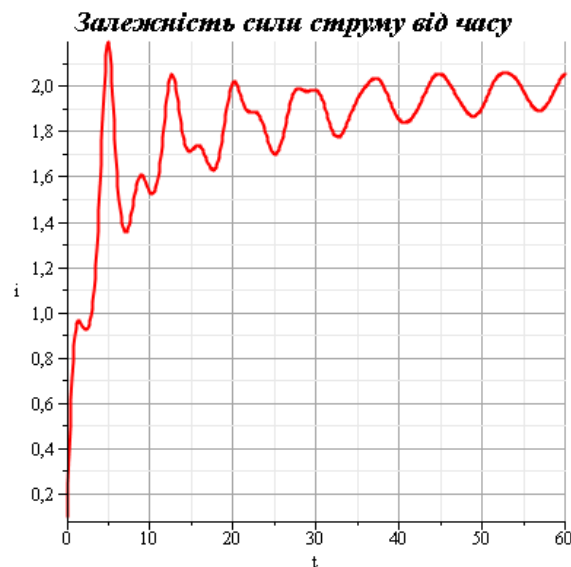


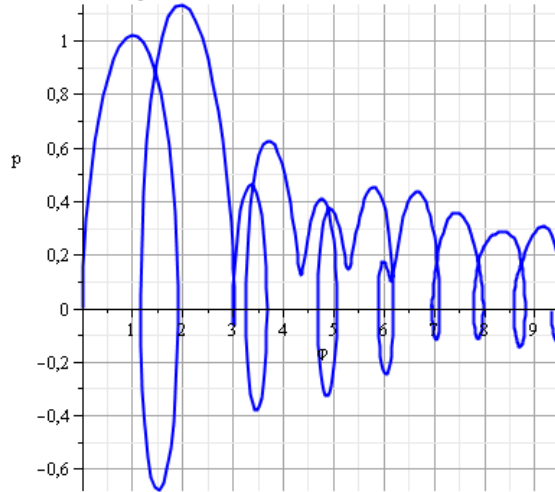
Рисунок 3.8 – Залежність сили струму в обмотці датчика ( $i$ ) від часу  $t$

```

=
> #Побудова фазових портретів
=
> odeplot(dsol, [\varphi(t), p(t)], 0..60, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет –
    кут повороту осі - кутова швидкість осі', color = blue, gridlines = true,
    thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

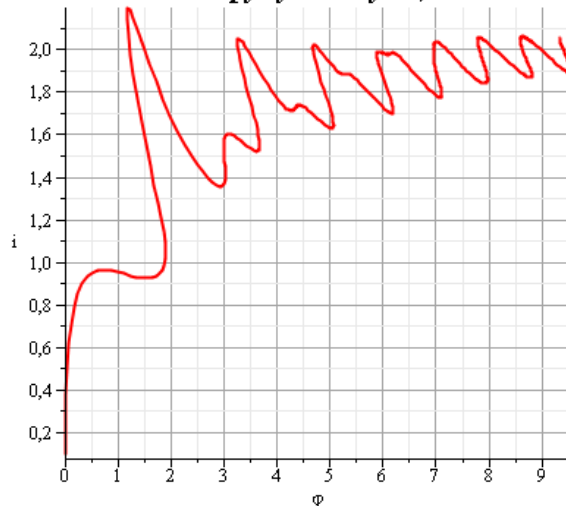
**Фазовий портрет — кут повороту осі  
— кутова швидкість осі**



*Рисунок 3.9 – Фазовий портрет: кут повороту осі датчика ( $\phi$ )  
- кутова швидкість осі датчика ( $p$ )*

`> odeplot(dsol, [ $\phi(t)$ ,  $i(t)$ ], 0..60, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет —  
кут повороту осі — сила струму в котушці', gridlines = true,  
thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);`

**Фазовий портрет — кут повороту осі  
— сила струму в котушці**



*Рисунок 3.10 – Фазовий портрет: кут повороту осі датчика ( $\phi$ )  
- сили струму в обмотці датчика ( $i$ )*

Таким чином визначено залежність струму від кута повороту вала.

Значення струму вимірюються амперметром  $A$ , який градуований в одиницях кута повороту  $i$ , отже, безпосередньо фіксує кути повороту валу, що здійснює крутильні коливання.



### 3.2 Ємнісний датчик малих зсувів

Розглянемо динаміку ємнісного датчика малих зсувів [10], представленого на рис. 3.11.

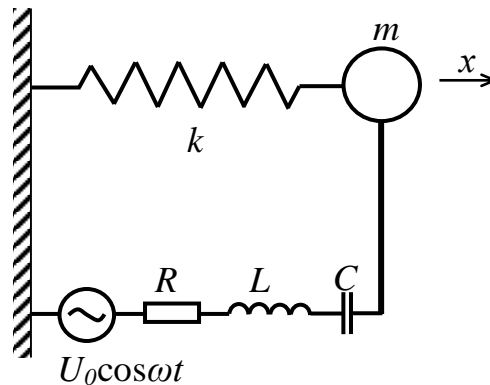


Рисунок 3.11 – Ємнісний датчик малих зсувів

Такий датчик являє собою конденсатор, одна з пластин якого з'єднана з тілом, зміщення якого потрібно виміряти. Конденсатор включений в ланцюг електричного коливального контуру, що містить джерело змінної напруги. Відомо, що в деякому діапазоні частот  $\omega$  при підвищенні напруги  $U_0$  вище критичної позначки виникають механічні автоколивання тіла маси  $m$ .

Рівняння системи мають вигляд

$$\ddot{q} + 2\delta_1 \dot{q} + \frac{C_0}{C(x)} \Omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\delta_2 \dot{x} + \nu_0^2 x = -\frac{1}{m} F(x, q),$$

де  $q$  – заряд на конденсаторі,

$C(x) = C_0 \cdot [1 + (x/d_0)]^{-1}$  – ємність конденсатора,

$\Omega_0 = (L \cdot C_0)^{-1/2}$  – власна частота електричного коливального контуру при  $x=0$ ,

$d_0$  – відстань між пластинами конденсатора при недеформованій пружині,

$m$  — маса кульки.

Сила тяжіння між пластинами конденсатора

$$F(x, q) = \frac{S q^2 \varepsilon_0 \varepsilon}{2C^2(x)(d_0 + x)^2} = \frac{q^2}{2C_0 d_0}.$$

Було проведено обчислювальний експеримент для наступних параметрів:  $\delta_1 = 3,77 \cdot 10^5$ ,  $\delta_2 = 0,031$ ,  $C_0 = 14,166 \cdot 10^{-12}$ ,  $U_0 = 220$ ,  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50$ ,  $v_0 = 2 \cdot \pi \cdot 0,1$ ,  $d_0 = 0.001$  при нульових початкових умовах.

Лістинг програми розрахунку в програмі MATHCAD:

```

S := 0.0004   Ω01 := 2·π·6·105   m1 := 0.004   Qe1 := 50   d0 := 0.001

C01 := 14.166·10-12   ω1m := 2·π·0.1   Qmax := 4·103   U0 := 220   ω := 2·π·50

L(Ω0, C0) :=  $\frac{1}{\Omega^2 \cdot C_0}$    L = f(any1, any2) → any1-2 · any2-1

R(Ω0, C0, Qe) :=  $\frac{\Omega \cdot L(\Omega, C_0)}{Q_e}$    R = f(any1, any2, any3) → any1-1 · any2-1 · any3-1

δ1(Ω0, C0, Qe) :=  $\frac{R(\Omega, C_0, Q_e)}{2 \cdot L(\Omega, C_0)}$ 

Коефіцієнт трення равен

r(ωm) :=  $\frac{\omega_m \cdot m}{Q_{max}}$    r = f(any1) → any1 · длина

Коефіцієнт затухання
равен

δ2(ωm) :=  $\frac{r(\omega_m)}{2 \cdot m}$    δ2 = f(any1) → any1

F(q, C0) :=  $\frac{q^2}{2 \cdot C_0 \cdot d_0}$    C(d, C0) :=  $\frac{C_0}{\left(1 + \frac{d}{d_0}\right)}$ 

Given

 $\frac{d^2}{dt^2} q(t) + 2 \cdot \delta_1(\Omega_0, C_0, Q_e) \cdot \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) + \frac{C_0}{C(x(t), C_0)} \cdot \Omega_0^2 \cdot q(t) = \frac{U_0}{L(\Omega_0, C_0)} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ 

 $\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2 \cdot \delta_2(\omega_m) \cdot \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + \omega_m^2 \cdot x(t) = \frac{-1}{m} \cdot F(q(t), C_0)$ 

x(0) = 0   x'(0) = 0   q(0) = 0   q'(0) = 0

FZ(m, ωm, C0, Ω0, Qe) := Odesolve  $\begin{bmatrix} q \\ x \end{bmatrix}, t, 0.2, 20000$    t := 0, 0.0001 .. 0.2

+
-----
X1 := FZ(0.0035, 2·π·10, 14.166·10-12, 1·π·6·105, 500)1

X2 := FZ(0.0035, 2·π·10, 14.166·10-12, 2·π·6·106, 500)1

X3 := FZ(0.004, 2·π·10, 14.166·10-12, 1·π·6·105, 500)1

X4 := FZ(0.004, 2·π·10, 14.166·10-12, 2·π·6·106, 500)1

```

Результати моделювання в програмі Mathcad представлені на рис. 3.12...3.15.

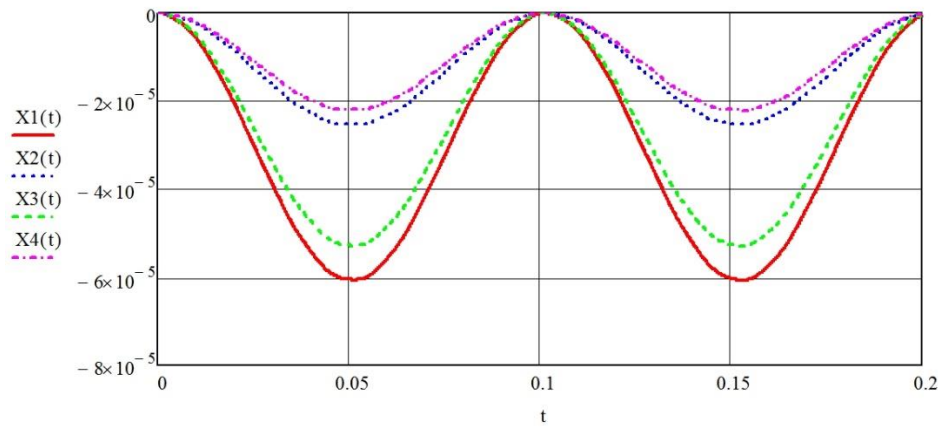


Рисунок 3.12 – Закон руху кульки в залежності від її маси і власна частота електричного коливального контуру:  $X1(m=0.0035, \Omega_0=\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X2(m=0.0035, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X3(m=0.004, \Omega_0=\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X4(m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$

З графіку на рис. 3.12 видно, що амплітуда коливань зменшується при збільшенні маси кульки і власної частоти електричного коливального контуру.

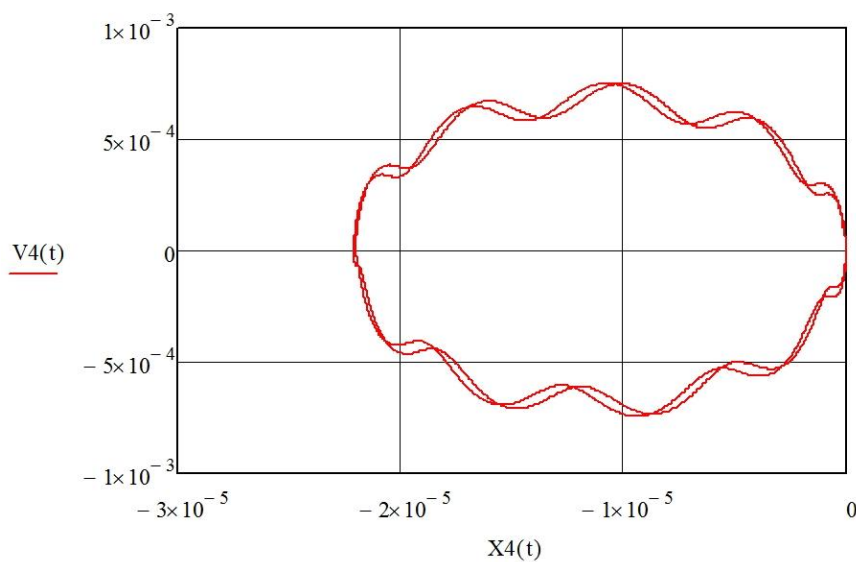


Рисунок 3.13 – Фазовий портрет, залежність швидкості кульки від її координати при:  $m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6$

Розрахунки показують, що при заданих параметрах коливання кульки переходять в стаціонарний режим за 0,1 с.

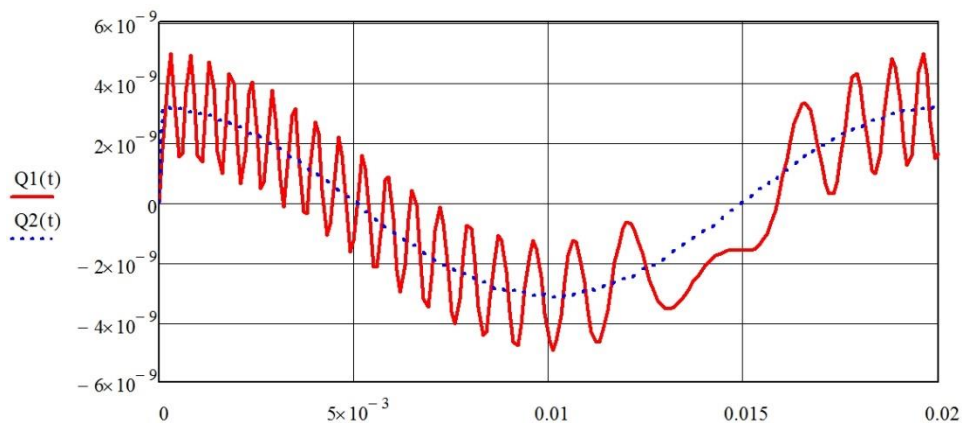


Рисунок 3.14 – Закон зміни заряду конденсатора з часом в залежності від маси кульки і власної частоти електричного коливального контуру:  
 $Q1(m=0.0035, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $Q2(m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$

З рис. 3.14 наочно видно залежність між механічними і електричними параметрами. Зміна маси кульки на 12,5% призвело до істотної зміни залежності заряду від часу.

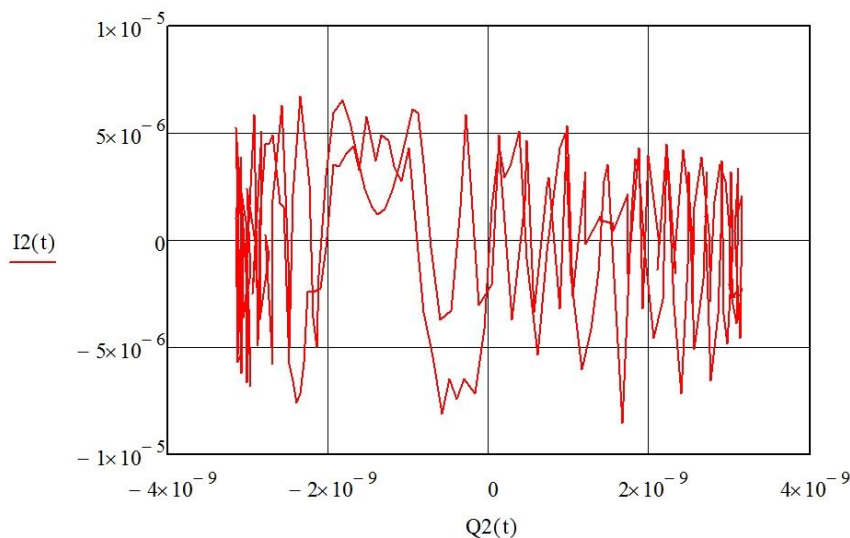


Рисунок 3.15 – Фазовий портрет для заряду і сили струму при:  $m=0.004$ ,  
 $\Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6$

Електричні коливання виглядають явно хаотично (рис. 3.15) на відміну від механічних коливань, які носять досить плавний характер.

### 3.3 Аналіз динамічних властивостей сейсмографа і акселерометра

В даному розділі розглядаються електромеханічні системи, для опису динаміки яких можна використовувати скінченновимірні моделі, тобто моделі, що вимагають завдання кінцевого числа незалежних

механічних і електричних параметрів. Головна увага звертається на етап складання замкнутої системи диференціальних рівнянь руху електромеханічної системи. Використовується електромеханічна аналогія сила - напруга. Наводиться ряд прикладів аналізу конкретних електромеханічних систем, а саме - акселерометрів і сейсмографів [7].

Розглянемо динаміку сейсмометра (рис. 3.16). До основи сейсмометра з індукційним перетворювачем прикріплена котушка з  $n$  витків радіуса  $r$ , поєднана з електричною реєструючою системою, схематизованою ланцюгом з самоіндукцією  $L$  і опором  $R$ . Магнітне сердечник створює радіальне магнітне поле, що характеризується в зазорі магнітною індукцією  $B$ , спирається на основу за допомогою пружин загальної жорсткості  $c$ . На сердечник так само діє сила опору, пропорційна його швидкості, що викликається демпфером, що створює силу опору  $\beta\dot{x}$ . Підстава сейсмометра здійснює малі вертикальні коливання за законом  $\xi = \xi_0 \sin \omega t$ . Узагальнені сили, що відповідають взаємодії котушки і магніту даються формулами  $Q_q = -2\pi n B \dot{x}$ ,  $Q_x = 2\pi n B \dot{q}$  ( $Q_q$  – електрорушійна сила, індукована в електричному ланцюзі, а  $Q_x$  – сила взаємодії котушки з магнітом).

Електромеханічна система, що складається з рухомого якоря, що здійснює поступальний рух, постійного магніту і електромагнітного механізму, має два ступені свободи. Виберемо узагальнені координати:  $x$  – переміщення якоря, визначає положення рухомої частини механізму,  $q$  (електричний заряд) – узагальнена координата, яка фіксує стан електричної частини ланцюга (рис. 3.17).

Цим узагальненим координатам відповідають рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q, \quad (3.14)$$

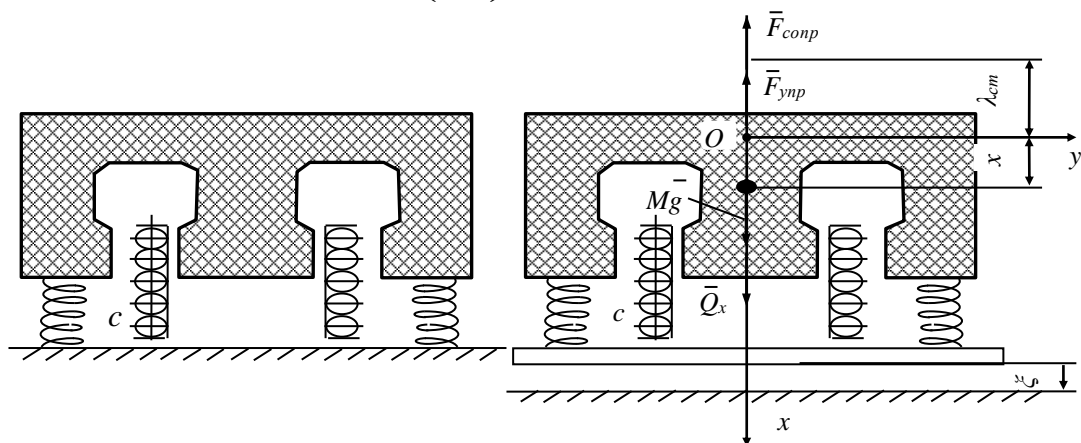


Рисунок 3.16 – Сейсмометр

Рисунок 3.17 – ЕМС сейсмометру

Кінетична енергія  $T$  електромеханічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії  $T_1$  механічної частини системи і електрокінетичної енергії  $T_2$  електричного кола:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2 .$$

З урахуванням втрати напруги знайдемо значення ЕРС в ланцюзі:

$$E^* = E - R \dot{q} .$$

Визначимо узагальнені сили:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{\text{упр}} \cdot \delta x - F_{\text{сomp}} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} = \\ &= Mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{сomp}} + Q_x^* = Mg - c(x + \lambda - \xi) - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q} , \\ Q_q &= \frac{\delta A}{\delta q} = E^* - Q_q^* = E - R \dot{q} - 2\pi n B \dot{x} . \end{aligned}$$

Знайдені вирази похідних від кінетичної енергії і узагальнених сил  $Q_x$  і  $Q_q$  підставимо в рівняння (3.13) і (3.14) і отримаємо рівняння, що визначають переміщення сердечника і струм в ланцюзі:

$$M \ddot{x} = Mg - cx - c\lambda - c\xi_0 \sin \omega t - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q} , \quad (3.15)$$

$$L \ddot{q} = E - R \dot{q} - 2\pi n B \dot{x} . \quad (3.16)$$

У положенні рівноваги системи

$$c\lambda_{\text{cm}} = Mg , \quad \dot{q} = i_0 = \frac{E}{R} .$$

Тоді рівняння руху системи (3.15) і (3.16) приймуть вид

$$\begin{aligned} M \ddot{x} + cx + \beta \dot{x} - 2\pi n B \dot{q} &= c\xi_0 \sin \omega t \\ L \ddot{q} + R \dot{q} + 2\pi n B \dot{x} &= 0 . \end{aligned}$$

Для моделювання роботи механізму задамося конкретними значеннями параметрів:  $M=6(\text{кг})$ ,  $c=75(\text{Н/м})$ ,  $\beta=2(\text{Н}\cdot\text{с/м})$ ,  $r=0.04(\text{м})$ ,  $n=200$ ,  $B=8(\text{мкТл})$ ,  $\omega=5(\text{с}^{-1})$ ,  $L=9(\text{мкГн})$ ,  $R=0.1(\text{Ом})$ ,  $\xi_0=0,0005(\text{м})$ .

Лістинг програми:

```

M := 6      c := 75      beta := 2      r := 0.04      n := 200      B := 0.000008
xi := 75    omega := 5      L := 0.000009  R := 0.1      xi0 := 0.0005

Given

M*x''(t) + c*x'(t) + beta*x(t) - 2*pi*r*n*B*q'(t) = -M*xi0*omega^2*sin(omega*t)

L*q''(t) + R*q'(t) + 2*pi*r*n*B*x'(t) = 0

x(0) = 0      x'(0) = 0.5
q(0) = 0      q'(0) = 0.25      t := 0, 0.1.. 100

(x
 q) := Odesolve([x
 q], t, 20)

v(t) := d/dt x(t)      i(t) := d/dt q(t)

```

Результати моделювання в програмі Mathcad представлені на графіках: на рис. 3.18 – (переміщення сердечника в функції часу) та рис. 3.19 – (зміна заряду в часі).

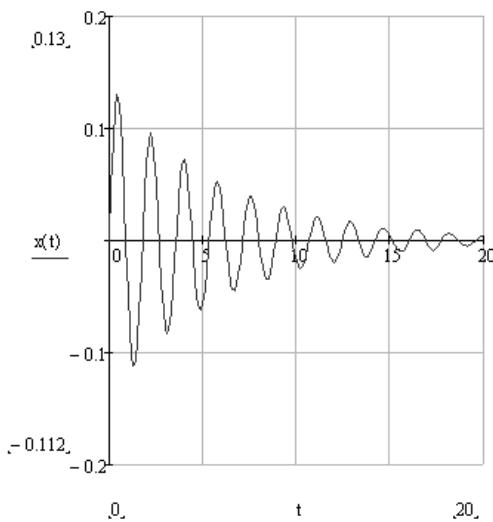


Рисунок 3.18 – Залежність  $x$  від часу

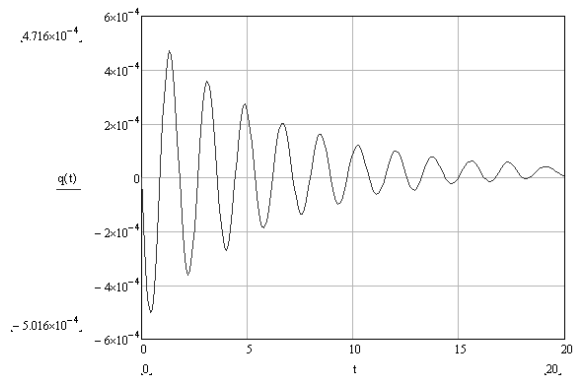


Рисунок 3.19 – Залежність  $q$  від часу

Траєкторії руху сердечника і зміни струму мають вигляд затухаючих коливань з частотою близькою до частоти власних коливань якоря на пружині  $\nu$  і періодом  $\tau$ , величини яких можна оцінити за формулами:

$$\nu \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \approx \sqrt{\frac{75}{6}} \approx 3,53 \text{c}^{-1}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2 \cdot 3,14}{3,53} \approx 1,8 \text{c}. \quad (3.17)$$

З рис. 3.20 і 3.21 видно, що десять коливань якоря і електричного заряду відбуваються протягом вісімнадцяти секунд, що і підтверджує вищевикладені затвердження. Загасання в системі визначається наявністю відповідних коефіцієнтів демпфірування. Усталеними значеннями положення якоря і значення струму будуть величини близькі до нуля. Коливання в системі, викликані кінематичним рухом підстави, практично не спостерігаються.

На наступних рис. 3.20 і 3.21 представлені фазові траєкторії руху сердечника і зміни струму. Вони сходяться до нульового значення за координатами і швидкостями.

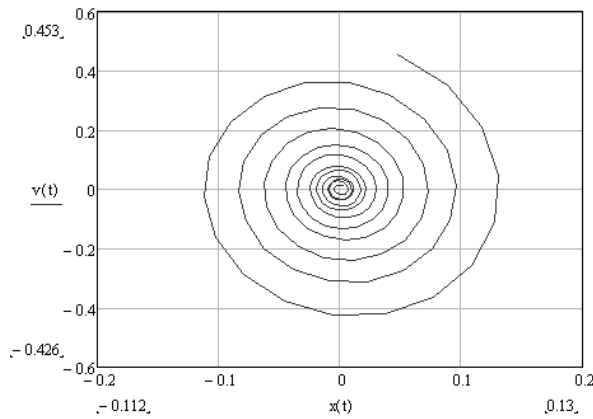


Рисунок 3.20 – Фазовий портрет в координатах  $x'(t)$ - $x(t)$ .

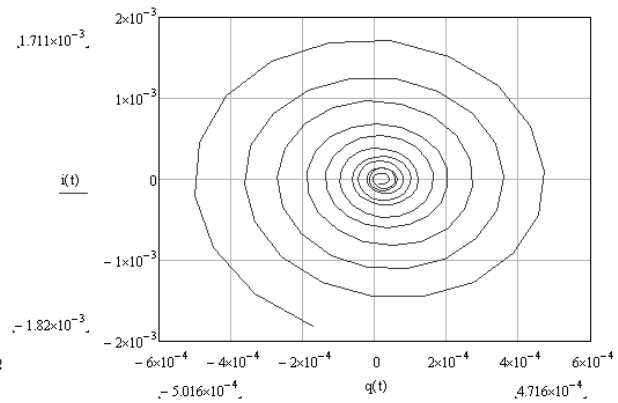


Рисунок 3.21 – Фазовий портрет в координатах  $q'(t)$ - $q(t)$ .

Виконаємо моделювання цієї системи в програмі Wolfram Mathematica. Лістинг програми:

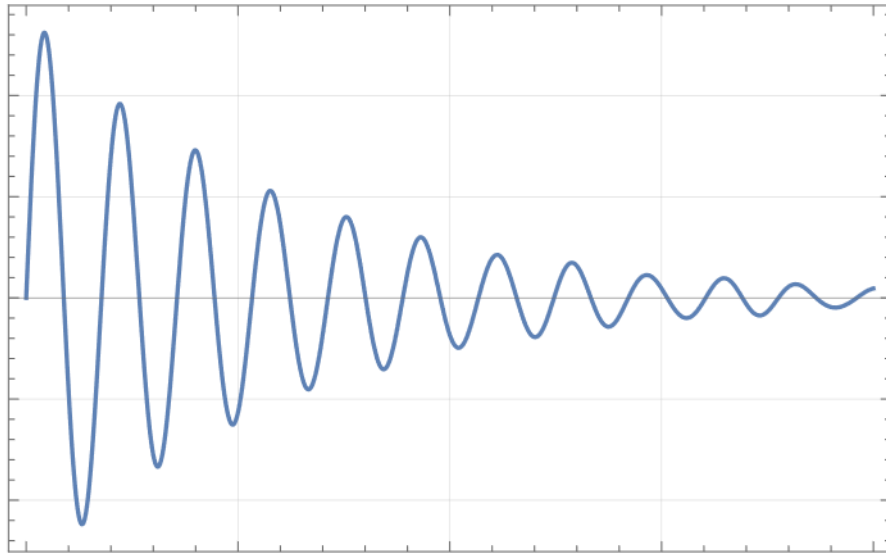
```

In[273]:= Remove["Global`*"]
          |удалить символ
With[{M = 6, c = 75, beta = 2, n = 200, B = 0.000008, r = 0.04, xi = 75, omega = 5, L = 0.000009, R = 0.1,
      |используя
      xi0 = 0.0005},
sol = NDSolve[{M*x''[t] + c*x[t] + beta*x'[t] - 2*pi*r*n*B*q'[t] == -M*xi0*(omega^2)*Sin[omega*t],
              |численно решить ДУ
              L*q''[t] + R*q'[t] + 2*pi*r*n*B*x'[t] == 0, x[0] == 0, q[0] == 0, x'[0] == 0.5, q'[0] == 0.25},
            {x, q}, {t, 0, 20}]]
In[290]:= Plot[Evaluate[{x[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          |гр... |вычислить |линии коор... |автоматич... |рамка |истине
In[300]:= Plot[Evaluate[{q[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          |гр... |вычислить |линии коор... |автоматич... |рамка |истине
In[310]:= ParametricPlot[{x'[t], x[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          |график параметрически заданной области на плоскости |линии коор... |автоматич... |рамка |истине
In[320]:= ParametricPlot[{q'[t], q[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          |график параметрически заданной области на плоскости |линии коор... |автоматич... |рамка |истине

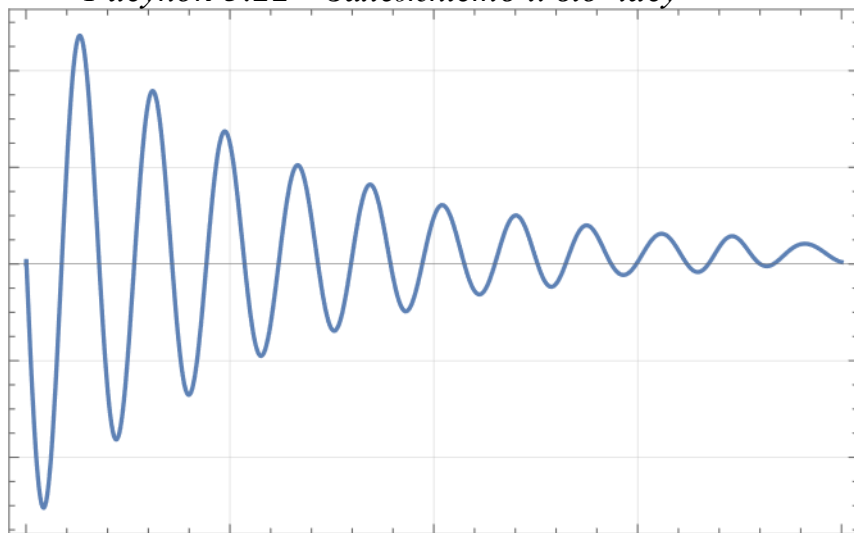
```

Отримаємо графіки на рис. 3.22...3.25, що аналогічні рис. 3.18...3.21.

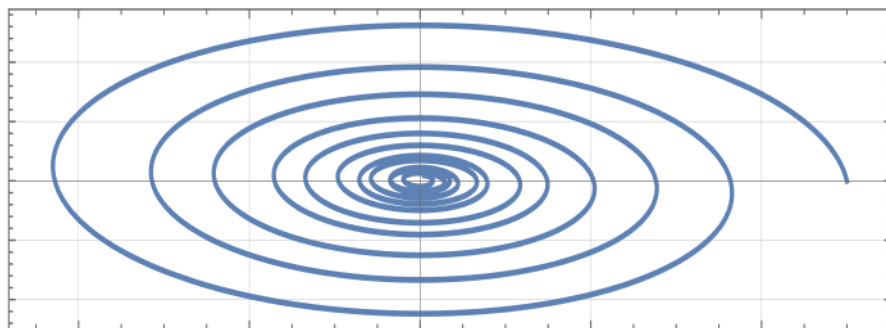




*Рисунок 3.22 – Залежність  $x$  від часу*



*Рисунок 3.23 – Залежність  $q$  від часу*



*Рисунок 3.24 – Фазовий портрет в координатах  $x'(t)$ - $x(t)$*

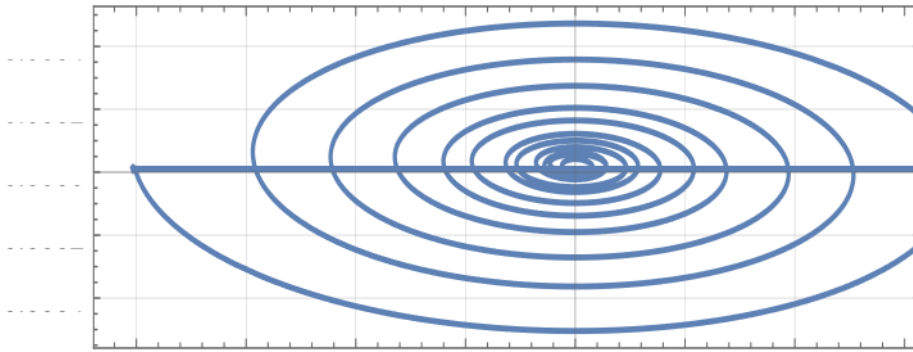


Рисунок 3.25 – Фазовий портрет в координатах  $q'(t)$ - $q(t)$

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в програмі Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей руху якоря сейсмографа, його швидкості, зміни електричного заряду і сили електричного струму в обмотці приладу від часу, а також фазові портрети представлені на рис. 3.26...3.31.

```

=
> restart,
=
> with(plots) :
=
> M := 6 : c := 75 : r := 0.04 : n := 200 : beta := 2 :
  L := 0.000009 : B := 0.000008 : R := 0.1 : xi0 := 0.0005 :
  omega := 5 :
=
> #Чисельне рішення диференційного рівняння
  #руху якоря сейсмографа
=
> sys := diff(x(t), t) = p(t), M·diff(p(t), t) + c·x(t) + beta·p(t) -
  2·Pi·r·n·B·m(t) = M·xi0·omega2·sin(omega·t),
  diff(q(t), t) = m(t), L·diff(m(t), t) + R·m(t) + 2·Pi·r·n·B·p(t) = 0 :
=
> fcn := [x(t), p(t), q(t), m(t)] :
> dsol := dsolve({sys, x(0) = 0, p(0) = 0.5, q(0) = 0, m(0) = 0.25},
  fcn, numeric, output = listprocedure) :
=
> #Побудова графіка руху якоря сейсмографа
> odeplot(dsol, [t, x(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Залежність
  переміщення якоря від часу', gridlines = true, thickness = 2,
  titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

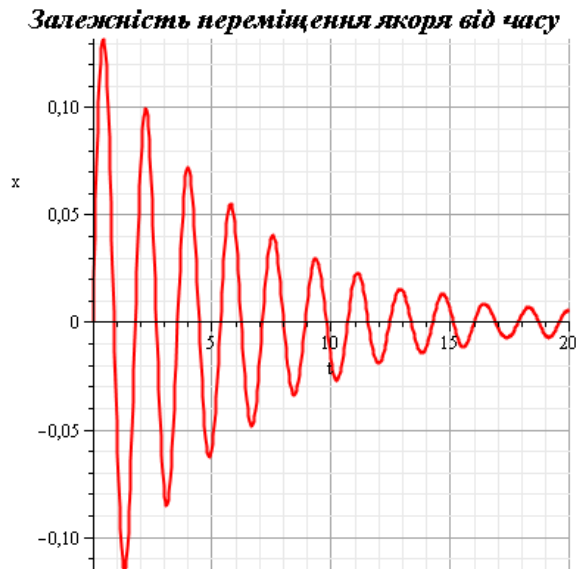


Рисунок 3.26 – Залежність переміщення якоря сейсмографа ( $x$ ) від часу  $t$

```
> #Побудова графіка зміни швидкості якоря сейсмографа
> odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Залежність швидкості
якоря від часу', color = blue, gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

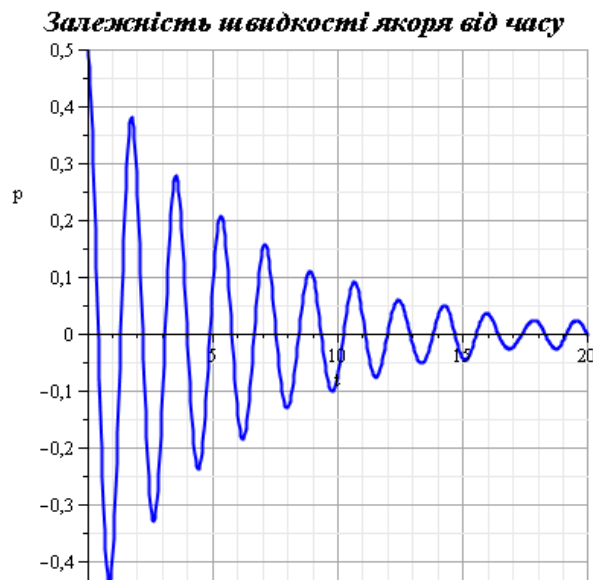


Рисунок 3.27 – Залежність швидкості якоря сейсмографа ( $p$ ) від часу  $t$

```
> #Побудова графіка зміни електричного заряду від часу
> odeplot(dsol, [t, q(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Залежність
електричного заряду від часу', gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

**Залежність електричного заряду від часу**

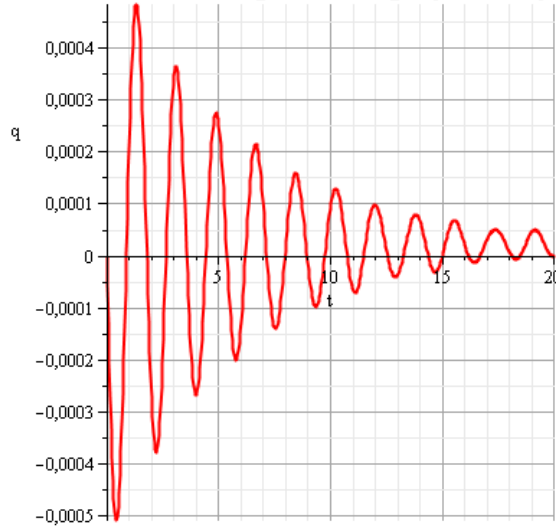


Рисунок 3.28 – Залежність електричного заряду в обмотці приладу ( $q$ ) від часу  $t$

```
> #Побудова графіка зміни електричного струму від часу  
> odeplot(dsol, [t, m(t)], 0..0.001, numpoints = 500, title = 'Залежність  
сили струму від часу', gridlines = true, thickness = 2, color = blue,  
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

**Залежність сили струму від часу**

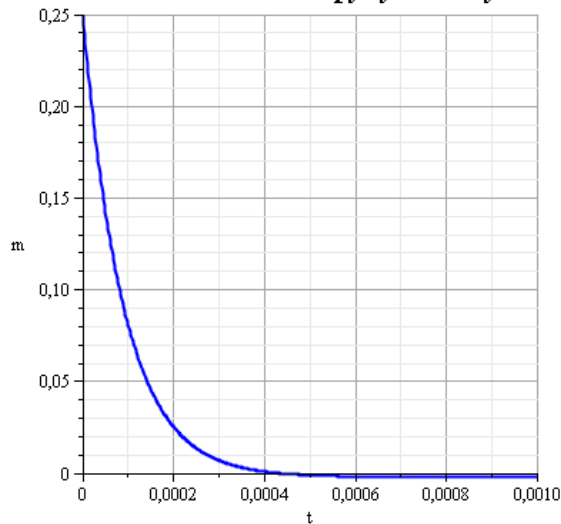
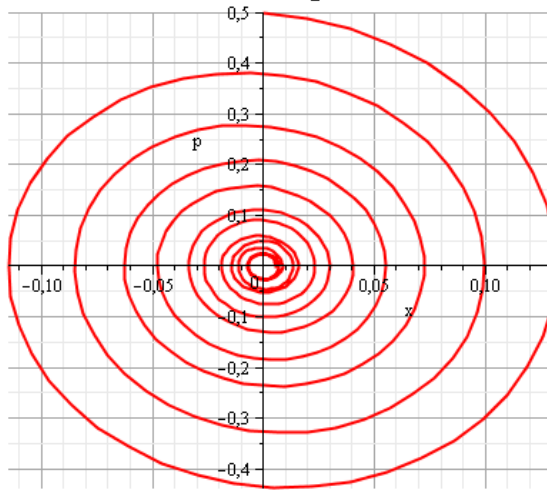


Рисунок 3.29 – Залежність сили струму в обмотці приладу ( $m$ ) від часу  $t$

```
> #Побудова фазових портретів  
> odeplot(dsol, [x(t), p(t)], 0..20, numpoints = 500, title = 'Фазовий  
портрет – переміщення якоря – швидкість якоря', gridlines = true,  
thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

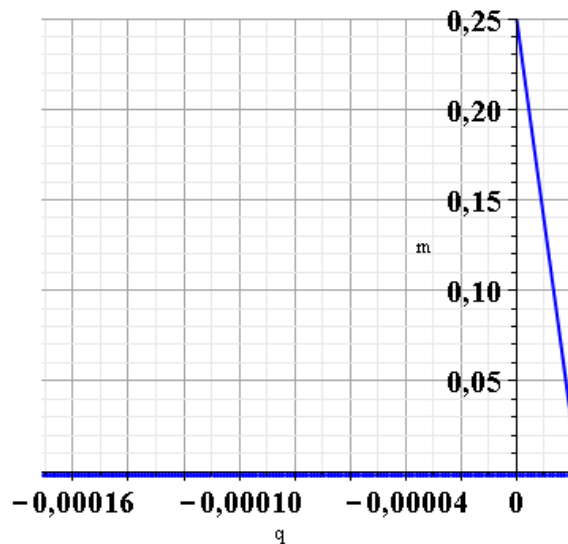
**Фазовий портрет – переміщення якоря  
– швидкість якоря**



**Рисунок 3.30 – Фазовий портрет  
«переміщення якорю ( $x$ ) - швидкість якорю ( $p$ )»**

```
> odeplot(dsol, [q(t), m(t)], 0..0.1, numpoints = 500, title = 'Фазовий  
портрет -електричний заряд – сила струму',  
gridlines = true, thickness = 2, color = blue, font = [TIME, bold, 16]);
```

**Фазовий портрет – електричний заряд  
– сила струму**



**Рисунок 3.31 – Фазовий портрет  
«електричний заряд ( $q$ ) - сила струму ( $m$ )»**

Досліджуємо іншу електромеханічну систему (рис. 3.32) що складається з циліндричного постійного магніту з концентричними полюсами  $A$ , які створюють радіальне поле, і якоря маси  $M$ , що спирається на пружину жорсткості  $c$ . Якір з'єднаний з котушкою, що складається з  $n$  витків, і з механічним демпфером, опір якого пропорційний швидкості якоря (коефіцієнт опору  $\beta$ ); середній радіус котушки  $r$  її самоіндукція  $L$ ,

опір  $R$ , магнітна індукція в зазорі магніту  $B$ . До затискачів котушки прикладена змінна напруга  $V(t)$ . Узагальнені сили, що відповідають взаємодію котушки і магніту даються тими ж формулами  $Q_q = -2\pi n B \dot{x}$ ,  $Q_x = 2\pi n B \dot{q}$ .

Електромеханічна система складається з рухомого якоря, що здійснює поступальний рух, постійного магніту і електромагнітного механізму і має два ступені свободи. Виберемо узагальнені координати:  $x$  - переміщення якоря, визначає положення рухомої частини механізму,  $q$  - узагальнена координата фіксує стан електричної частини ланцюга (рис. 3.33).

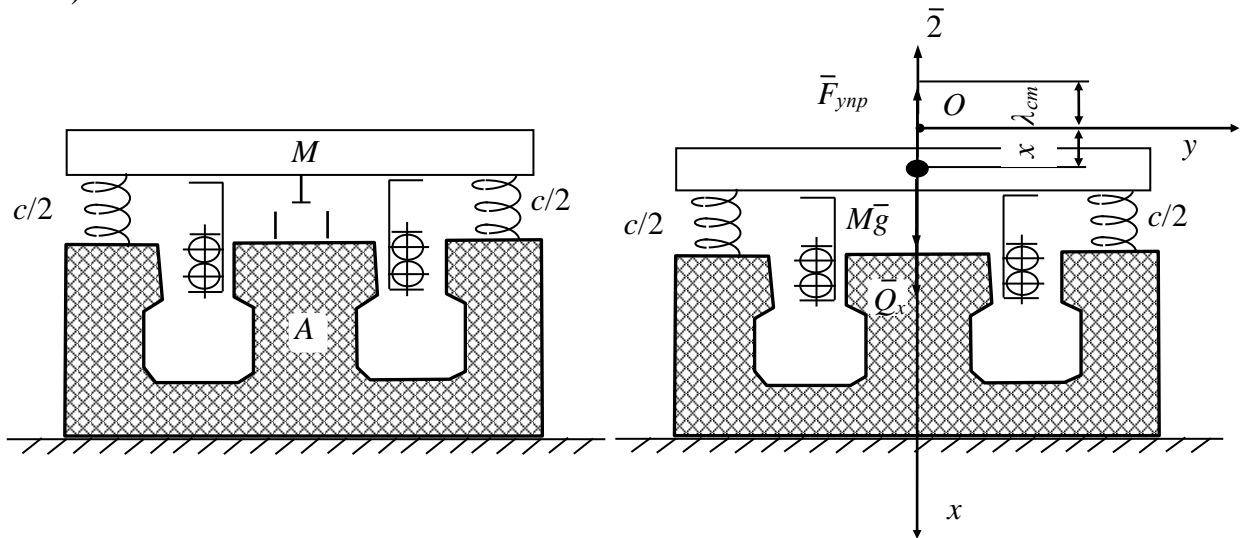


Рисунок 3.32 – Сейсмометр

Рисунок 3.33 – ЕМС сейсмометру

Цим узагальненим координатам відповідають рівняння Лагранжа 2-го роду такі ж як (3.13) - (3.14).

Кінетична енергія  $T$  електромеханічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії  $T_1$  механічної частини системи і електрокінетической енергії  $T_2$  електричного кола:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2.$$

Узагальнені сили:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{ynp} \cdot \delta x - F_{conp} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} = \\ &= Mg - F_{ynp} - F_{conp} + Q_x^* = Mg - c(x + \lambda) - \beta \dot{x} + 2\pi n B \dot{q}, \\ Q_q &= \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q - Q_q^* \cdot \delta q + V(t) \cdot \delta q}{\delta q} = E^* + V(t) - Q_q^* = \\ &= E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi n B \dot{x}. \end{aligned}$$

Знайдені вирази похідних від кінетичної енергії і узагальнених сил  $Q_x$  і  $Q_q$  підставимо в рівняння (3.13) і (3.14) і отримаємо рівняння руху системи:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi n B \dot{q}, \\ L\ddot{q} &= E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi n B \dot{x}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

У положенні рівноваги системи  $c\lambda = Mg$ ,  $\dot{q} = i_0 = \frac{E}{R}$ .

Тоді рівняння руху системи (3.17) і (3.18) приймуть вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi n B \dot{q} &= 0, \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi n B \dot{x} &= V(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Будемо вважати, що напруга змінюється за гармонійним законом  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ .

Виконаємо моделювання роботи пристрою при наступних параметрах:  $M=3(\text{кг})$ ,  $c=50(\text{Н/м})$ ,  $\beta=2(\text{Н}\cdot\text{с/м})$ ,  $r=0.04(\text{м})$ ,  $n=20$ ,  $B=4(\text{мкТл})$ ,  $V_0=10(\text{В})$ ,  $\omega=10(\text{с}^{-1})$ ,  $L=8(\text{мкГн})$ ,  $R=25(\text{Ом})$ .

Лістинг програми:

```

M := 3      c := 50      beta := 2      r := 0.04      n := 20      B := 4
omega := 10  L := 8      R := 25      V0 := 10

Given

M*x''(t) + c*x(t) + beta*x'(t) - 2*pi*r*n*B*q'(t) = 0

L*q''(t) + R*q'(t) + 2*pi*r*n*B*x'(t) = V0*sin(omega*t)

x(0) = 0    x'(0) = 0.1

q(0) = 0.01  q'(0) = 0.02    t := 0, 0.1 .. 20

(x) := Odesolve[ (x), t, 20 ] +
(q)

v(t) := d/dt x(t)    i(t) := d/dt q(t)

```

Результати розрахунків представлені на графіках переміщення, зміни заряду (рис. 3.34, 3.35) і фазових траєкторіях (рис. 3.36, 3.37).

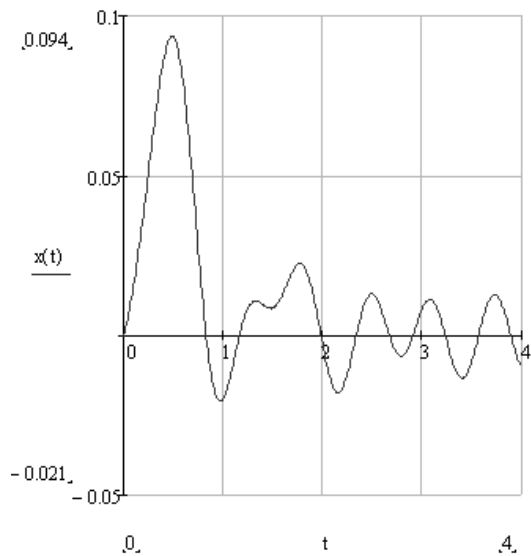


Рисунок 3.34 – Залежність  $x$  від часу

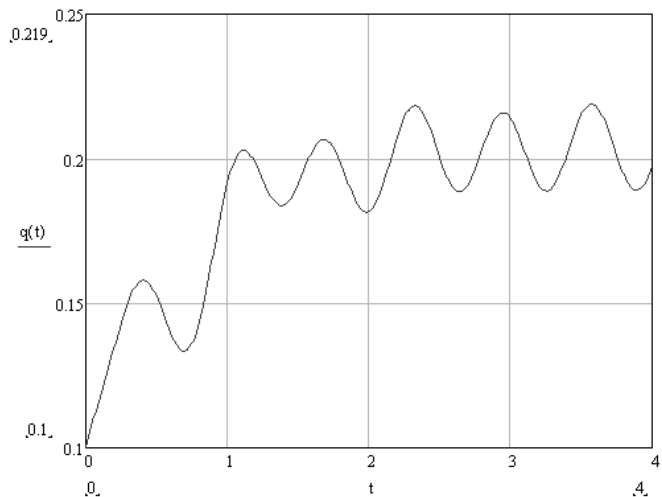


Рисунок 3.35 – Залежність  $q$  від часу

Як і в попередній задачі траєкторії руху сердечника і зміни струму мають вигляд затухаючих коливань з виходом на сталий режим через три секунди після початку коливань. Частота цих коливань визначається частотою  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$  динамічного збудження електричного контуру. З рис. 3.34 і 3.35 видно, що п'ять коливань якоря і електричного заряду відбуваються в перебігу порядку 3,1 секунди, що дає період приблизно 0,62 секунди. При цьому частоту  $\nu$  власних коливань якоря на пружині з періодом  $\tau$  оцінимо за формулами:

$$\nu \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \approx \sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4,1 \text{ с}^{-1}; \quad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2 \cdot 3,14}{4,1} \approx 1,5 \text{ с}.$$

Частота порушення електричного контуру вище частоти  $\nu$  власних коливань якоря на пружині, що і визначає характер цього руху. Слід зазначити, що електричний заряд  $q$  при цьому прагне до значення 0,21 а, як це впливає з рисунків 3.32 і 3.33 і того, що  $q$  - циклічна координата в рівнянні (3.19). Вплив власних коливань спостерігається протягом перших трьох секунд.



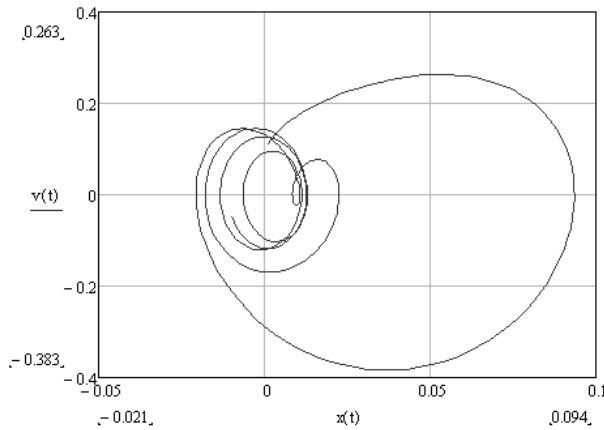


Рисунок 3.36 – Фазовий портрет в координатах  $x'(t)$ - $x(t)$

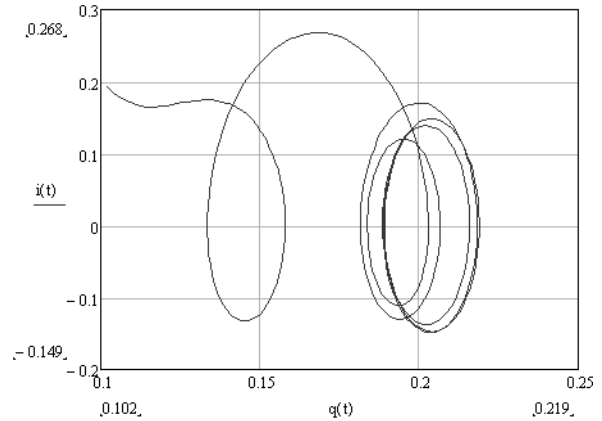


Рисунок 3.37 – Фазовий портрет в координатах  $q'(t)$ - $q(t)$

Виконаємо моделювання цієї системи в програмі Wolfram Mathematica. Лістинг програми:

```

In[38]:= Remove["Global`*"]
          удалить символ
With[{M = 3, c = 50, beta = 2, n = 20, B = 4, r = 0.04, xi = 75, omega = 10, L = 8, R = 25, V0 = 10},
      используя
      sol = NDSolve[{M*x''[t] + c*x[t] + beta*x'[t] - 2*pi*r*n*B*q'[t] == 0,
                   L*q''[t] + R*q'[t] + 2*pi*r*n*B*x'[t] == V0*Sin[omega*t], x[0] == 0, q[0] == 0.01,
                   x'[0] == 0.1, q'[0] == 0.02}, {x, q}, {t, 0, 20}]]
In[41]:= Plot[Evaluate[{x[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          гр... | вычислить | линии коор... | автоматич... | рамка | истине
In[42]:= Plot[Evaluate[{q[t]} /. sol[[1]]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          гр... | вычислить | линии координатной сетки | рамка | истине
In[43]:= ParametricPlot[{x'[t], x[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          график параметрически заданной области на плоскости | линии коор... | автоматич... | рамка | истине
In[44]:= ParametricPlot[{q'[t], q[t]} /. sol[[1]], {t, 0, 20}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          график параметрически заданной области на плоскости | линии коор... | автоматич... | рамка | истине

```

Отримаємо графіки (рис. 3.38...3.41), що аналогічні рис. 3.37...3.37.

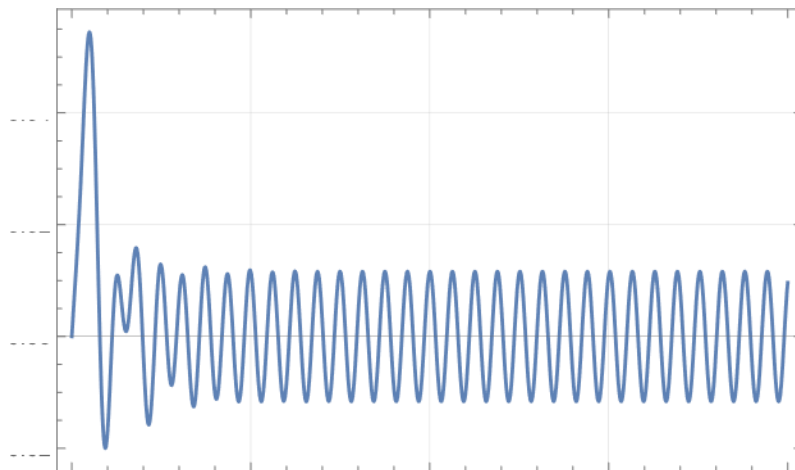
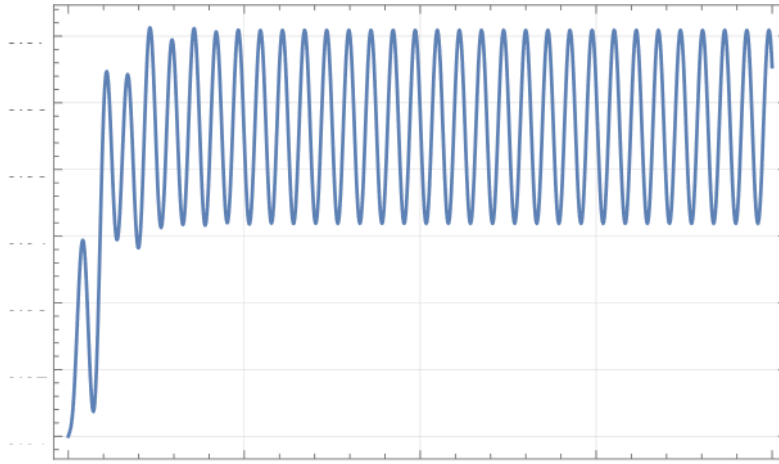
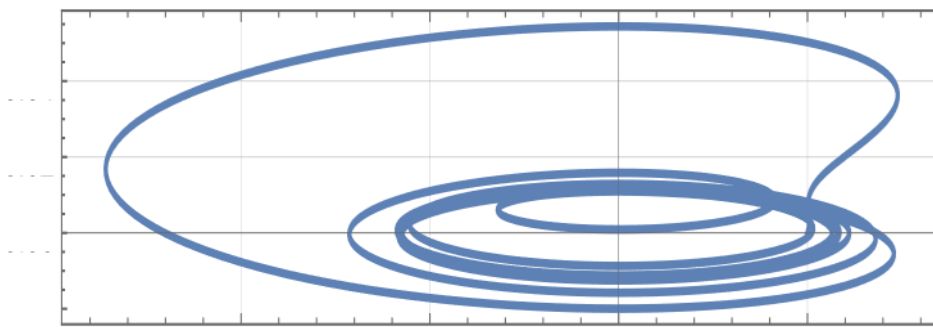


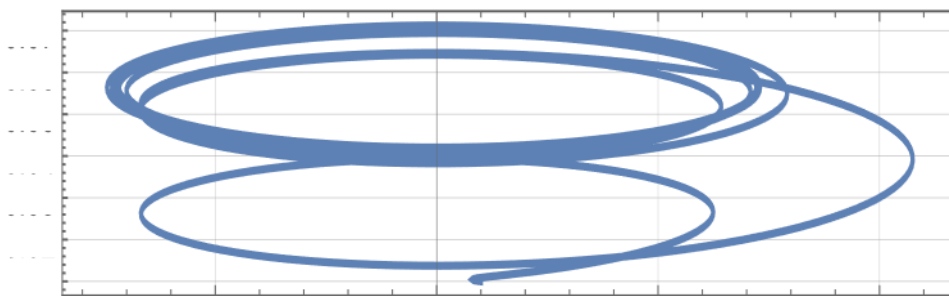
Рисунок 3.38 – Залежність  $x$  від часу



*Рисунок 3.39 – Залежність  $q$  від часу*



*Рисунок 3.40 – Фазовий портрет в координатах  $x'(t)$ - $x(t)$*



*Рисунок 3.41 – Фазовий портрет в координатах  $q'(t)$ - $q(t)$*

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в програмі Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей руху якоря акселерометра, його швидкості, зміни електричного заряду і сили електричного струму в обмотці приладу від часу, а також фазові портрети представлені на рис. 3.42...3.47.

```

"
> restart,
"
> with(plots) :
"
> M := 3 : c := 50 : r := 0.04 : n := 20 : beta := 2 :
  L := 8 : B := 4 : R := 25 : V0 := 10 : omega := 10 :
"
> #Чисельне рішення диференційного рівняння
  #руху якоря приладу
"
> sys := diff(x(t), t) = p(t), M·diff(p(t), t) + c·x(t) + beta·p(t)
  - 2·Pi·r·n·B·m(t) = 0, diff(q(t), t) = m(t), L·diff(m(t), t)
  + R·m(t) + 2·Pi·r·n·B·p(t) = V0·sin(omega·t) :
"
> fcn := [x(t), p(t), q(t), m(t)] :
"
> dsol := dsolve({sys, x(0) = 0, p(0) = 0.1, q(0) = 0.01, m(0) = 0.02},
  fcn, numeric, output = listprocedure) :
"
> #Побудова графіка руху якоря приладу
"
> odeplot(dsol, [t, x(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Залежність
  переміщення якоря від часу', gridlines = true, thickness = 2,
  titlefont = [TIME, bold, 16]);

```



Рисунок 3.42– Залежність переміщення якоря акселерометра ( $x$ ) від часу  $t$

```

"
> #Побудова графіка зміни швидкості якоря акселерометра
"
> odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Залежність швидкості
  якоря від часу', color = blue, gridlines = true, thickness = 2,
  titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

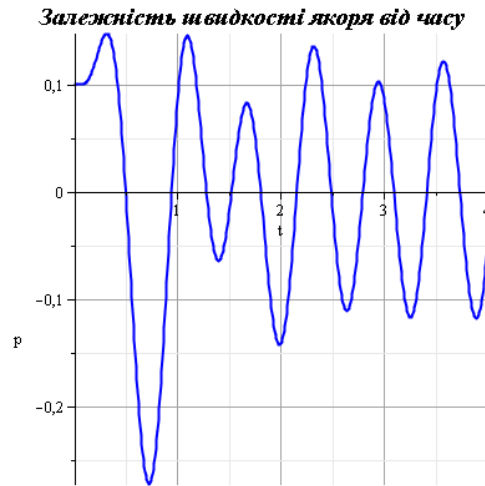


Рисунок 3.43 – Залежність швидкості якоря акселерометра ( $p$ ) від часу  $t$ .

```

-
> #Побудова графіка зміни електричного заряду від часу
=
> odeplot(dsol, [t, q(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Залежність
електричного заряду від часу', gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

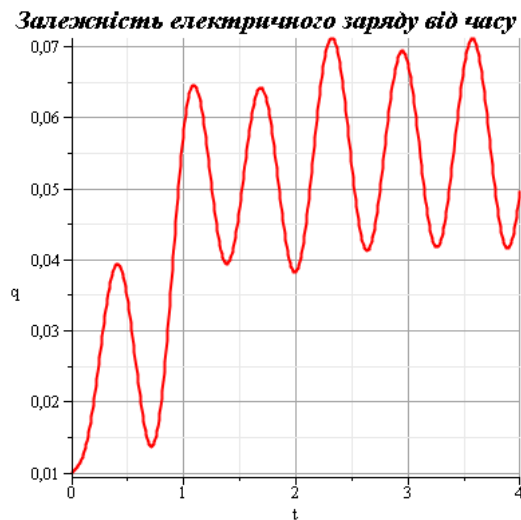


Рисунок 3.44 – Залежність електричного заряду в обмотці приладу ( $q$ ) від часу  $t$

```

-
> #Побудова графіка зміни сили електричного струму
#від часу
=
> odeplot(dsol, [t, m(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Залежність сили
струму від часу', gridlines = true, thickness = 2, color = blue,
titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

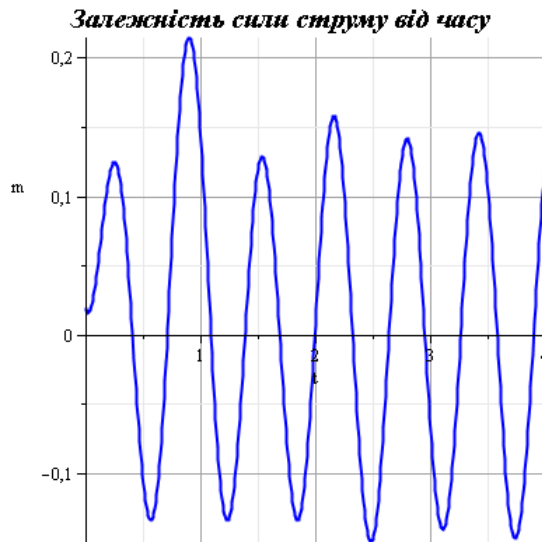


Рисунок 3.45 – Залежність сили струму в обмотці приладу ( $m$ ) від часу  $t$

```

=
> #Побудова фазових портретів
> odeplot(dsol, [x(t), p(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет
- переміщення якоря – швидкість якоря', gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);

```



Рисунок 3.46 – Фазовий портрет  
«переміщення якоря ( $x$ ) - швидкість якоря ( $p$ )»

```

> odeplot(dsol, [q(t), m(t)], 0..4, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет –
електричний заряд – сила струму', gridlines = true, thickness = 2,
color = blue, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

### Фазовий портрет – електричний заряд

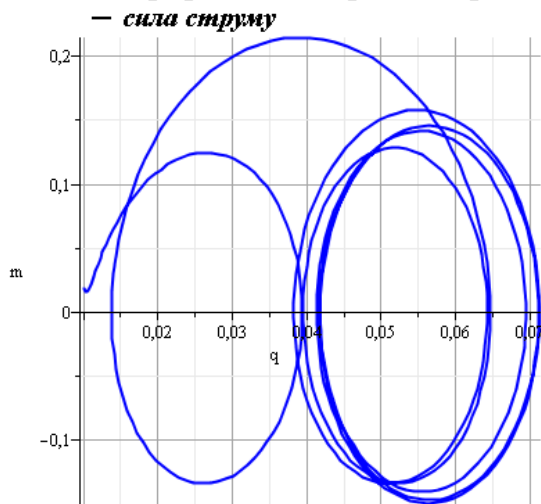


Рисунок 3.47 – Фазовий портрет  
«електричний заряд ( $q$ ) - сила струму ( $m$ )»

## 3.4 Дослідження вимірювальних перетворювачів фотоелектричного типу

### 3.4.1 Характеристика вимірювальних перетворювачів фотоелектричного типу

Аналіз технічних задач контролю об'єктів (наявність, положення, геометричні й габаритні параметри, швидкість, температура, якість поверхні) показав, що реалізація їх здійснюється за допомогою спеціалізованих первинних перетворювачів, заснованих на різноманітних фізичних принципах роботи, що зумовлює їхню значну кількість і різноманітність на виробництві [26,27].

Застосування аналогових інформаційних сигналів у вимірювальних перетворювачах ускладнено наявністю переважно безперервних збурюючих впливів, що обумовлено специфікою теплотехнічного виробництва. При застосуванні одиночних імпульсів, енергія переданих сигналів еквівалентна, а в деяких випадках значно менше енергетичних характеристик середі їхнього розповсюдження. При роботі таких пристроїв в екстремальних умовах значно підвищується ймовірність отримання хибної інформації або пропуску корисного сигналу. Поява цих помилок контролю обумовлена низькою перешкодозахищеністю вимірювальних перетворювачів і, як наслідок, низькою достовірністю одержуваної первинної інформації [27,28]. Це обумовлює виникнення аварійних ситуацій у роботі промислового устаткування, що призводять до значних матеріальних витрат. З іншого боку, велика кількість датчиків на об'єкті автоматизації визначає підвищені вимоги до швидкодії інформаційної системи, тому що ефективність системи управління

визначається швидкісними і якісними показниками використаних первинних перетворювачів.

Проте, існуючі фотоелектричні перетворювачі аналогового й імпульсного типу при роботі в екстремальних умовах виробництва у значній мірі схильні до дії оптичних і електромагнітних перешкод, що призводять до видозміни інформаційного сигналу. Виявлено, що при визначенні об'єктів при оптичній локації на основі синхронного накопичення «пачки» імпульсів більш ніж на порядок підвищується співвідношення сигнал-перешкода, що підвищує достовірність вимірювальної інформації. Водночас, велика кількість інформаційних імпульсів у «пачці» (кілька сотень) значно знижує швидкодію системи контролю [27,29].

Таким чином, підвищення швидкодії та достовірності контролю технологічних параметрів об'єктів контролю є найважливішою виробничою задачею.

При проектуванні фотоелектричних вимірювальних перетворювачів (ФЕВП) як засобів первинного контролю параметрів об'єктів слід звернути увагу на завдання, що виконуються конкретним перетворювачем, можливість інтеграції його в локальну інформаційну систему контролю, а так само можливість поєднання функцій контролю. ФЕВП повинен бути простий в роботі, надійний, мати уніфікований набір блоків (ремонтоздатен) [29,30].

В результаті комплексного аналізу всіх наявних ФЕВП з різними видами інформаційних оптичних сигналів, їх структурної організації, специфіки їх функціонування і вирішуваних завдань можна виділити три основні групи ФЕВП (рис. 3.48), що мають конкретну область застосування [27,30].



Рисунок 3.48 – Загальна класифікація ФЕВП

Наведемо коротку характеристику ряду модульних структур ФЕВП на основі кодоімпульсної модуляції оптичного сигналу, запропонованих в якості засобів первинного контролю параметрів об'єктів праці в металургії і машинобудуванні з екстремальними виробничими умовами.

Принцип роботи кодових перетворювачів досить простий і зрозумілий: генерується кодова послідовність і передається на фотоприймач, після чого в схемі управління відновлюється прийнята кодова послідовність і порівнюється з еталонним значенням коду.

Розподілені кодові ФЕВП кращі через механічну і гальванічну розв'язки передавача і приймача. Однак такий перетворювач досить складний в реалізації за рахунок труднощі синхронізації тракту передачі і прийому сигналів.

Найпростіший приклад ФЕВП з самонастроюванням можна побачити в стандартній системі дистанційного керування побутовими аудіо- та відео пристроями. У приймачу реалізований найпростіший цифровий фільтр з часовою і частотною селекцією інформаційного оптичного сигналу, що дає досить високий рівень перешкодозахищеності. При цьому частота роботи приймача залежить від частоти передавача і налаштовується переданим кодом. Даний вид ФЕВП можна виділити особливим способом через те, що для нього є стандартна елементна база і передбачена можливість доопрацювання електричної схеми та адаптації до конкретних умов застосування. При цьому електронний тракт передачі не пов'язаний з електронним тактом прийому.

Особливий інтерес представляє компенсаційний ФЕВП на основі цифрової фільтрації прийнятого коду. Повна інформація про принцип роботи таких інформаційних пристроїв є в роботах [31,32,33]. Цікаво, що вони дозволяють визначити неузгодженість переданого і прийнятого сигналу, а також відновити прийнятий код. Такі ФЕВП можуть бути використані в тих випадках, де необхідно визначити величину перешкоди (неузгодженості), що діє в середовищі поширення сигналу і впливає на переданий код, при винесенні логічного висновку про правильність контролю - «так» чи «ні». Прийнятий код порівнюється компаратором з еталонним шляхом віднімання, а різниця подається на фільтр динамічного обнуління, де з прийнятою послідовністю віднімається ця різниця. В результаті обнуління виходить відновлена послідовність сигналів, а різниця є помилка прийому, за якою судять про ступінь «забруднення» середовища.

Універсальний ФЕВП слідкуючого типу призначений для вирішення комплексних завдань з розрахунку довжини контрольованого виробу, його швидкості (при відомих розмірах) руху, виявлення об'єкта, а так само визначення кількості виробів і призначений для адаптивних систем управління. Такий ФЕВП однаково надійно працює як з пачкою імпульсів, так і з кодовими послідовностями, що досягається за рахунок оригінального схемного рішення. Сформований код одночасно подається на передавач і на цифровий компаратор приймача, де ці коди,



порівнюючись, показують ступінь спотворення сигналу в каналі (середі) розповсюдження оптичного сигналу. Залежно від величини спотворення коду видається повідомлення про результат контролю.

Аналогові і імпульсні ФЕВП детально вивчені в роботах [27,29,33] і не потребують додаткового розгляду.

Найбільш перспективним напрямком у створенні ФЕВП як засобів первинного контролю є проектування систем контролю об'єктів за допомогою декількох каналів управління, коли один центральний передавач посиляє сигнали управління на кілька просторово рознесених приймачів. Можлива передача повідомлень по одному каналу, при цьому виникає задача поділу каналів передачі-прийому. Існує три можливих способу поділу інформаційних каналів для ФЕВП з кодоімпульсною модуляцією оптичного сигналу.

Часовий поділ каналів управління реалізується в такий спосіб. З одного передавача пересилаються команди або повідомлення по черзі на кожен приймач в суворій послідовності і з регламентованим часом передачі. Даний спосіб характерний як для просторово розподілених каналів, так і для одноканального прийому-передачі декількох повідомлень. Єдиним і істотним недоліком такого поділу каналів є маленьке швидкодію, що перешкоджає нарощуванню каналів, знижує загальну ефективність інформаційно-вимірювальної системи з ФЕВП.

Рівневий поділ каналів полягає в змінюванні потужності сигналу, що передається при передачі сигналів на різні приймачі або при передачі різних повідомлень. Даний спосіб неефективний через складність, а часом і неможливість зміни потужності оптичного сигналу, наприклад, коли випромінювач працює в імпульсному режимі.

Чисельноімпульсний поділ каналів найбільш доцільний в застосуванні. При такому способі поділу каналів кожен з них кодується певним чином, що виключає можливість помилкового вибору каналу і не знижує швидкодію при будь-якій кількості каналів. Цей спосіб легко реалізується апаратно і без зайвих витрат часу на проектування.

У пропонованих первинних перетворювачах фотоелектричного типу при незначному доопрацюванні джерел і приймачів кодоімпульсних оптичних сигналів передбачається можливість чисельноімпульсного (кодового) поділу каналів, що дає можливість створювати багатоканальну систему контролю об'єкта праці за умови зручного розташування вимірювальних перетворювачів на об'єкті контролю.

Отже доведено, що фотоелектричний спосіб контролю параметрів об'єктів забезпечує необхідну перешкодозахищеність, достовірність контролю і точність вимірів. Зазначений спосіб реалізується у фотоелектричних вимірювальних перетворювачах. Завадостійкі фотоелектричні перетворювачі звичайно працюють при активному способі контролю, із спеціальними випромінювачами, що створюють оптичний сигнал із властивостями, що істотно відрізняються від властивостей

оптичних перешкод. А кодування інформації дозволяє значно підвищити завадостійкість первинного перетворювача.

### 3.4.2 Розрахункова модель перетворювача оптичного типу

Теорія розглянутих первинних вимірювальних перетворювачів (ПВП) оптичного типу в загальному випадку заснована на встановленні зв'язку між вхідною величиною  $x_{вх}$  і розподілом потужності світлового випромінювання  $P(x)$  в конкретному середовищі розповсюдження [34].

Довжина каналу розповсюдження оптичних сигналів  $L_k$  (КРОС) набагато більше довжини хвилі світла, тому досить точна для практичного використання методика розрахунку світлорозподілу в цих каналах зв'язку може бути отримана при використанні законів геометричної оптики. Однак, використовуючи оптичний сигнал в ближньому інфрачервоному діапазоні довжин хвиль, застосування термінології та аналітичних залежностей для видимого випромінювання при розрахунку статичних характеристик ПВП оптичного типу як первинних вимірювальних перетворювачів інформації буде некоректним.

Відповідно до загальної теорії вимірювальних перетворювачів [35] для математичного опису використовуються поняття узагальнених сил  $F$  і швидкостей  $\vartheta$ . Теоретично вибір  $F$  і  $\vartheta$  може бути довільним, а практично визначається наявними залежностями. В даному випадку, доцільно перейти від поняття світлового потоку до потужності випромінювання -  $P(x)$ . Тоді, на основі відомого виразу

$$P = U \cdot I = I^2 R,$$

де  $P$  – потужність; Вт;  $U$  – напруга, В;  $I$  – сила струму, А;  $R$  – опір, Ом, зручно вибрати в якості узагальненої сили – струм  $I$ , а узагальненої швидкості - потужність  $P$ .

За аналогією з виразом геометричній оптики, що зв'язує силу світла  $J$  з потоком  $\Phi$ , що поширюється в межах тілесного кута  $\Omega$

$$\Phi = J \cdot \Omega,$$

встановлені узагальнені параметри будуть інтерпретовані таким чином:

$I^2 \approx J$  – узагальнена сила світла;

$P \approx \Phi$  – узагальнена потужність випромінювання;

$R \approx \Omega$  – оптичний опір,  $\Omega = \frac{1}{S}$ ,

де  $S$  – площа, обмежена кутом  $\Omega$ .

Розрахунок розподілу потужності випромінювання в КРОС з зосередженим джерелом випромінювання є дуже складною задачею, тому що  $P(x)$  залежить від довжини каналу ( $L_k$ ), тілесного кута випромінювання

( $\Omega$ ), коефіцієнта відбиття ( $K_B$ ), від параметрів випромінювача, місця його установки і ряду інших параметрів. Розрахункова схема ПВП з зосередженим джерелом випромінювання наведена на рис. 3.49.

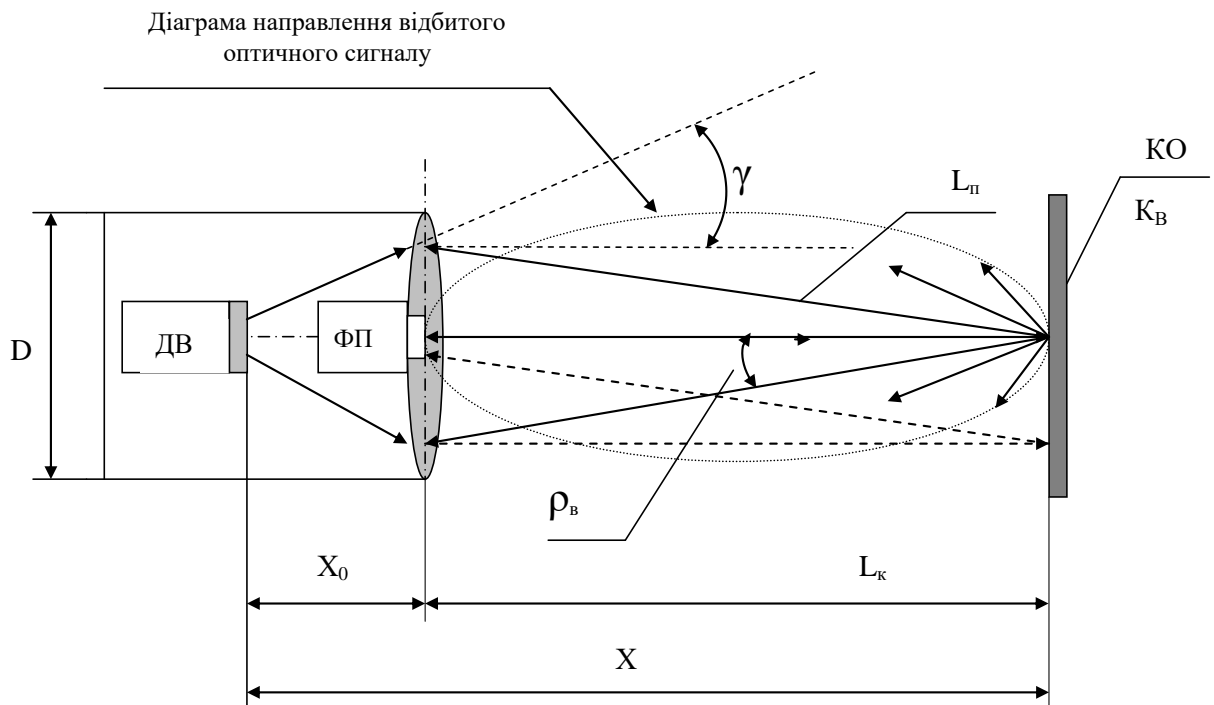
Для ПВП, що реалізує оптичну локацію, зручно розглядати окремо потужність відбитого прямого випромінювання  $P_{пр}(x)$  і відбитого під кутом до бічної поверхні об'єкта контролю  $P_{кут}(x)$ , які є складовими сумарної потужності  $P(x)$ , що потрапляє на фото приймальний пристрій (ФП)

$$P(x) = P_{пр}^B(x) + P_{угл}^B(x) . \quad (3.20)$$

На основі математичної моделі ПВП оптичного типу і наведених вище міркувань, розподіл потужності випромінювання в КРОС визначається виразом

$$P_{пр}^B(x) = P_o \exp(-K_x \cdot x) K_B = I^2 \frac{S}{x^2} \exp(-K_x \cdot x) K_B , \quad (3.21)$$

де  $K_x = \frac{1}{4\pi}$  – природні втрати в КРОС,  $X$  – довжина оптичного каналу, м.



ДВ – джерело випромінювання, ФП – фотоприймач, КО – контролюємий об'єкт,  
 $K_B$  – коефіцієнт відбиття поверхні об'єкта,  $\gamma, \rho$  – угли виходу та відбиття проміню,  
 $D$  – діаметр апертури лінзи,  $L_k, L_p$  – довжина каналу та проміню відповідно,  
 $X_0, X$  – відстань від випромінювача до лінзи та об'єкта відповідно

*Рисунок 3.49 – Розрахункова схема ПВП оптичного типу із зосередженим джерелом випромінювання*

Дещо складніше буде питання визначення потужності відбитого під кутом світлового потоку  $P_B(x)$ .

Джерело випромінювання є точковим, поміщений на осі і дає пучок променів з малою апертурою - в межах кута  $2\gamma = \Omega$  (див. рис. 3.2).

При відображенні промінь частково поглинається або проходить всередину об'єкта контролю. Будь-який об'єкт має свою величину відбивної здатності, яка визначається коефіцієнтом відбиття  $K_B$ . Причому коефіцієнт відбиття є функцією кута падіння променів. Практично зміна  $K_B$  визначається збільшенням кута відбиття (падіння), через що відбувається збільшення довжини шляху променя, а це призводить до часткової втрати потужності випромінювання.

Довжина шляху променя, що вийшов під кутом  $\gamma$  до осі, дорівнює:

$$L_{\text{п}} = \frac{(L_{\text{к}} + x_0)}{\cos\gamma} = \frac{X}{\cos\gamma}. \quad (3.22)$$

Тоді зміна коефіцієнта відбиття визначається виразом:

$$\rho_{\text{розр}} = K_B \cdot \exp\left(-K_x X \int_{\gamma}^0 \frac{1}{\cos\gamma} d\gamma\right), \quad (3.23)$$

де  $\rho_{\text{розр}}$  – розрахунковий коефіцієнт відбиття.

Тоді, досить точну для практичних розрахунків формулу для визначення потужності відбитого під кутом  $\gamma$  світлового випромінювання можна отримати з виразу (3.20) з урахуванням (3.23).

$$P_{\text{угл}}^B(x) = P_{\text{пр}}^B(x) \cdot \rho_{\text{розр}},$$

$$P_{\text{угл}}^B(x) = P_0 \exp(-K_x X) \cdot K_B \exp\left(-K_x X \int_{\gamma}^0 \frac{1}{\cos\gamma} d\gamma\right). \quad (3.24)$$

Тоді, для ПВП, що реалізує оптичну локацію, сумарна потужність випромінювання, що падає на ФП, дорівнює:

$$P(x) = P_0 \exp(-K_x X) \cdot K_B + P_0 \exp\left(-K_x X \int_{\gamma}^0 \frac{1}{\cos\gamma} d\gamma\right) \cdot K_B =$$

$$= P_0 K_B \left[ \exp(-K_x X) + \exp\left(-K_x X \int_{\gamma}^0 \frac{1}{\cos\gamma} d\gamma\right) \right] \quad (3.25)$$

Очевидно, що основна потужність випромінювання, відбитого від поверхні об'єкта, буде зосереджена на осі оптичної системи.

Згідно розрахунковій схемі кут  $\gamma$  визначається з виразу:

$$\text{tg}\gamma = \frac{D/2}{X_0}, \quad \gamma = \text{arctg} \frac{D}{2X_0}, \quad (3.26)$$

де  $D$  – діаметр лінзи, м,  $X_0$  – місце установки лінзи, щодо джерела випромінювання, м.

Для випадку оптичної локації величина  $X$ , яка характеризує довжину шляху променя падаючого на яку вказують поверхню і відтворену від нього, задається рівною  $2L$ .

### 3.4.3 Дослідження перетворювача оптичного типу

Запропонована інтерпретація математичної моделі ПВП оптичного типу дозволяє провести розрахунок розподілу потужності випромінювання  $P(x)$  на фотоприймачі при різних значеннях коефіцієнтів відбиття  $K_v$  і довжини каналу, а також визначити оптимальну довжину каналу, при якій відбитий оптичний сигнал буде впевнено фіксуватися на приймальному кінці перетворювача. В процесі моделювання таких ПВП шляхом варіювання узагальненими прийомами і змінними елементами проводиться пошук нового технічного рішення, відповідного поставленим вимогам.

Таким чином, вираз (3.25), перетворене до виду

$$\frac{P(x)}{P_0} = K_v \left[ \exp(-K_x X) + \exp\left(-K_x X \int_{\gamma}^0 \frac{1}{\cos \gamma} d\gamma\right) \right] \quad (3.27)$$

є основним при розробці методики розрахунку перетворювача і його можна вважати рівнянням статичної характеристики ПВП оптичного типу. Статична характеристика дозволяє визначити основні параметри, а також режим роботи перетворювача.

Зважаючи на складність інтегральних виразів (3.27), що описують математичну модель ПВП оптичного типу, його доцільно вирішувати чисельним методом на ЕОМ. При цьому актуальним питанням залишається визначення фактичних значень коефіцієнтів відбиття для матеріалів різного виду і теплового стану. Порівняння отриманих коефіцієнтів з розрахунковими дозволить перевірити адекватність запропонованої моделі.

На рис. 3.50 наведені залежності відносного значення сумарної потужності  $P(x)/P_0$  на фотоприймачі від загальної довжини оптичного каналу  $X$  (де  $P_0$  – значення потужності випромінювання при  $x = x_0$ ). А на рис. 3.51 представлена діаграма зміни потужності сигналу на фотоприймачі  $P(x)/P_0$  від кута відбиття  $\gamma$ , що визначає розрахунковий коефіцієнт відбиття  $\rho_{розр}$ .

Розрахунки проводилися на ЕОМ з використанням програми MathCAD. Дані для розрахунку взяті з реального оптичного ПВП (тепловізор типу FLIR A310) з наступними параметрами:  $K_x = 0.08$ ,  $X_0 = 5$  м,  $D = 0.03$  м. Коефіцієнти випромінювання взяті для різних марок сталей використовуваних в прокатному виробництві: окислена вуглецева сталь ( $K_v = 0.87...0.9$ ); хромиста нержавіюча сталь ( $K_v = 0.17...0.26$ );

хромонікелева нержавіюча сталь 0X18Н10 ( $K_B = 0.72...0.88$ ); жаростійкі сплави ( $K_B = 0.1...0.13$ ).

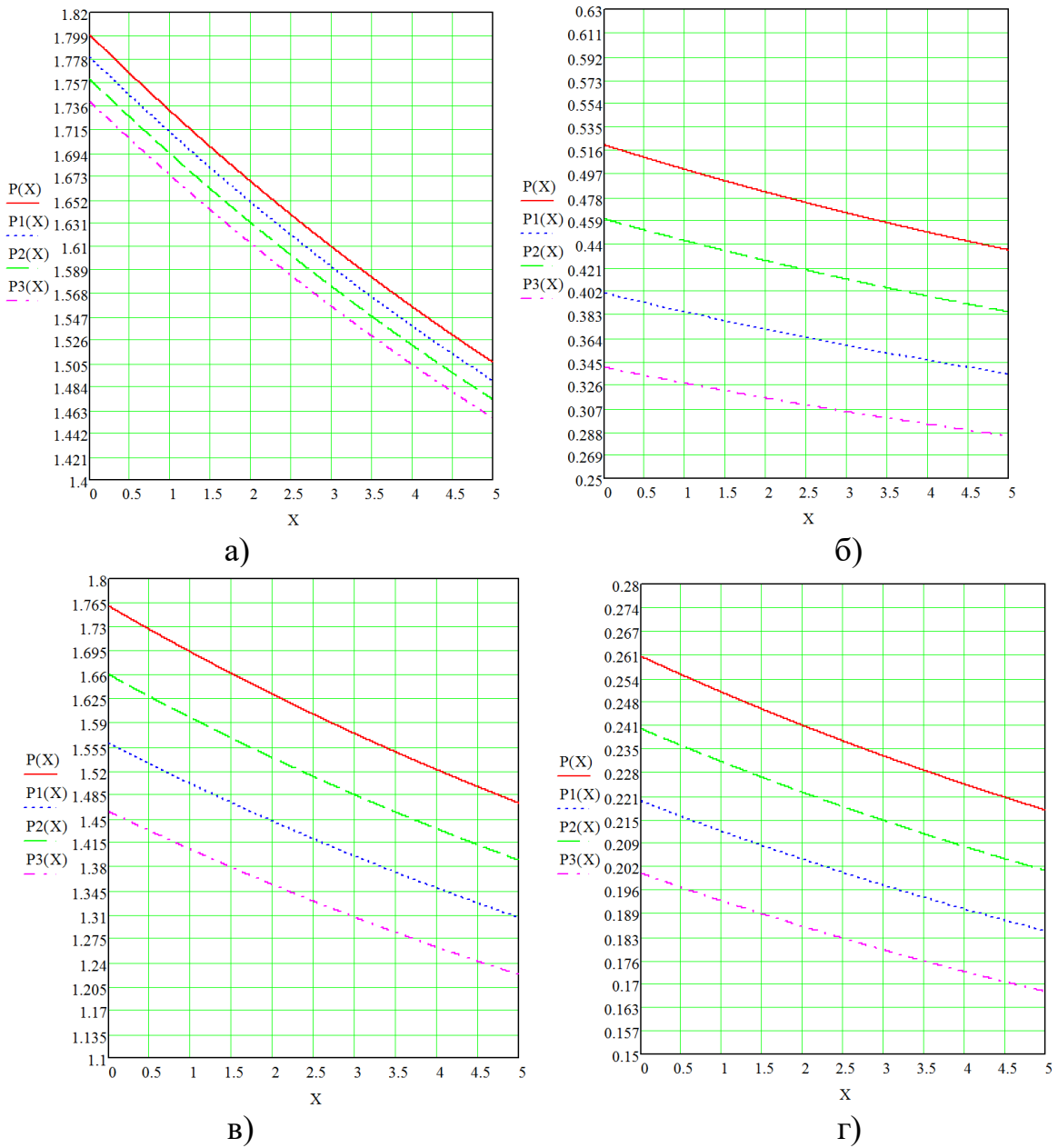


Рисунок 3.50 – Статичні характеристики тепловізору для сталей: вуглецева (а), хромиста (б), хромонікелева (в), жаростійка (г)

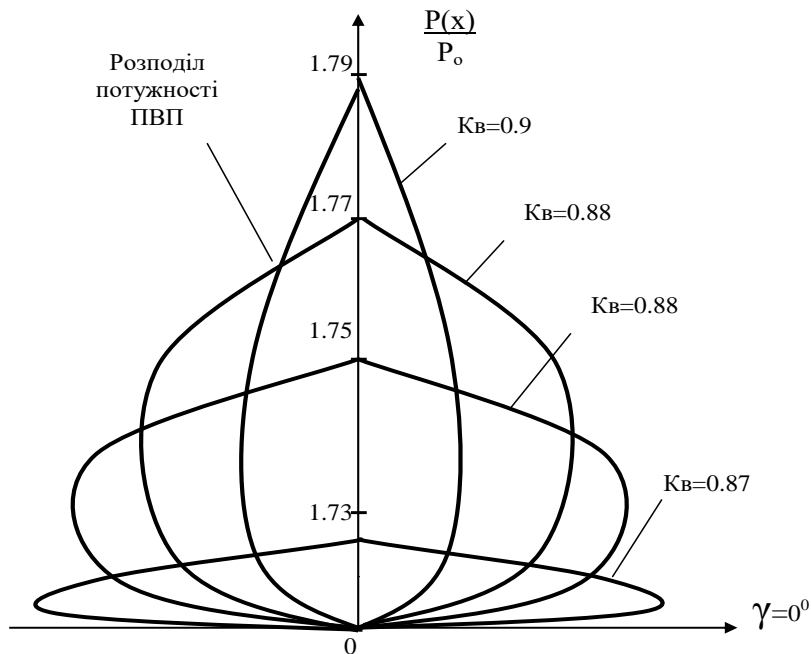


Рисунок 3.51 - Діаграма розподілу потужності відбитого сигналу в залежності від кута візування і  $K_v$

За результатами моделювання можна зробити наступні висновки.

1. На підставі наведених досліджень процесів передачі-прийому оптичних сигналів отримані розрахункові залежності, що описують зміну потужності випромінювання від довжини оптичного каналу і величини зовнішніх послаблюють факторів.
2. Отримано аналітичні вирази і розроблена методика розрахунку з використанням ЕОМ статичної характеристики ПВП оптичного типу в залежності від характеристик середовища розповсюдження оптичного сигналу.
3. Отримані результати дозволяють визначити оптимальну довжину оптичного каналу (взагалі або для конкретного виду матеріалу) для отримання максимальної достовірності контролю.
4. Теоретичні дослідження показали, що діаграма відбитих сигналів має вузьку спрямованість, для цього ПВП необхідно встановлювати строго перпендикулярно до контрольованого об'єкту, що дасть можливість отримати на фотоприймачі максимально можливу потужність відбитого і ослабленого оптичного сигналу.
5. Зменшення кута зору фотоелектричного вимірювального перетворювача на величину понад п'ять градусів енергетично не вигідно, так як потужність відбитих сигналів різко знижується, що обумовлено специфікою змішаного відбиття (основна енергія поширюється по законам спрямованого відбиття, а інша – дифузно розсіюється).

6. У зв'язку з роботою перетворювача в якості оптичного локатора, актуальна проблема дослідження послаблюючої дії каналу розповсюдження оптичних сигналів, зокрема відбивної здатності матеріалу об'єктів Кв. Ця величина має найбільший вплив на відбитий оптичний сигнал, більш ніж на порядок послаблюючи його енергію.
7. Основна втрата енергії оптичного сигналу обумовлена низькою відбивною здатністю матеріалу об'єкта. Таким чином, основним способом збільшення довжини каналу є підвищення чутливості фотоприймального пристрою.



## 4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ВІБРОСТЕНДІВ

### 4.1 Математична модель електродинамічного вібростенда

Вібростенд є головним виконавчим механізмом установки відтворення і передачі необхідної вібрації на об'єкт. Залежно від типу і властивостей вібратора визначаються основні характеристики установки. Найбільше застосування в процесах проведення випробувань на вібропрочність і вібростійкість отримали такі різновиди: електродинамічні; гідравлічні; механічні вібростенди.

Електродинамічний вібростенд створює механічні вібрації за рахунок взаємодії змінного магнітного поля, утвореного в рухомий котушці, що є виконавчим механізмом вібростенда, і постійного магнітного поля. Установку, що включає до свого складу вібростенд даного типу, називають електродинамічною. Дана установка складається з: системи управління, підсилювача потужності, джерела напруги котушки підмагнічування, приладу вимірювання і допоміжної апаратури.

Ключові особливості, технічні характеристики, переваги і недоліки вібростендів даного виду наведені в [13].

На рис. 4.1 представлений один з електродинамічних вібраторів [15].

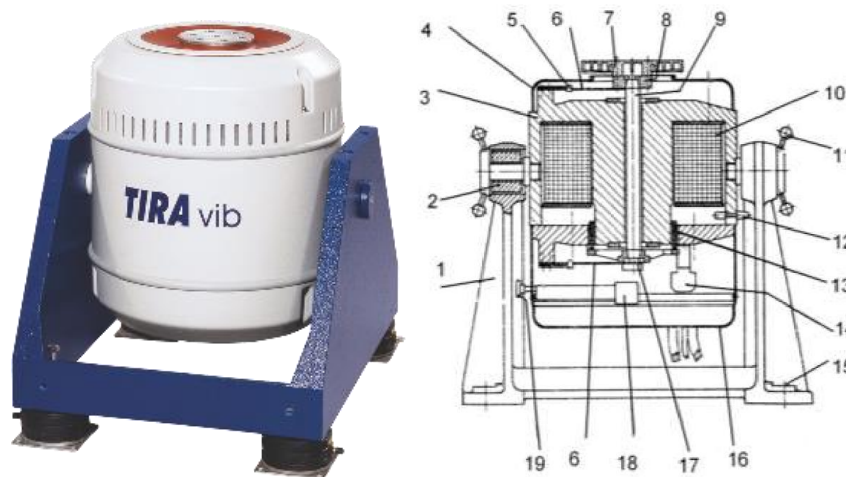


Рисунок 4.1 – Електродинамічний вібратор фірми Tira: 1 - станина, 2 - гумові втулки (амортизатори), 3 - магнітопровід, 4 - захисний ковпак верхній, 5 - амортизатор вібрації, 6 - плоска пружина, 7 - планшайба, 8 - фланець, 9 - стрижень, 10 - котушка підмагнічування, 11 - затискний важіль, 12 - штуцер повітряного охолодження, 13 - вібруюча котушка, 14 - приєднувальні затискні клєми, 15 - заземлення, 16 - ковпак нижній, 17 - датчик прискорення, 18 - осцилятор, 19 - ручка регулювання "нуля" датчика прискорення.

Сила, що розвивається вібратором, описується наступною формулою:

$$F_B = B \cdot l \cdot i_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

де  $B$  – магнітна індукція в круговому зазорі магнітопроводу;

$l$  – довжина проводу рухливої котушки;

$i_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$  – змінний струм, що проходить в рухомій котушці.

Так як довжина намотування і магнітне поле не змінюються, сила буде прямо пропорційна току, який живить рухливу котушку.

У загальному випадку на рухому систему вібратора діє ряд протидіючих сил - сила інерції, відновлююча сила пружності рухомої системи, сила опору.

Взаємозв'язок електричних величин з механічними величинами описується наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} U = z_{эл} \cdot I + \Theta(V_m - V_M), \\ z_M V_M + z^{\Pi} (V_M - V_m) + \Theta I = 0, \\ z_M V_M + z^{\Pi} (V_m - V_M) - \Theta I = z^H V_m, \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $I$  – струм в котушці;

$U$  – напруга в котушці;

$V_m$  – швидкість рухомої системи;

$V_M$  – швидкість корпусу вібратора;

$\Theta = B \cdot l$  – коефіцієнт електромеханічного зв'язку ( $B$  – індукція в зазорі,  $l$  – довжина дроту);

$z_{эл} = r + j \cdot \omega \cdot L$  – електричний опір обмотки;

$z_m = j \cdot \omega \cdot m$ ,  $z_M = j \cdot \omega \cdot M$ ,  $z^n = k^n (l + i \cdot \lambda n) / j \cdot \omega$  – механічні опори рухомої системи, корпусу і пружної підвіски ( $\lambda_n$  – коефіцієнт втрат);

$z^H$  – вхідний опір випробуваного об'єкта (навантаження);

$U, I, V$  – комплексні амплітуди.

При  $M \rightarrow \infty$  перше і третє рівняння системи (4.1) збігаються з рівняннями електромеханічного перетворювача.

Динаміка моделі описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = V_1; \\ \frac{dS_2}{dt} = V_2; \\ m_1 \frac{dV_1}{dt} = (c_1 + c_2)S_1 + c_2S_2 - \beta(V_1 - V_2) + k_i I; \\ m_2 \frac{dV_2}{dt} = c_2S_1 - c_2S_2 + \beta(V_1 - V_2) - k_i I; \\ L \frac{dI}{dt} = -a_l V_1 - RI + U, \end{cases}$$

де  $S_1$  – переміщення рухомий системи;  
 $S_2$  – переміщення корпусу вібратора, закріпленого на пружній основі;  
 $\beta$  – коефіцієнт демпфірування;  
 $c_1$  – коефіцієнт жорсткості підвіски;  
 $c_2$  – коефіцієнт жорсткості кріплення вібратора;  
 $k_i$  – коефіцієнт передачі вібратора;  
 $m_1$  – маса нерухомих частин;  
 $m_2$  – маса рухомих частин вібратора;  
 $L$  – індуктивність обмотки збудження;  
 $a_l$  – конструктивний коефіцієнт залежить від числа витків котушки;  
 $U = U_0 \sin(\omega \cdot t)$  – напруга, що подається на обмотку.

Промодельємо роботу вібростенда, прийнявши наступні вихідні дані:  $c_1=7000000$ ;  $c_2=1000$ ;  $m_1=1.7$ ;  $m_2=80$ ;  $a_l=5$ ;  $\beta=22$ ;  $k_i=100$ ;  $R=4$ ;  $L=0.001$ ;  $U = U_0 \sin(\omega \cdot t)$ ,  $U_0=60$ ,  $\omega=10$ .

Лістинг програми:

```

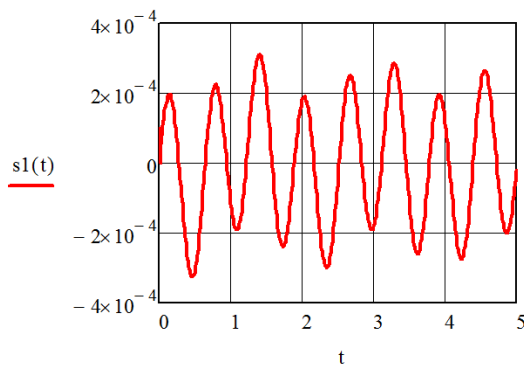
m1 := 1.7      m2 := 80      c1 := 7000000  c2 := 1000      ai := 5  beta := 22

ki := 100     Rr := 4  Ll := 0.001     U0 := 60      omega := 10

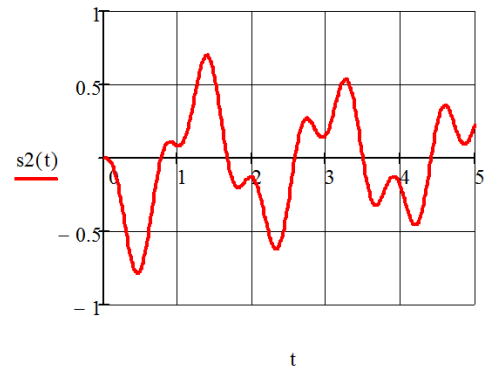
Given
m1 * s1''(t) == -(c1 + c2) * s1(t) + c2 * s2(t) - beta * (s1'(t) - s2'(t)) + ki * Ii(t)
m2 * s2''(t) == c2 * (s1(t) - s2(t)) + beta * (s1'(t) - s2'(t)) - ki * Ii(t)
Ll * Ii'(t) == -ai * s1'(t) - Rr * Ii(t) + U0 * sin(omega * t)
s1(0) == 0.0001  s1'(0) == 0.0001     s2(0) == 0.0001  s2'(0) == 0.0001
Ii(0) == 5.0      t := 0, 0.01 .. 5

[ [ s1 ]
  [ s2 ]
  [ Ii ] ] := Odesolve [ [ [ s1 ]
                        [ s2 ]
                        [ Ii ] ], t, 5 ]
v1(t) := d/dt s1(t)      v2(t) := d/dt s2(t)

```



а)



б)

Рисунок 4.2 – Залежність переміщень  $s1$  і  $s2$  від часу  $t$

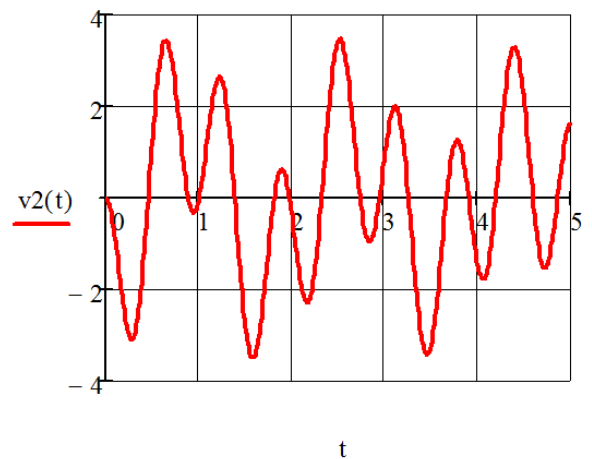
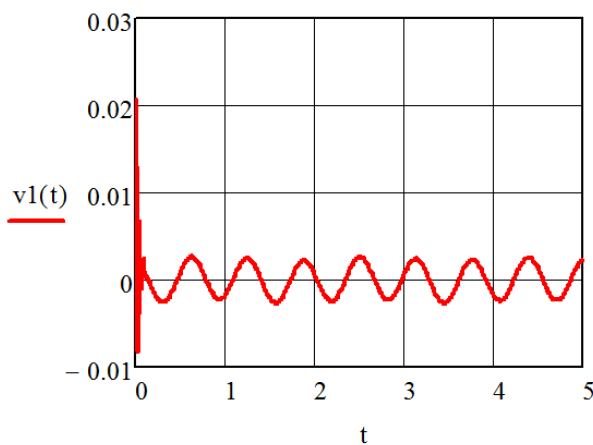


Рисунок 4.3 – Залежність швидкості  $v1$  і  $v2$  від часу  $t$

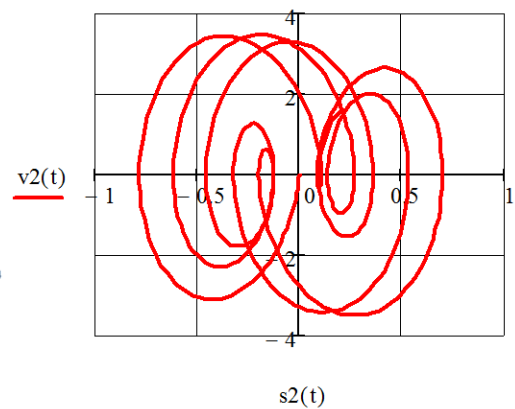
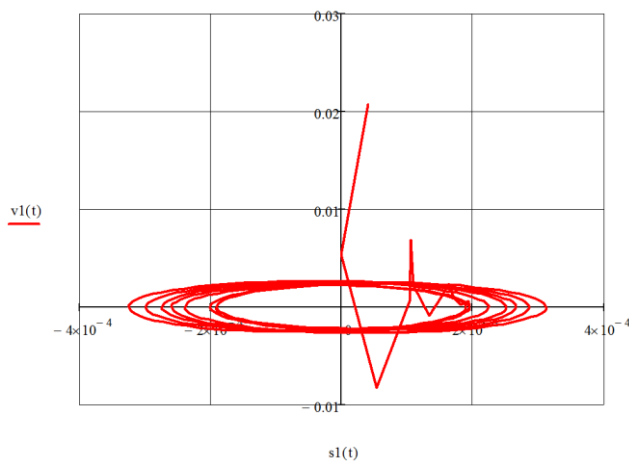


Рисунок 4.4 – Фазові портрети

Вносячи незначні зміни в програму, можна виконати моделювання, змінюючи будь-який параметр, наприклад  $\omega$ :

```

sol(ω) := Odesolve  $\begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ Ii \end{bmatrix}, t, 5$ 
s1 := sol(8)0   s2 := sol(8)1   Ii := sol(8)2
s11 := sol(10)0 s21 := sol(10)1 Ii1 := sol(10)2

```

В цьому випадку графіки залежності переміщень  $s1$ ,  $s2$  і струму  $I$  в котушці від часу  $t$  і частоти напруги  $\omega$  матимуть вигляд, представлений на рис. 4.5 і 4.6.

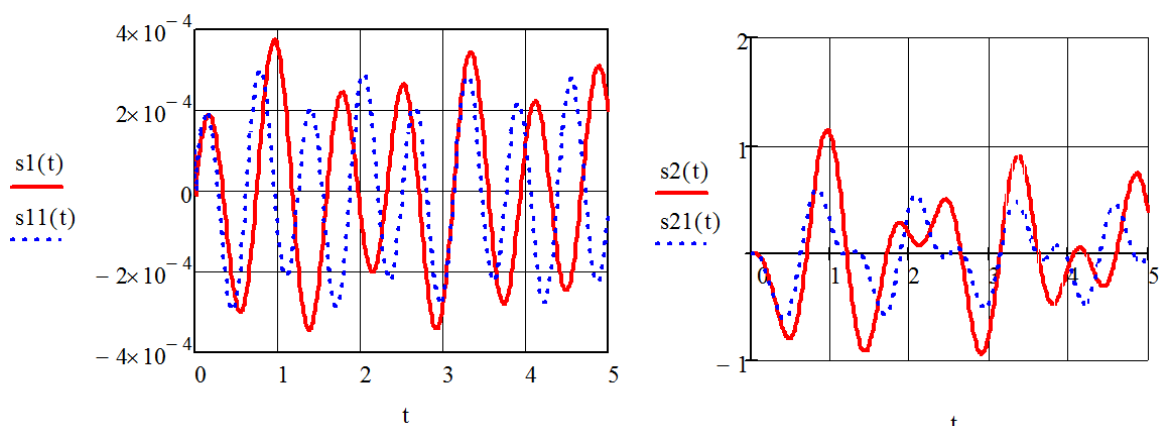


Рисунок 4.5 – Залежність переміщень  $s1$  і  $s2$  від часу  $t$  і частоти напруги  $\omega$

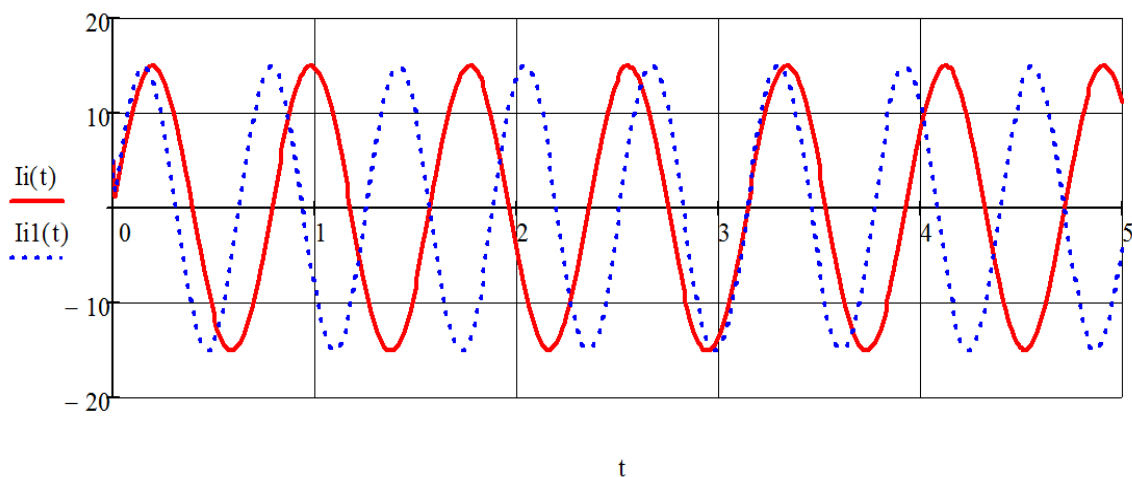


Рисунок 4.6 – Залежність току  $I$  в котушці від часу  $t$  і частоти напруги  $\omega$

Далі надається приклад розв’язання цієї задачі в програмі :

```

In[7]:= Remove["Global`*"]
        |удалить символ
With[{c1 = 7 000 000, c2 = 1000, m1 = 1.7, m2 = 80, ai = 5, beta = 22, ki = 100, R = 4, L = 0.001, U0 = 60, omega = 10},
      |используя
sol = NDSolve[{m1*s1'[t] == -(c1 + c2)*s1[t] + c2*s2[t] - beta*(s1'[t] - s2'[t]) + ki*Ii[t],
              |численно решить ДУ
              m2*s2'[t] == c2*(s1[t] - s2[t]) + beta*(s1'[t] - s2'[t]) - ki*Ii[t],
              L*Ii'[t] == -ai*s1'[t] - R*Ii[t] + U0*Sin[omega*t], s1[0] == 0.0001, s1'[0] == 0.0001,
              |синус
              s2[0] == 0.0001, s2'[0] == 0.0001, Ii[0] == 5}, {s1, s2, Ii}, {t, 0, 5}]

```

```

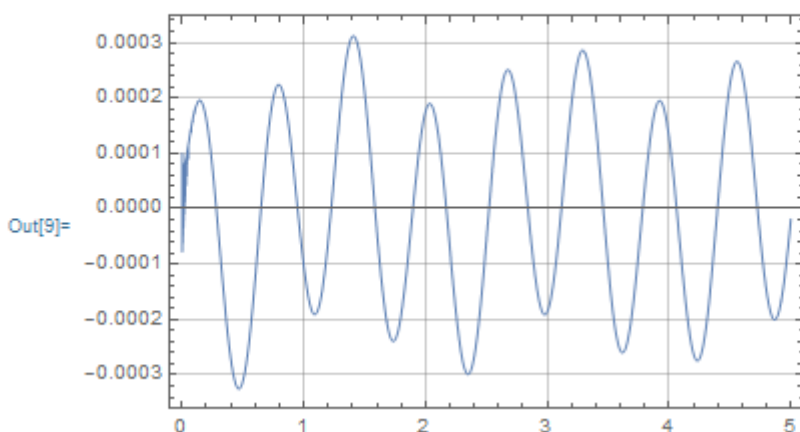
Out[8]:= {{s1 -> InterpolatingFunction[{{0, 5}}, Output: scalar], s2 -> InterpolatingFunction[{{0, 5}}, Output: scalar]},
         {Ii -> InterpolatingFunction[{{0, 5}}, Output: scalar]}}

```

```

In[9]:= Plot[Evaluate[s1[t] /. sol[[1]]], {t, 0, 5}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
        |гр... |вычислить |линии коорд... |автоматиче... |рамка |истина

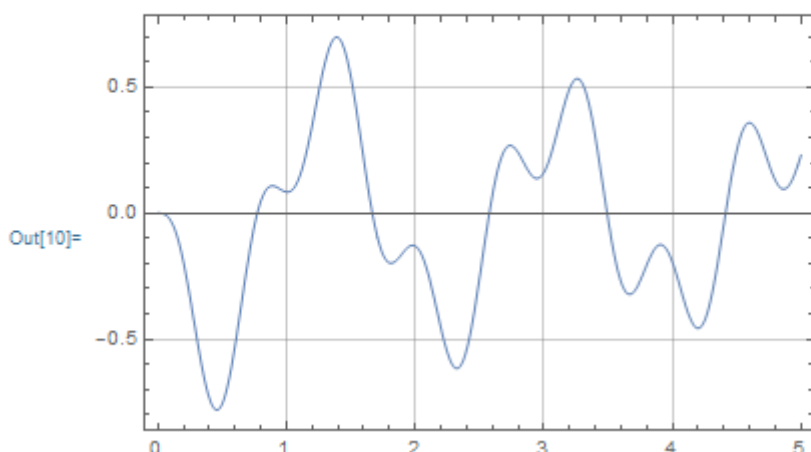
```

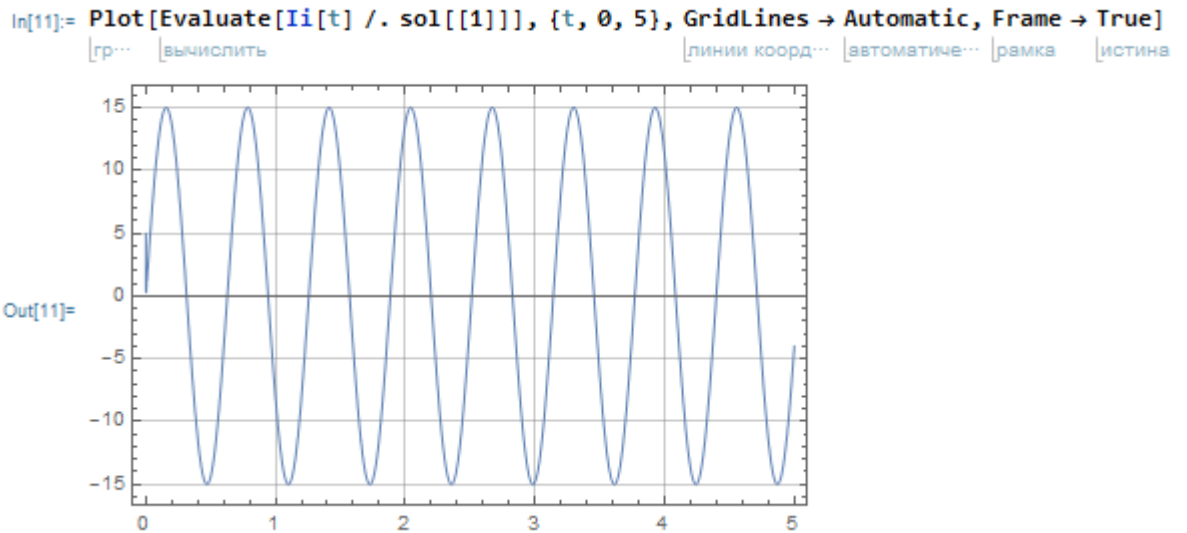


```

In[10]:= Plot[Evaluate[s2[t] /. sol[[1]]], {t, 0, 5}, GridLines -> Automatic, Frame -> True]
          |гр... |вычислить |линии коорд... |автоматиче... |рамка |истина

```





## 4.2 Математична модель електромеханічної системи для вібростабілізаційної обробки металевих деталей, побудована на основі електромеханічних аналогій

Одним з ключових елементів електромеханічної системи для вібростабілізаційної обробки є двигун, який створює вібрації. Для електромеханічної системи, що розглядається, було обрано лінійний електродвигун зворотно-поступальної дії. Основною перевагою такого двигуна є широкі функціональні можливості, оскільки його принцип роботи заснований на взаємодії струму, що протікає по рухомому провіднику, з постійним магнітним полем. При цьому зусилля, створюване вібробудником, пропорційне струму, який підводиться до рухомого провідника, і повністю повторює його за формою.

Існують наступні основні типи електродинамічних лінійних двигунів зворотно-поступального руху:

- з однострижневим магнітопроводом;
- зі здвоєним магнітопроводом;
- з подвійним зазором в магнітопроводі;
- вібратори з двострижневим магнітопроводом.

Недоліком вібраторів з однострижневим магнітопроводом є сильне магнітне поле розсіювання, тому потрібно застосовувати спеціальні екрани, що послаблюють дію полів розсіювання. Дуже важко створити конструкцію потужного двигуна за однострижневою схемою через надмірно великий діаметр рухомої котушки, тому що зі збільшенням її розмірів зменшується жорсткість, що є негативним як з динамічної, так і з технологічної точок зору. До недоліків двигунів зі здвоєним магнітопроводом і з подвійним зазором в магнітопроводі слід віднести наявність напруженості магнітного поля в площині столу.

Головною перевагою лінійного двигуна з двострижневим магнітопроводом є те, що відпадає необхідність в екранування виробів, що обробляються, від полів розсіювання магнітного потоку.

В якості виконавчого органу автоматизованої електромеханічної системи для вібростабілізаційної обробки металевих деталей була обрана схема лінійного двигуна, представлена на рис. 4.7. Цей двигун виконаний принципово за двострижневою схемою, але має деякі позитивні конструктивні зміни: конструкція технологічна, зручна в експлуатації і має гарну ремонтпридатність [14, 36, 37].

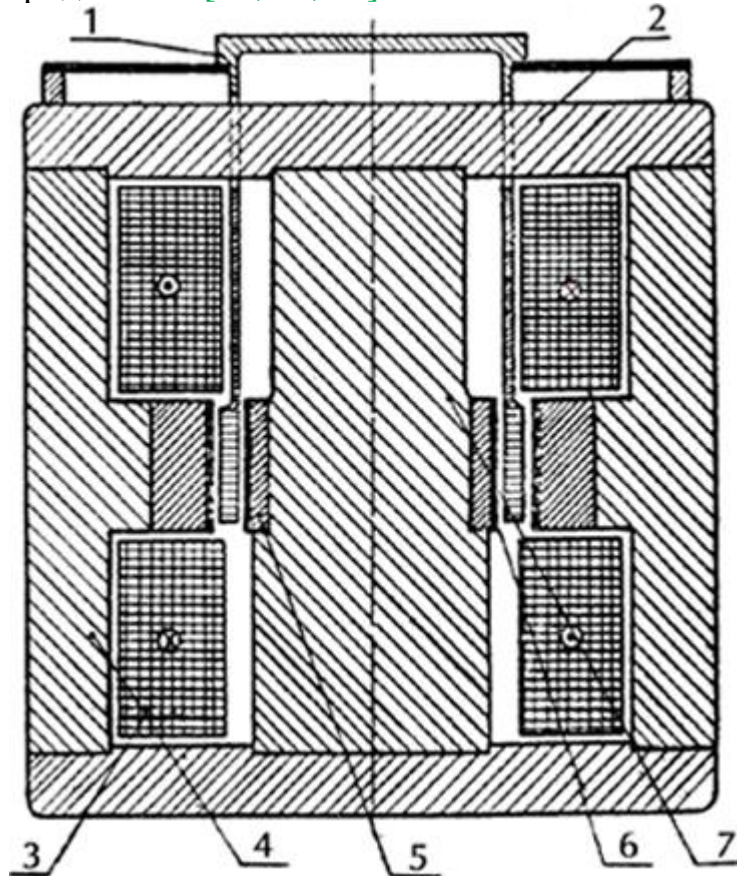


Рисунок 4.7 – Схема електродинамічного лінійного двигуна зворотно-поступального руху: 1 – рухома котушка; 2 – фланець магнітопроводу; 3 – котушка підмагнічування; 4 – корпус магнітопроводу; 5 – котушка управління; 6 – екран; 7 – стрижень

Механічна частина електромеханічної системи (рис. 4.8) включає в себе наступні елементи:

–  $m$  – маса рухомої котушки разом з кріпленням і направляючими, кг;

–  $M$  – маса оброблюваної деталі і закріпленої на ній частини лінійного двигуна зворотно-поступального руху, кг;

–  $C_M^{\sim}$  – жорсткість кріплення і деталі (в процесі віброобробки змінюється), Н/м;



- $C_m$  – жорсткість пружини, встановленої між закріпленою і рухомою частиною лінійного двигуна зворотно-поступального руху, Н/м;
- $F(t)$  – зусилля, що створюється електричною частиною лінійного двигуна зворотно-поступального руху, Н;
- $x_m$  – переміщення рухомої частини котушки, м;
- $x_M$  – переміщення деталі разом з установлюваною частиною двигуна, м.

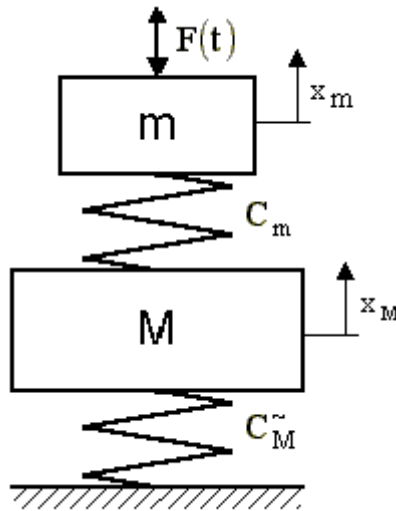


Рисунок 4.8 – Схема механічної частини електромеханічної системи для вібростабілізаційної обробки металевих деталей

Для встановлення взаємозв'язків між механічними і електричними параметрами системи побудована повна електрична еквівалентна схема електромеханічної системи для релаксації механічних напружень в металевих деталях (рис. 4.9). Ця схема містить в собі як електричну, так і механічну частини системи.

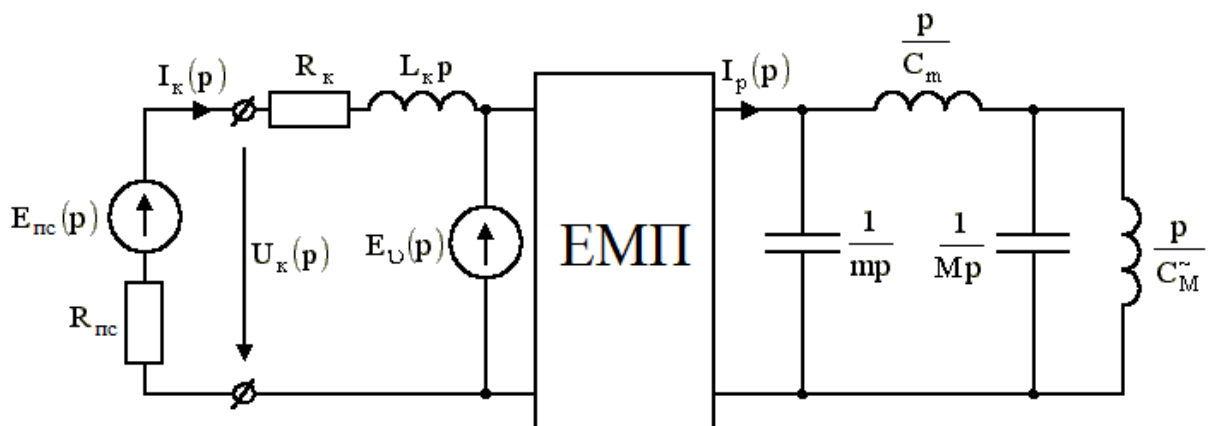


Рисунок 4.9 – Електрична еквівалентна схема електромеханічної системи для віброобробки металевих деталей

При побудові механічної частини враховуються аналогії між електричними і механічними величинами [38, 39]. В якості узагальненої координати служить напруга  $u$ , кінетичній енергії механічної системи відповідає енергія електричного поля, потенційній енергії – енергія магнітного поля, узагальненій збурювальній силі – швидкість зміни струму  $di/dt$ . Диференціальне рівняння динаміки цього кола

$$C\ddot{u} + \frac{1}{R}\dot{u} + \frac{1}{L}u = \frac{di}{dt},$$

де  $C$  – ємність конденсатора в колі, Ф;

$R$  – активний опір, Ом;

$L$  – індуктивність, Гн;

$I$  – струм в колі, А;

$u$  – напруга, що виступає в якості узагальненої координати (в даному випадку компоненти схеми з'єднані паралельно), В;

$t$  – час, с.

Порівнюючи це рівняння з типовим рівнянням динаміки одномасової механічної системи  $m\ddot{x} + K\dot{x} + C_m x = F(t)$ , встановлено, що коефіцієнту  $m$  (маса) відповідає коефіцієнт  $C$  (електрична ємність), коефіцієнту непружного опору  $K$  (при наявності демпфування) відповідає значення  $1/R$  (електрична провідність), коефіцієнту жорсткості  $C_m$  – інверсна індуктивність  $1/L$ , збурювальній силі  $F(t)$  – швидкість зміни струму  $di/dt$ , а механічному переміщенню  $x$  – електрична напруга  $u$ .

На схемі (рис. 4.9) введено такі позначення:

–  $E_{пс}(p)$  – електрорушійна сила (ЕРС) джерела живлення (підсилювача, що входить до складу підсистеми сполучення), тут і далі  $p$  – оператор Лапласа;

–  $E_{\vartheta}(p)$  – проти-ЕРС, що виникає в обмотці рухомої котушки двигуна при її русі в магнітному полі котушки підмагнічування, і протидіє зміні основного магнітного потоку;

–  $R_{пс}$  – внутрішній електричний опір підсилювача;

–  $I_{к}(p)$  – струм, що протікає через обмотку рухомої котушки двигуна;

–  $U_{к}(p)$  – напруга на затискачах рухомої котушки двигуна;

–  $L_{к}$  – індуктивність обмотки рухомої котушки двигуна;

–  $R_{к}$  – електричний опір рухомої котушки двигуна;

–  $I_{р}(p)$  – робочий струм, швидкість зміни якого відповідає силі, що діє на рухому котушку з боку електричної частини;

– ЕМП – електромеханічний перетворювач, що узгоджує між собою електричну і механічну частини еквівалентної схеми (в найпростішому

випадку це підсилювальна ланка, що узгоджує електричні і механічні параметри);

–  $m, M$  – відповідно маси рухомої котушки разом з кріпленням і направляючими, а також оброблюваної деталі і закріпленої на ній частині двигуна – еквіваленти електричної ємності;

–  $C_M, C_m$  – відповідно жорсткість кріплення і деталі, а також жорсткість пружини, встановленої між закріпленою і рухомою частинами лінійного двигуна – еквівалентні інверсні індуктивності.

Виведемо передатні функції для кожного з елементів електродинамічного лінійного двигуна зворотно-поступального руху.

Передатна функція рухомої котушки

$$W_K(p) = \frac{I_K(p)}{U_K(p) - E_{\vartheta}(p)} = \frac{1}{R_K + L_K p} = \frac{1/R_K}{\frac{L_K}{R_K} p + 1}.$$

Передатна функція ЕМП

$$W_{EM\Pi}(p) = \frac{F(p)}{I_K(p)} = Bw\ell,$$

де  $B$  – магнітна індукція, Тл;

$\ell$  – довжина одного витка рухомої котушки, м;

$w$  – кількість витків рухомої котушки.

Передатна функція механічної частини електромеханічної системи:

1. У відповідності зі схемою на рис. 4.8 можна скласти систему рівнянь, що описує динаміку процесу віброобробки

$$\begin{cases} m\ddot{x}_m = F(t) - C_m(x_m - x_M), \\ M\ddot{x}_M = -C_M x_M - C_m(x_M - x_m). \end{cases} \quad (4.2)$$

2. Та ж система рівнянь, записана в просторі Лапласа

$$\begin{cases} mp^2 x_m = F(p) - C_m(x_m - x_M) \\ Mp^2 x_M = -C_M x_M - C_m(x_M - x_m) \end{cases}. \quad (4.3)$$

3. Після перетворень системи рівнянь (4.3) отримаємо передатну функцію відносно прискорення великої маси

$$W_M(p) = \frac{a(p)}{F(p)} = \frac{C_m p^2}{mMp^4 + \left(m(C_m + C_M) + MC_m\right)p^2 + C_m C_M},$$

де  $a(p)$  – зображення віброприскорення в просторі Лапласа.

Передатна функція по швидкості великої маси

$$W_{M\vartheta}(p) = \frac{p x_M(p)}{F(p)} = \frac{C_m p}{mMp^4 + (m(C_m + C_M) + MC_m)p^2 + C_m C_M}.$$

Передатна функція по швидкості малої маси

$$W_{m\vartheta}(p) = \frac{p x_m(p)}{F(p)} = \frac{Mp^3 + (C_m + C_M)p}{mMp^4 + (m(C_m + C_M) + MC_m)p^2 + C_m C_M}.$$

Проти-ЕРС  $E_\vartheta(p)$  буде визначатися за формулою (4.4) в формі Лапласа

$$E_\vartheta(p) = p(x_m(p) - x_M(p))Bwl, \quad (4.4)$$

де  $p(x_m(p) - x_M(p))$  – відносна швидкість руху рухомої котушки в полі котушки підмагнічування.

Для перевірки достовірності електромеханічних перетворень знайдемо вираз для передатної функції механічної частини системи по електричній еквівалентній схемі електромеханічної системи для віброобробки металевих деталей (рис. 4.9). Механічна частина, представлена електричною еквівалентною схемою, показаною на рис. 4.10.

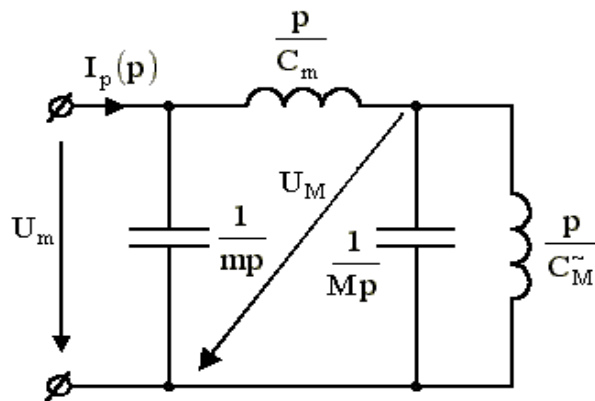


Рисунок 4.10 – Електрична еквівалентна схема механічної частини

На рис. 4.10  $U_m$  відповідає переміщенню  $x_m$  малої маси (рухомої частини лінійного двигуна), показаної на рис. 4.8, а  $U_M$  – переміщенню  $x_M$  великої маси (частини двигуна, що закріплюється на деталі). На основі законів Кірхгофа в комплексній формі [40] можна скласти наступне рівняння:

$$I_p(p) = \frac{U_m}{1/mp} + \frac{U_m - U_M}{p/C_m},$$

яке після перетворень набуде вигляду

$$mp^2 U_m = pI_p(p) - C_m(U_m - U_M). \quad (4.5)$$

Рівняння (4.5), записане для електричної еквівалентної схеми повністю відповідає першому рівнянню системи рівнянь (4.2), записаної для динаміки механічної частини системи.

Повний опір еквівалентної схеми

$$z_M(p) = \frac{\frac{p}{C_M} \cdot \frac{1}{Mp}}{\frac{p}{C_M} + \frac{1}{Mp}} = \frac{p}{Mp^2 + C_M}.$$

Відповідно до закону Ома в комплексній формі можна скласти рівняння

$$\frac{U_M}{z_M(p)} = \frac{U_m - U_M}{p/C_m},$$

яке після перетворень набуде вигляду

$$Mp^2 U_M = -C_M U_M - C_m(U_M - U_m). \quad (4.6)$$

Рівняння (4.6), записане для електричної еквівалентної схеми повністю відповідає другому рівнянню системи рівнянь (4.2), записаному для динаміки механічної частини електромеханічної системи за умов еквівалентності  $U_M \sim x_M$ ,  $U_m \sim x_m$ .

Таким чином, отримана передатна функція для механічної частини електромеханічної системи, знайдена по механічній схемі повністю відповідає передатній функції, отриманій при використанні принципу еквівалентності.

Зворотній зв'язок здійснюється по лінійній швидкості рухомої котушки  $\mathcal{Y}(p)$  с коефіцієнтом

$$W_{зв}(p) = \frac{E_{\vartheta}(p)}{\vartheta(p)} = Bw\ell.$$

Структурна схема електромеханічної системи, що включає в себе підсистему сполучення і виконавчий орган, в якості якого виступає електродинамічний лінійний двигун зворотно-поступальної дії, наведена на рис. 4.11. Підсистема управління передбачає наявність керуючої програми, яка на рис. 4.11 представлена задатчиком впливу  $U_K(p)$ .

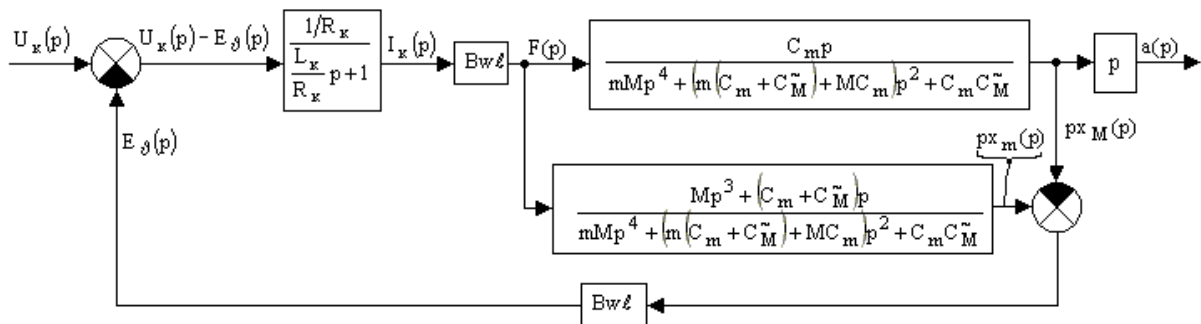


Рисунок 4.11 – Структурна схема електромеханічної системи для здійснення віброобробки з представленням елементів у вигляді передатних функцій

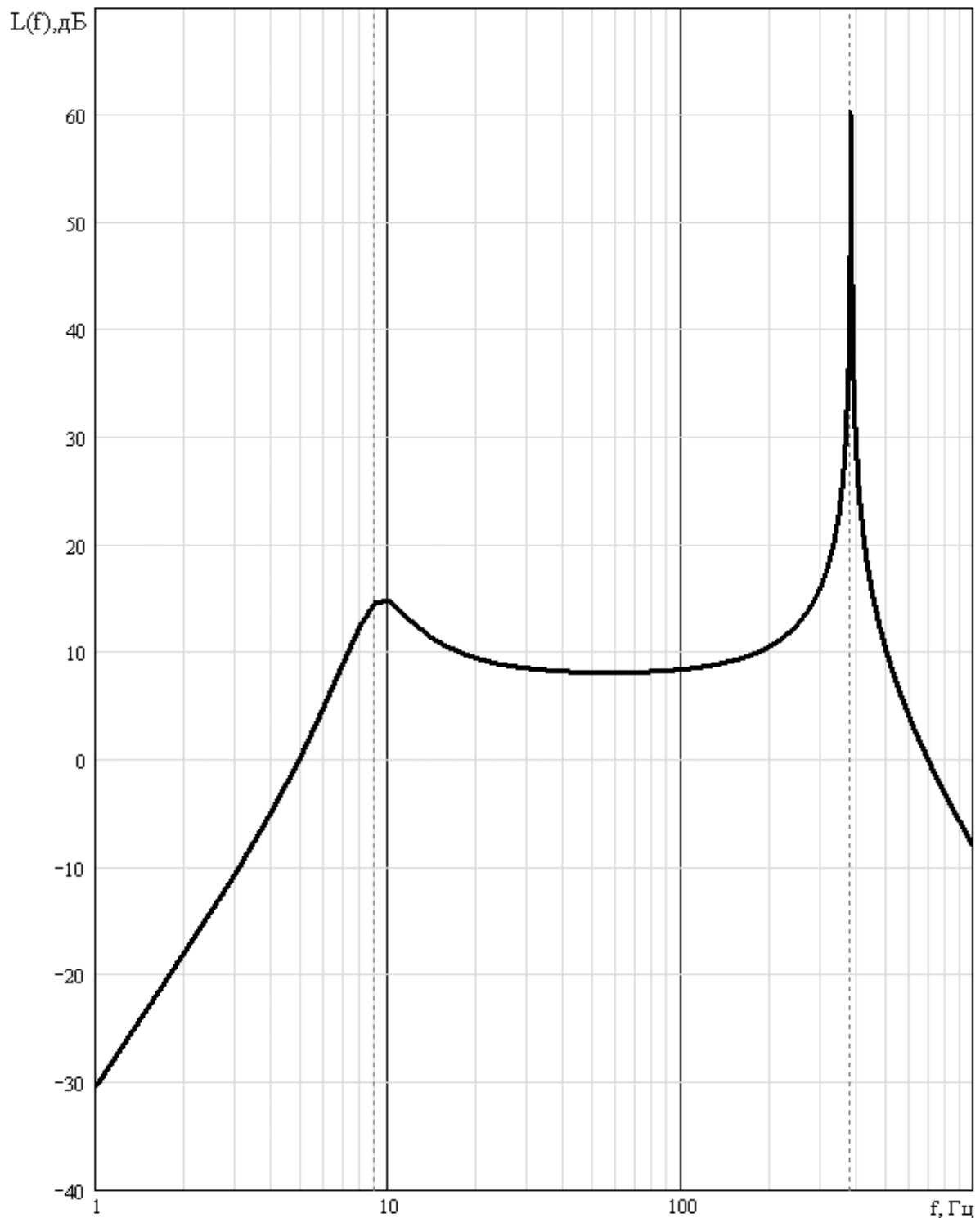
Повна передатна функція по керуючому впливу електромеханічної системи для віброобробки з електродинамічним двигуном зворотно-поступальної дії в якості виконавчого органу, отримана після перетворень структурної схеми:

$$W(p) = \frac{Bw\ell C_m p^2}{D(p)},$$

де

$$D(p) = mML_K p^5 + mMR_K p^4 + \left( (m(C_m + C_M) + MC_m) \cdot L_K + M(Bw\ell)^2 \right) p^3 + (m(C_m + C_M) + MC_m) \cdot R_K \cdot p^2 + (C_m C_M L_K + C_M (Bw\ell)^2) p + C_m C_M R_K$$

Побудуємо логарифмічну амплітудно-частотну характеристику (ЛАЧХ) електромеханічної системи для виявлення її динамічних властивостей (рис. 4.12).



*Рисунок 4.12 – ЛАЧХ електромеханічної системи для вібростабілізаційної обробки металевих деталей*

При моделюванні були використані наступні числові значення:  $M = 80$  кг (маса закріпленої на деталі частини двигуна – холостий хід),  $m = 10$  кг (маса вільної рухомої частини),  $C_M = 4,6 \cdot 10^8$  Н/м,  $C_m = 3,2 \cdot 10^4$  Н/м (з розрахунку статичного стиснення приблизно на 3 мм під вагою рухомої частини двигуна). Магнітна індукція  $B = 1$  Тл, число

витків рухомої котушки  $w=10$ ,  $\ell=0,4\text{м}$ . Розрахункові індуктивність і активний опір рухомої котушки  $L_K = 3,12 \cdot 10^{-6}$  Гн та  $R_K = 0,063$  Ом відповідно. Коефіцієнт підсилення системи становить  $5500 \text{ м}/(\text{В} \cdot \text{с}^2)$ . З його збільшенням амплітуда дії вібрації також збільшується.

З рис. 4.12 бачимо, що система має дві яскраво виражені резонансні частоти, одна з яких обумовлена масою рухомої частини двигуна  $m$  і жорсткістю  $C_m$  (4.7), а друга – масою закріпленої частини двигуна разом з деталлю  $M$  і змінною жорсткістю  $C_M$  (4.8). Для обраних параметрів системи  $f_m = 9$  Гц,  $f_M = 381$  Гц.

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_m}{m}}. \quad (4.7)$$

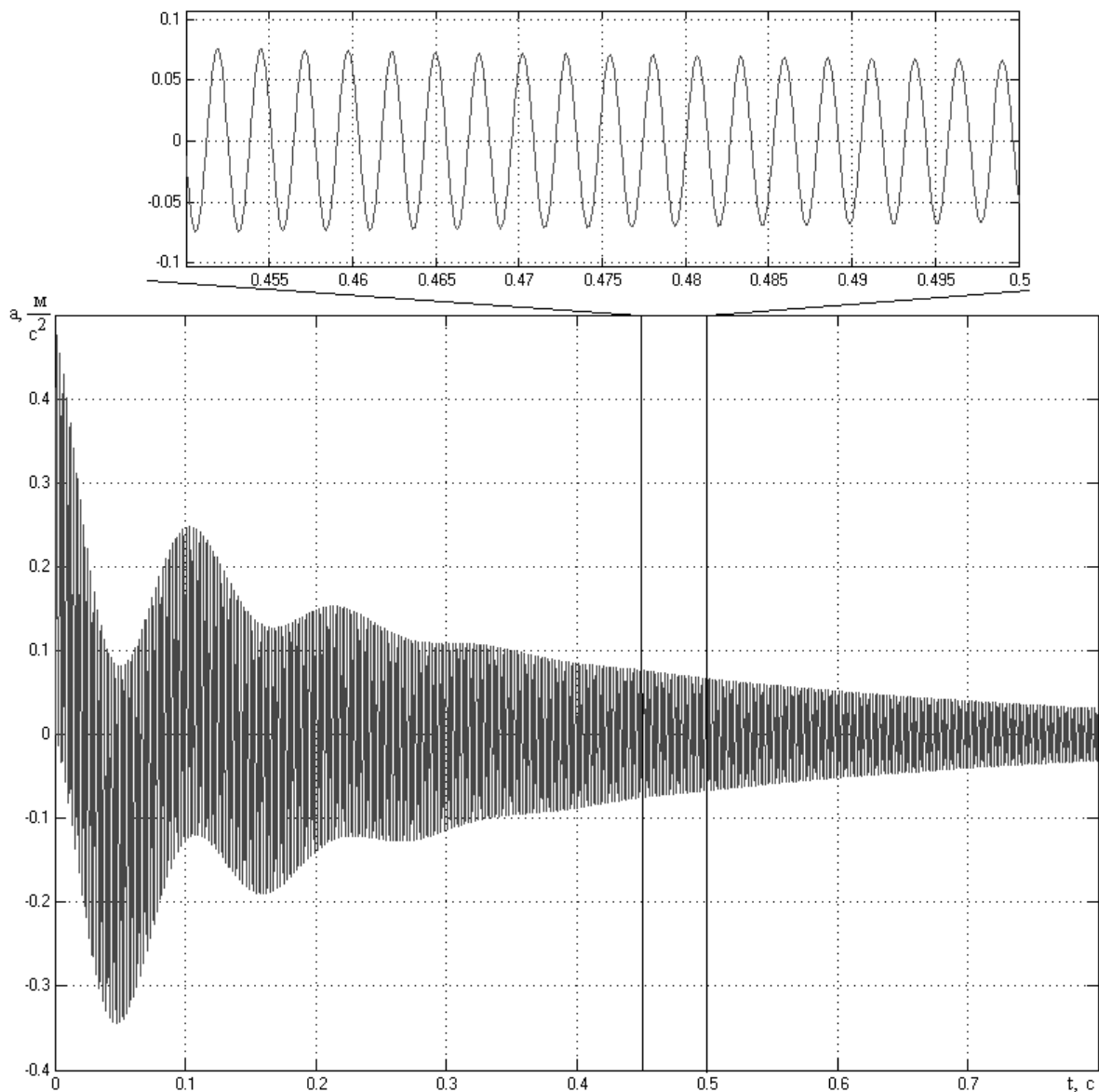
$$f_M = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_M}{M}}. \quad (4.8)$$

Досліджуємо поведінку системи, що має в замкнутому стані ЛАЧХ, наведену на рис. 4.12, при подачі на її вхід сигналів різного виду (напруги на обмотці рухомої котушки):

- одиничного сигналу (постійна напруга на вході підсилювача);
- синусоїдального сигналу з резонансною частотою закріпленої маси лінійного двигуна зворотно-поступального руху;
- синусоїдального сигналу з частотою, відмінною від резонансних частот вібрисистеми;
- полігармонічного сигналу, який містить у своєму спектрі три частоти, що не збігаються з резонансними частотами вібрисистеми.

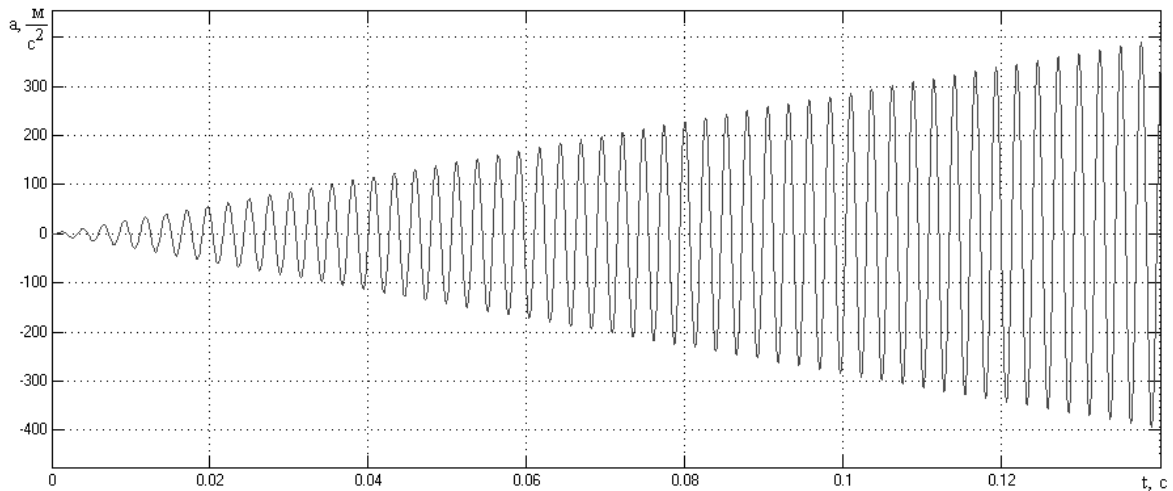
Моделювання проводимо на комп'ютері з використанням чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь з адаптивним кроком.





*Рисунок 4.13 – Віброприскорення, що отримується при подачі на вхід математичної моделі одиничного сигналу величиною 1 В*

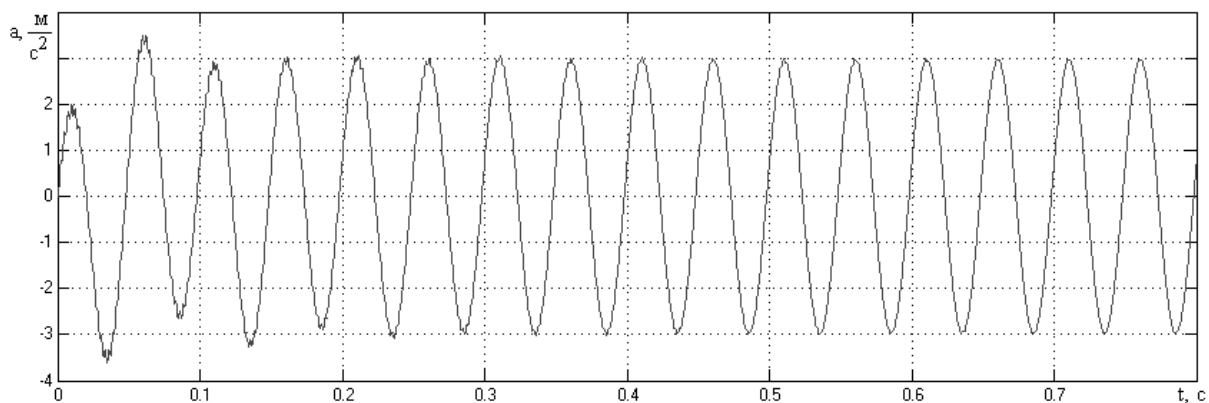
З рис. 4.13 бачимо, що при подачі одиничного сигналу коливальний процес носить затухаючий характер. Коливання проходять як на резонансній частоті великої маси, так і на резонансній частоті малої маси. Коливання на частоті  $f_m$  загасають швидше, судячи за формою обвідної, а на частоті  $f_M$  – тривають довше, але з плином часу теж загасають.



*Рисунок 4.14 – Віброприскорення, що отримується при подачі на вхід математичної моделі синусоїдального сигналу (напруги з амплітудою 10 В), що має частоту, рівну резонансній частоті великої маси  $M$*

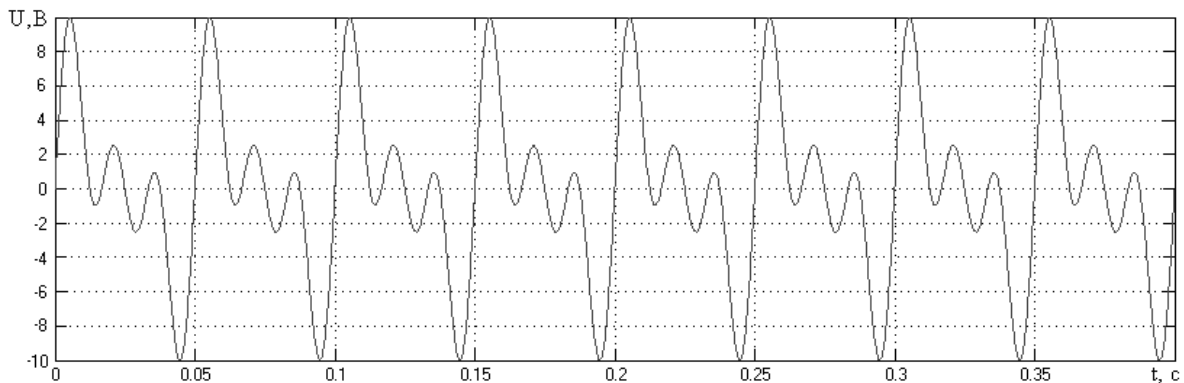
Виходячи з перехідного процесу, зображеного на рис. 4.14, можна зробити висновок, що при обробці на резонансній частоті електромеханічної системи перехідний процес носить розбіжний характер, віброприскорення і переміщення деталі за короткий проміжок часу досягають небезпечних значень, які можуть надати деструктивний вплив, як на оброблювану деталь, так і на вібропривод (допустиме віброприскорення, як правило, не повинно перевищувати  $50 \text{ м/с}^2$ ).

При обробці на одній частоті, відмінній від власних частот електромеханічної системи (рис. 4.15), перехідний процес носить коливальний характер, але коливання, обумовлені власними частотами віброприводу досить швидко (протягом 0,3 – 0,5 секунд) загасають і далі обробка ведеться лише на частоті вимушених коливань (в представленому прикладі ця частота становить 20 Гц).

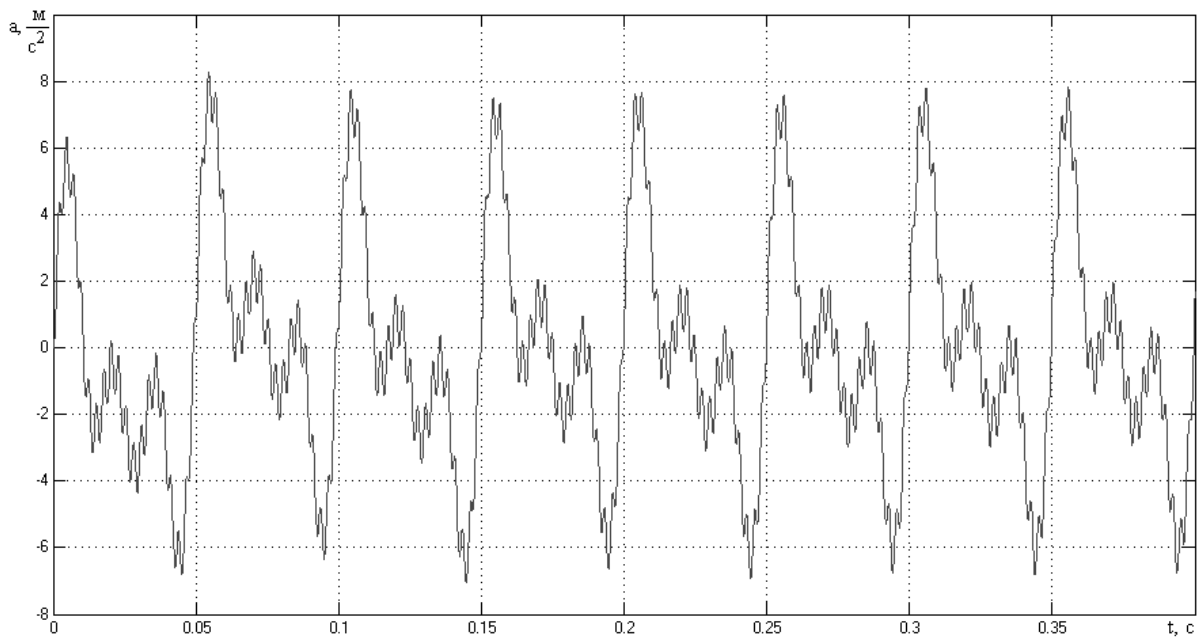


*Рисунок 4.15 – Віброприскорення, що отримується при подачі на вхід математичної моделі синусоїдального сигналу (напруги величиною 10 В), що має частоту  $f = 20 \text{ Гц}$ , відмінну від власних частот системи*

У разі впливу полігармонічним сигналом (рис. 4.16) з частотами, відмінними від власних частот електромеханічної системи, перехідний процес протікає таким же чином, як і в випадку гармонічного впливу: перехідний процес швидко закінчується і система точно відтворює заданий полігармонічний закон віброобробки (рис. 4.17).



*Рисунок 4.16 – Полігармонічний сигнал, що містить три гармоніки частотами 20, 40, 60 Гц з рівними амплітудами (напруги величиною 4 В)*



*Рисунок 4.17 – Віброприскорення, що отримується при подачі на вхід математичної моделі сигналу, показано на рис. 4.16*

Таким чином, запропонована електромеханічна система для віброобробки металевих деталей має можливість створювати гармонічний, полігармонічний або майже періодичний механічний вплив на деталь на частотах, відмінних від власних частот віброприводу. Підсистема управління повинна давати заборону на появу власних частот вібросистеми в спектрі сигналу завдання або формувати сигнал управління, який обмежує віброприскорення по амплітуді.

### 4.3 Трьохкоординатний електромагнітний вібростенд

Робота по створенню систем електромагнітного збудження механічних коливань, для різних технологічних процесів, зокрема для коливання ливарних форм при виготовленні виливків з різних металів і сплавів є актуальною, оскільки спрямована на підвищення якості лиття з використанням більш економічного обладнання. Так само багатокоординатні вібростенди грають важливу роль в сучасній випробувальній техніці при вирішенні завдань скорочення часу випробувань і підвищення достовірності одержуваних оцінок, оскільки формуються на них вібрації найбільш повно відповідають експлуатаційним навантаженням.

Розглянемо трьох координатний електромагнітний вібростенд (ЕМВС) [13], наведений на рис. 4.18 принцип збудження коливань платформи, пов'язаної з трьома якорями певним чином, засноване на впливі на якорі змінним магнітним полем, чинним одночасно за трьома напрямками.

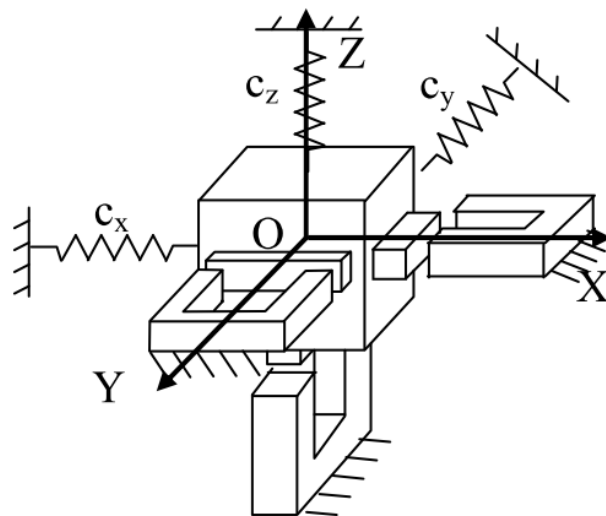


Рисунок 4.18 – Загальний вигляд ЕМВС

Рівняння динаміки трьохкоординатної ЕМВС, отримані на підставі рівнянь Лагранжа-Максвелла [13], мають вигляд:

$$m\ddot{x} + b_x\dot{x} + c_x x = DI_x^{*2} \left[ a + \frac{1}{2} \delta(\Psi + \theta) \right]$$

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + c_y y = -c_y \Psi a + DI_y^{*2} \left[ a + \frac{1}{2} \delta(\varphi + \Psi) \right]$$

$$m\ddot{z} + b_z\dot{z} + c_z z = DI_z^{*2} \left[ a + \frac{1}{2} \delta(\varphi + \theta) \right]$$

$$J_z \ddot{\phi} = \frac{1}{2} D \delta [I_y^{*2} (\delta - y) + I_z^{*2} (\delta - z)]$$

$$J_z \ddot{\Psi} + c_y \varphi a^2 + b_y \dot{\Psi} a^2 = -J_z \ddot{\phi} - c_y y a - b_y \dot{y} a + \frac{1}{2} D \delta [I_x^{*2} (\delta - x) + I_y^{*2} (\delta - y)]$$

$$J_x \ddot{\theta} = \frac{1}{2} D \delta [I_x^{*2} (\delta - x) + I_z^{*2} (\delta - z)]$$

$$\dot{I}_x^* \left[ a + \delta - x + \frac{1}{2} \delta (\Psi + \theta) \right] + I_x^* \left[ \frac{R_x (\delta - x)}{2D} - \left( \dot{x} - \frac{1}{2} \delta (\dot{\Psi} + \dot{\theta}) \right) \right] = \frac{U_x}{2D}$$

$$\dot{I}_y^* \left[ a + \delta - y + \frac{1}{2} \delta (\varphi + \Psi) \right] + I_y^* \left[ \frac{R_y (\delta - y)}{2D} - \left( \dot{y} - \frac{1}{2} \delta (\dot{\phi} + \dot{\Psi}) \right) \right] = \frac{U_y}{2D}$$

$$\dot{I}_z^* \left[ a + \delta - z + \frac{1}{2} \delta (\varphi + \theta) \right] + I_z^* \left[ \frac{R_z (\delta - z)}{2D} - \left( \dot{z} - \frac{1}{2} \delta (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \right) \right] = \frac{U_z}{2D}$$

где  $I_q^* = \frac{I_q}{\delta - q}$ ;  $D = \frac{w^2 \mu \mu_0 (a + \delta)}{2}$ ;  $q$  – лінійні узагальнені

координати;

$m$  – маса платформи;

$C_x, C_y, C_z$  – коефіцієнти жорсткості пружних елементів,

встановлених відповідно за координатами  $X, Y, Z$ ;

$x, y, z, \varphi, \Psi, \theta$  – переміщення маси  $m$ ;

$b_x, b_y, b_z$  – коефіцієнти дисипації;

$J_x, J_y, J_z$  – моменти інерції платформи;

$I_x, I_y, I_z$  – токи в котушках;

$\delta$  – величина повітряних зазорів;

$$(a + \delta) \left( a + \delta - x + \frac{1}{2} \delta \Psi + \frac{1}{2} \delta \theta \right), (a + \delta) \left( a + \delta - y + \frac{1}{2} \delta \varphi + \frac{1}{2} \delta \Psi \right),$$

$$(a + \delta) \left( a + \delta - z + \frac{1}{2} \delta \varphi + \frac{1}{2} \delta \theta \right) \quad \text{– площі повітряних зазорів по}$$

координатам  $X, Y, Z$  відповідно;

$a$  – сторона перерізу магнітопроводу;

$w$  – число витків;

$R$  – активний опір котушок;

$\mu \mu_0$  – магнітні проникності.

Будемо вважати, що напруга змінюється за гармонічним законом:

$$U_x = U_{x0} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad U_y = U_{y0} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad U_z = U_{z0} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Таким чином, рух розглядуваної електромеханічної динамічної системи описується системою дев'ятьох диференціальних рівнянь з узагальненими координатами:  $x(t), y(t), z(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t), I_x(t), I_y(t), I_z(t)$ .

Загальне переміщення розрахуємо за формулою:

$$s_{xx}(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}.$$

Знайдемо проекції швидкості на осі координат і загальну швидкість:

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad v_z(t) := \frac{d}{dt}z(t) \quad v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

Аналогічно визначимо кутові швидкості:

$$\Omega(t) := \frac{d}{dt}\varphi(t), \quad \Theta(t) := \frac{d}{dt}\theta(t), \quad \Psi(t) := \frac{d}{dt}\psi(t).$$

Розрахунки виконані при наступних вихідних даних:  $m=0.4$  кг,  $C_x=500000$  Н/м,  $C_y=200000$  Н/м,  $C_z=100000$  Н/м,  $b_x=0.2$  с<sup>-1</sup>,  $b_y=0.8$  с<sup>-1</sup>,  $b_z=1.6$  с<sup>-1</sup>,  $J_x=0.1$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_y=0.2$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_z=0.4$  кг·м<sup>2</sup>,  $D=50$ ,  $R_x=0.2$  Ом,  $R_y=0.6$  Ом,  $R_z=1.2$  Ом,  $U_x=9$  В,  $U_y=18$  В,  $U_z=36$  В,  $\delta=0.01$  м,  $\omega=12,5$  с<sup>-1</sup>. Початкові умови:  $x_0=0.001$  м,  $y_0=0.001$  м,  $z_0=0.001$  м,  $v_{x0}=0.001$  м/с,  $v_{y0}=0.001$  м/с,  $v_{z0}=0.001$  м/с,  $\varphi_0=0,001$  рад.,  $\theta_0=0,001$  рад.,  $\psi_0=0,001$  рад.,  $\Omega_0=0,001$  рад./с,  $\Theta_0=0,001$  рад./с,  $\Psi_0=0,001$  рад./с,  $I_x=0.1$  А,  $I_y=0.1$  А,  $I_z=0.1$  А.

Лістинг програми в Mathcad:

```

g := 9.8      m := 0.4      cx := 500000    cy := 200000    cz := 100000    dd := 50
bx := 0.2     by := 0.8     bz := 1.6      Jx := 0.1      Jy := 0.2      Jz := 0.4
delta := 0.01 a := 0.01    omega := 12.5  Rx := 0.2     Ry := 0.6     Rz := 1.2
Ux := 9      Uy := 18      Uz := 36

```

Given

$$m \cdot x''(t) + bx \cdot x'(t) + cx \cdot x(t) = dd \cdot \left( \frac{Ix(t)}{\delta\delta - x(t)} \right)^2 \cdot [a + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi(t) + \theta(t))]$$

$$m \cdot y''(t) + by \cdot y'(t) + cy \cdot y(t) = -cy \cdot a \cdot \psi(t) + dd \cdot \left( \frac{Iy(t)}{\delta\delta - y(t)} \right)^2 \cdot [a + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi(t) + \varphi(t))]$$

$$m \cdot z''(t) + bz \cdot z'(t) + cz \cdot z(t) = dd \cdot \left( \frac{Iz(t)}{\delta\delta - z(t)} \right)^2 \cdot [a + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\theta(t) + \varphi(t))]$$

$$Jz \cdot \varphi''(t) = 0.5 \cdot dd \cdot \delta\delta \cdot \left[ \left( \frac{Iy(t)}{\delta\delta - y(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - y(t)) + \left( \frac{Iz(t)}{\delta\delta - z(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - z(t)) \right]$$

$$Jx \cdot \psi''(t) + cy \cdot \varphi(t) \cdot a^2 + by \cdot \psi'(t) \cdot a^2 = -Jz \cdot \varphi''(t) - cy \cdot a \cdot y(t) - by \cdot a \cdot y'(t) + 0.5 \cdot dd \cdot \delta\delta \cdot \left[ \left( \frac{Ix(t)}{\delta\delta - x(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - x(t)) + \left( \frac{Iy(t)}{\delta\delta - y(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - y(t)) \right]$$

$$Jx \cdot \theta''(t) = 0.5 \cdot dd \cdot \delta\delta \cdot \left[ \left( \frac{Ix(t)}{\delta\delta - x(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - x(t)) + \left( \frac{Iz(t)}{\delta\delta - z(t)} \right)^2 \cdot (\delta\delta - z(t)) \right]$$

$$\left[ \frac{Ix(t)}{\delta\delta - x(t)} + \frac{Ix(t) \cdot x'(t)}{(\delta\delta - x(t))^2} \right] \cdot [a + \delta\delta - x(t) + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi(t) + \theta(t))] + \frac{Ix(t)}{\delta\delta - x(t)} \cdot \left[ \frac{Rx \cdot (\delta\delta - x(t))}{2 \cdot dd} - [x'(t) - 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi'(t) + \theta'(t))] \right] = \frac{Ux \cdot \sin((\omega \cdot t))}{2 \cdot dd}$$

$$\left[ \frac{Iy(t)}{\delta\delta - y(t)} + \frac{Iy(t) \cdot y'(t)}{(\delta\delta - y(t))^2} \right] \cdot [a + \delta\delta - y(t) + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi(t) + \varphi(t))] + \frac{Iy(t)}{\delta\delta - y(t)} \cdot \left[ \frac{Ry \cdot (\delta\delta - y(t))}{2 \cdot dd} - [y'(t) - 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\psi'(t) + \varphi'(t))] \right] = \frac{Uy \cdot \sin((\omega \cdot t))}{2 \cdot dd}$$

$$\left[ \frac{Iz(t)}{\delta\delta - z(t)} + \frac{Iz(t) \cdot z'(t)}{(\delta\delta - z(t))^2} \right] \cdot [a + \delta\delta - z(t) + 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\varphi(t) + \theta(t))] + \frac{Iz(t)}{\delta\delta - z(t)} \cdot \left[ \frac{Rz \cdot (\delta\delta - z(t))}{2 \cdot dd} - [z'(t) - 0.5 \cdot \delta\delta \cdot (\varphi'(t) + \theta'(t))] \right] = \frac{Uz \cdot \sin((\omega \cdot t))}{2 \cdot dd}$$

$$\begin{array}{l}
 x(0) = 0.001 \quad x'(0) = 0.002 \quad y(0) = 0.001 \quad y'(0) = 0.002 \quad z(0) = 0.001 \quad z'(0) = 0.002 \\
 \varphi(0) = 0.001 \quad \varphi'(0) = 0.001 \quad \theta(0) = 0.001 \quad \theta'(0) = 0.001 \quad \psi(0) = 0.001 \quad \psi'(0) = 0.001 \\
 I_x(0) = 0.1 \quad I_y(0) = 0.1 \quad I_z(0) = 0.1
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \\ I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \\ I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}, t, 0.05 \right]$$

$$s(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

$$v_x(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad v_y(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad v_z(t) := \frac{d}{dt}z(t) \quad v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

$$i := 0..100 \quad h := \frac{0.11}{400} \quad tt_i := i \cdot h \quad X_i := x(tt_i) \quad Y_i := y(tt_i) \quad Z_i := z(tt_i)$$

$$\varphi_i := \frac{qf}{q} \varphi(t) \quad \theta_i := \frac{qf}{q} \theta(t) \quad \psi_i := \frac{qf}{q} \psi(t)$$

Результати моделювання представлені на рис. 4.19...4.26.

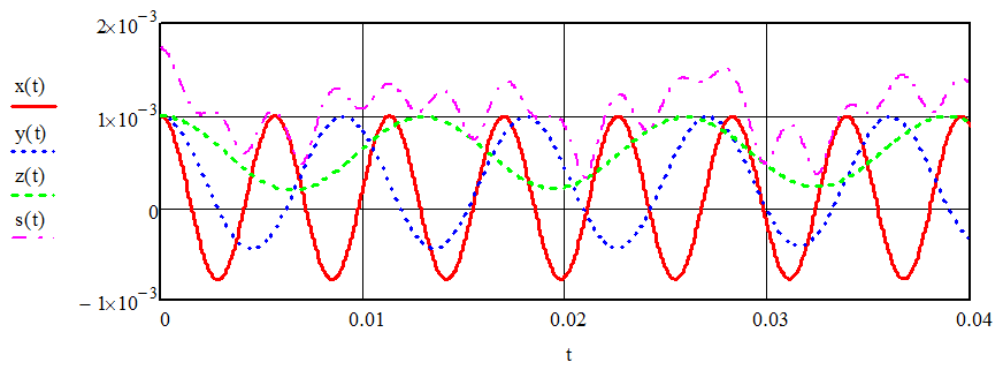


Рисунок 4.19 – Графік залежності координат  $x, y, z, s$  від часу  $t$

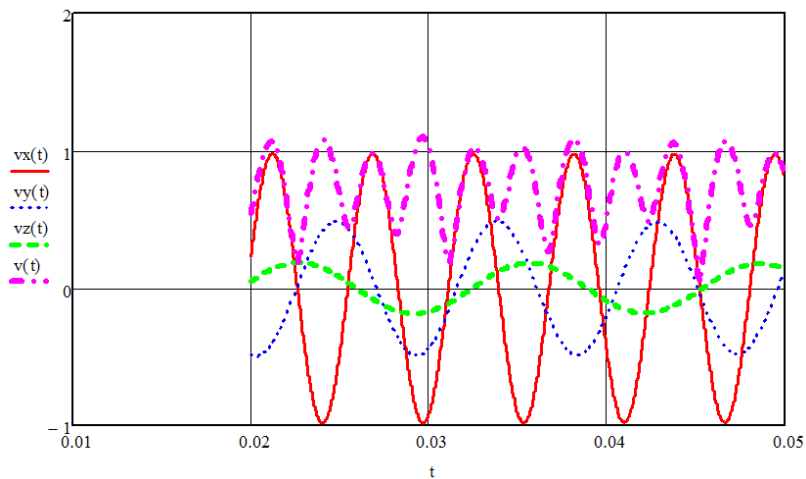


Рисунок 4.20 – Графік залежності швидкостей від часу  $t$

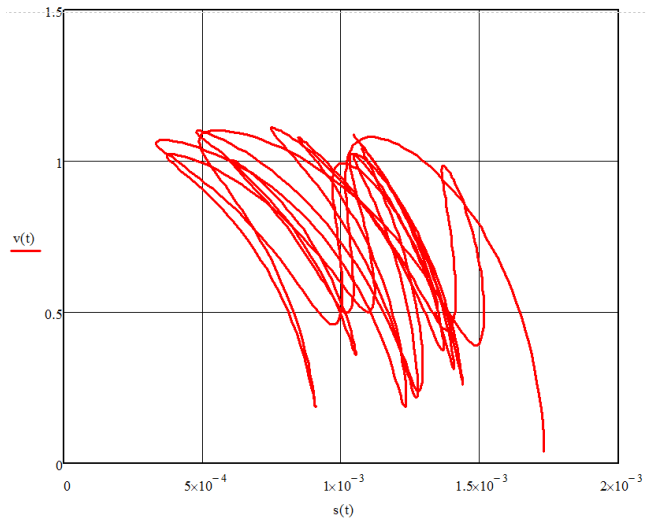


Рисунок 4.21 – Фазовий портрет

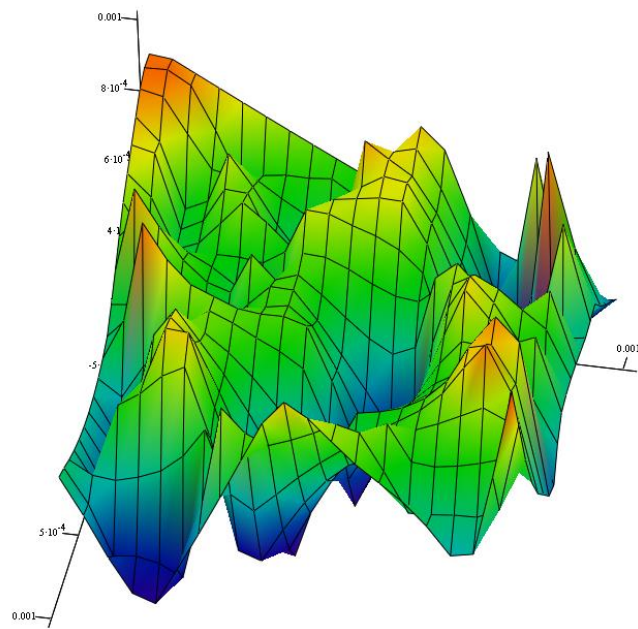


Рисунок 4.22 – 3D графік x-y-z

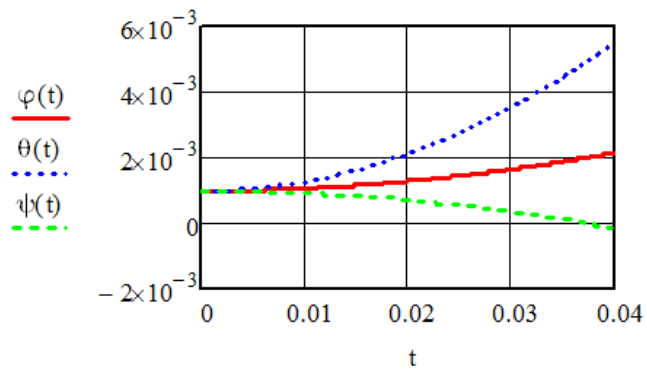


Рисунок 4.23 – Графік залежності куткових переміщень  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  від часу  $t$



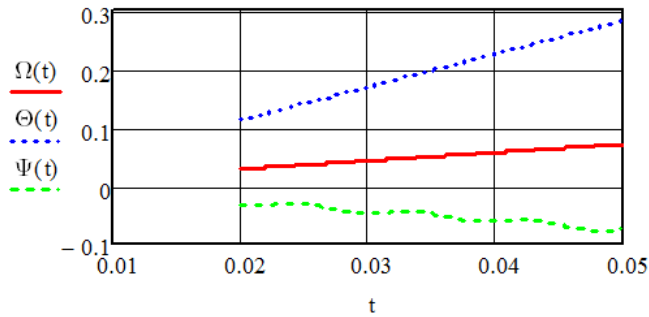


Рисунок 4.24 – Графік залежності кутових швидкостей  $\Omega$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$  від часу  $t$

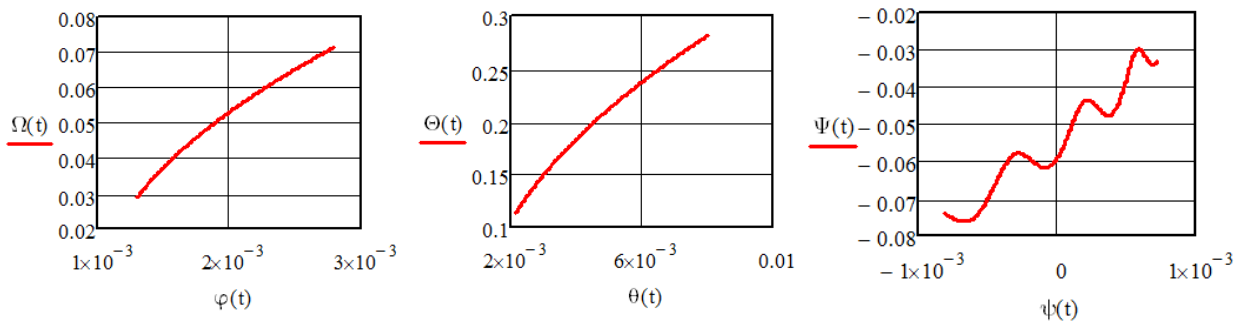


Рисунок 4.25 – Фазові портрети для кутових параметрів

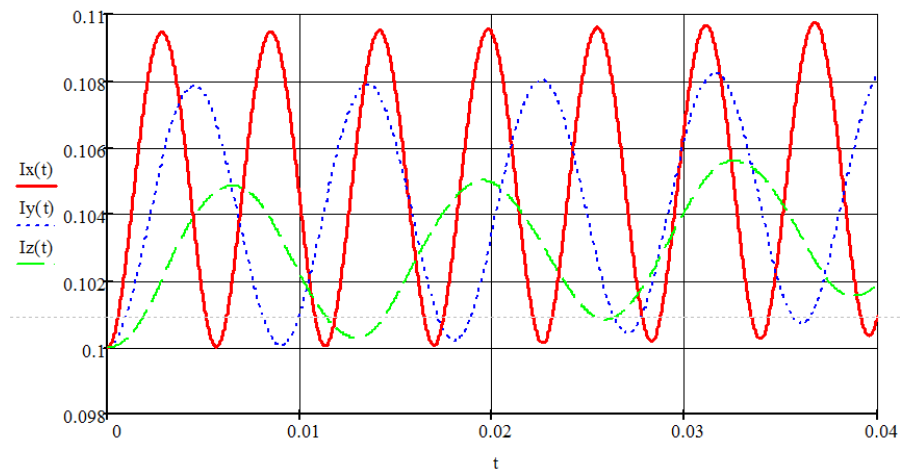


Рисунок 4.26 – Графік залежності струмів  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  від часу  $t$

Аналізуючи отримані результати можна сказати, що лінійні координати (рис. 4.19) змінюються за гармонічним законом, але внаслідок різних жорсткостей пружних елементів мають різні частоти і періоди коливань. Внаслідок цього загальне переміщення вантажу має хаотичний характер, про що свідчать рис. 4.21 і 4.22. Проекції швидкостей на Декартові осі координат також змінюються гармонічно (рис. 4.20). Однак, не зважаючи на досить складні і громіздкі рівняння, що описують рух системи, з рис. 4.23...4.25 видно, що кутові характеристики (кути повороту і швидкості) змінюються майже монотонно (за винятком третьої кутової координати). Останні три узагальнені координати (сили струму  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ) відносяться до електричної частини електродинамічної системи і змінюються за законом, наближеним до гармонічного. Очевидно, що

амплітуда коливань цих параметрів тим більша, чим більша величина напруги (за вихідними даними).

Математична модель багатокординатного електромагнітного вібростенда враховує особливості нелінійності системи і містить дев'ять перемінних параметрів, що описують рух як механічної, так і електричної частин системи. При певних умовах можлива хаотична поведінка системи. Розрахункові формули, отримані в процесі математичного моделювання і наведені в цій статті, а також створена і реалізована на ЕОМ програма дають можливість провести аналіз впливу всіх параметрів ЕМВС як окремо, так і в їх взаємозв'язку на характеристики системи. Крім того, отримані формули забезпечують можливість конструювання ЕМВС з найбільш раціональними характеристиками і оптимальним співвідношенням конструктивних параметрів. Отримана математична модель ЕДВС - є основою для математичного моделювання при випробуванні вібростендів, а також для аналізу і синтезу систем управління із зворотними зв'язками по прискоренню, силі, добутку сили на прискорення.

## 5 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 5.1 Електродвигун постійного струму з незалежним збудженням

Електродвигун постійного струму з незалежним збудженням призводить в рух вхідний ланка механізму, для якого наведений момент інерції  $J_{\Pi}$ . Індуктивності обмоток збудження і якоря ротора  $L_B$  і  $L_{Я}$ , а їх взаємна індуктивність  $M(\varphi)$ . Вважаючи, що  $J_{\Pi}$ ,  $M(\varphi)$  і приведений момент сил тощо  $M_{np}$  - задані функції кута  $\varphi$  повороту якоря електродвигуна, скласти рівняння динаміки розглянутої електромеханічної системи і виконати її дослідження.

#### Рішення.

Якщо вважати струм  $i_B$  в обмотці збудження постійним, то стан електромеханічної системи визначається двома узагальненими координатами – кутом  $\varphi$  повороту якоря і зарядом, що відповідає току  $i_{Я}$  в обмотці якоря

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = q_{\vartheta} = \int_0^t i_{Я} \cdot dt.$$

Для такої двоступеневої електромеханічної системи маємо наступні рівняння Лагранжа - Максвелла:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\vartheta}} = Q_{q}.$$

Кінетична енергія розглянутої електромеханічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії  $T_M$  механічної частини системи і енергії магнітного поля  $T_E$  електричного кола. Тому

$$T = T_M + T_{\vartheta} = \frac{1}{2} \left[ J_z \cdot \dot{\varphi}^2 + L_B \cdot i_B^2 + L_{Я} \cdot i_{Я}^2 + 2M(\varphi) \cdot i_{Я} \cdot i_B \right].$$

Для знаходження узагальненої сили  $Q_{\varphi}$  дамо якорю електродвигуна віртуальне кутове переміщення  $\delta\varphi$ , вважаючи при цьому електричний заряд  $q_e$  незмінним. Маємо

$$\delta A_{\varphi} = M_{np} \cdot \delta\varphi, \quad \text{отже, } Q_{\varphi} = M_{np}.$$

При обчисленні узагальненої сили  $Q_q$  будемо вважати, що електричний заряд  $q_e$  зміниться, а якір залишається нерухомим, тобто  $\delta q_e \neq 0, \delta\varphi = 0$ . Віртуальна робота при цьому дорівнює

$$\delta A_q = (U - i_{Я} \cdot R) \cdot \delta q_e,$$

де  $U$  – напруга, прикладена до обмотки якоря,  $R$  – опір цієї обмотки.

Отже, узагальненою силою  $Q_q$ , відповідної обраної узагальненої координаті  $q_e$ , є вираз

$$Q_q = U - i_{Я} \cdot R.$$

Обчислимо необхідні похідні від кінетичної енергії розглянутої системи, вважаючи, що індуктивності  $L_B$  і  $L_{Я}$  є постійними, а взаємна індуктивність  $M(\varphi)$  залежить від кута повороту якоря електродвигуна

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{II} \cdot \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_{II} \cdot \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial J_{II}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_{Я} \cdot i_B + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial J_{II}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_3} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{dT}{di_{Я}} = L_{Я} \cdot i_{Я} + M(\varphi) \cdot i_B, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial i_{Я}} \right) = L_{Я} \cdot \frac{di_{Я}}{dt} + \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot i_B.$$

Підставляючи отримані похідні і узагальнені сили в рівняння Лагранжа - Максвелла, отримаємо шукані рівняння динаміка електромеханічної системи, що розглядається:

$$J_{II} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial J_{II}}{\partial \varphi} - \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_{Я} \cdot i_B = M_{np},$$

$$L_{Я} \cdot \frac{di_{Я}}{dt} + \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot i_B = U - i_{Я} \cdot R. \quad (5.1)$$

Знайдемо чисельне рішення системи (5.1) в програмі Matlab. Для цього зведемо систему (5.1) до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього введемо функції  $y_1(t) = \varphi(t)$ ,  $y_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ ,  $y_3(t) = i_{Я}(t)$ . Тоді систему (5.1) можна записати у вигляді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{M_{np}(y_1(t))}{J_{II}(y_1(t))} - \frac{y_2^2(t) \frac{\partial J_{II}(y_1(t))}{\partial y_1}}{2J_{II}(y_1(t))} + \frac{\frac{\partial M(y_1(t))}{\partial y_1} y_3(t) i_B}{J_{II}(y_1(t))}$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = \frac{1}{L_{Я}} (U - y_3(t)R) - \frac{1}{L_{Я}} \frac{\partial M(y_1(t))}{\partial y_1} y_2(t) i_B$$

Програма розв'язку цієї системи у програмі Matlab буде мати вигляд

```
Файл Mpr.m
function F=Mpr(phi,M1,M2)
F=exp(-(phi));
```

Файл diffMind.m

```
function F=diffMind(phi,Mmax)
F=-Mmax*sin(phi);
```

#### Файл funJ.m

```
function F=funJ(phi,J0,kmax)
F=J0+kmax*(sin(phi));
```

#### Файл diffJ.m

```
function F=diffJ(phi,kmax)
F=kmax*(cos(phi));
```

#### Файл fun26.m

```
function F=fun26(t,y,L,R,ib,M1,M2,kmax,Mmax,U,J0)
F=[y(2);Mpr(y(1),M1,M2)./funJ(y(1),J0,kmax)-
y(2).^2.*diffJ(y(1),kmax)./funJ(y(1),J0,kmax)/2+ ...
diffMind(y(1),Mmax).*y(3)*ib./funJ(y(1),J0,kmax); (U-y(3)*R)/L-
diffMind(y(1),Mmax).*y(2)*ib/L];
```

#### Файл sol2\_6.m

```
function sol2_6
hold on;
Y0=[0;0.1;1];

L=[1 2 3];
R=[10 15 20];
ib=[0.3 0.6 1];
param=[4 10 0.3 5 10 0.01 0.015 220 0.2];
fgraph(L,param,Y0,[0 6],1,3,1,'L','Залежність кута поворота якоря \phi від часу t','\phi',0);
fgraph(R,param,Y0,[0 6],1,3,2,'R','Залежність кута поворота якоря \phi від часу t','\phi',0);
fgraph(ib,param,Y0,[0 6],1,3,3,'i_b','Залежність кута поворота якоря \phi від часу t','\phi',0);

fgraph(L,param,Y0,[0 6],2,3,1,'L','Залежність кутової швидкості якоря \omega від часу t','\omega',0);
fgraph(R,param,Y0,[0 6],2,3,2,'R','Залежність кутової швидкості якоря \omega від часу t','\omega',0);
fgraph(ib,param,Y0,[0 6],2,3,3,'i_b','Залежність кутової швидкості якоря \omega від часу t','\omega',0);

fgraph(L,param,Y0,[0 6],3,3,1,'L','Залежність струму якоря I від часу t','I',0);
fgraph(R,param,Y0,[0 6],3,3,2,'R','Залежність струму якоря I від часу t','I',0);
fgraph(ib,param,Y0,[0 6],3,3,3,'i_b','Залежність струму якоря I від часу t','I',0);
%fgraph(alpha,param,Y0,[0 0.7],2,4,1,'alpha','Залежність робочого струму I від часу t','I',0);
%fgraph(J,param,Y0,[0 5],2,4,2,'J','Залежність робочого струму I від часу t','I',0);
%fgraph(R,param,Y0,[0 5],2,4,3,'R','Залежність робочого струму I від часу t','I',0);
%fgraph(L,param,Y0,[0 5],2,4,4,'L','Залежність робочого струму I від часу t','I',0);
```

```
function fgraph(pvar,pconst,Y0,tint,nf,n,nvar,sleg,nazv,ordinata,phase)
figure;
hold on;
for i=1:n
    switch nvar
        case 1
```

```

        [T, Y]=ode45 (@ (t, y)
fun26 (t, y, pvar (i), pconst (2), pconst (3), pconst (4), ...
pconst (5), pconst (6), pconst (7), pconst (8), pconst (9)), tint, Y0);
        n1='для різних значень параметру L';
        case 2
            [T, Y]=ode45 (@ (t, y)
fun26 (t, y, pconst (1), pvar (i), pconst (3), pconst (4), ...
pconst (5), pconst (6), pconst (7), pconst (8), pconst (9)), tint, Y0);
            n1='для різних значень параметру R';
            case 3
                [T, Y]=ode45 (@ (t, y) fun26 (t, y, pconst (1),
pconst (2), pvar (i), pconst (4), ...
pconst (5), pconst (6), pconst (7), pconst (8), pconst (9)), tint, Y0);
                n1='для різних значень параметру i_b';

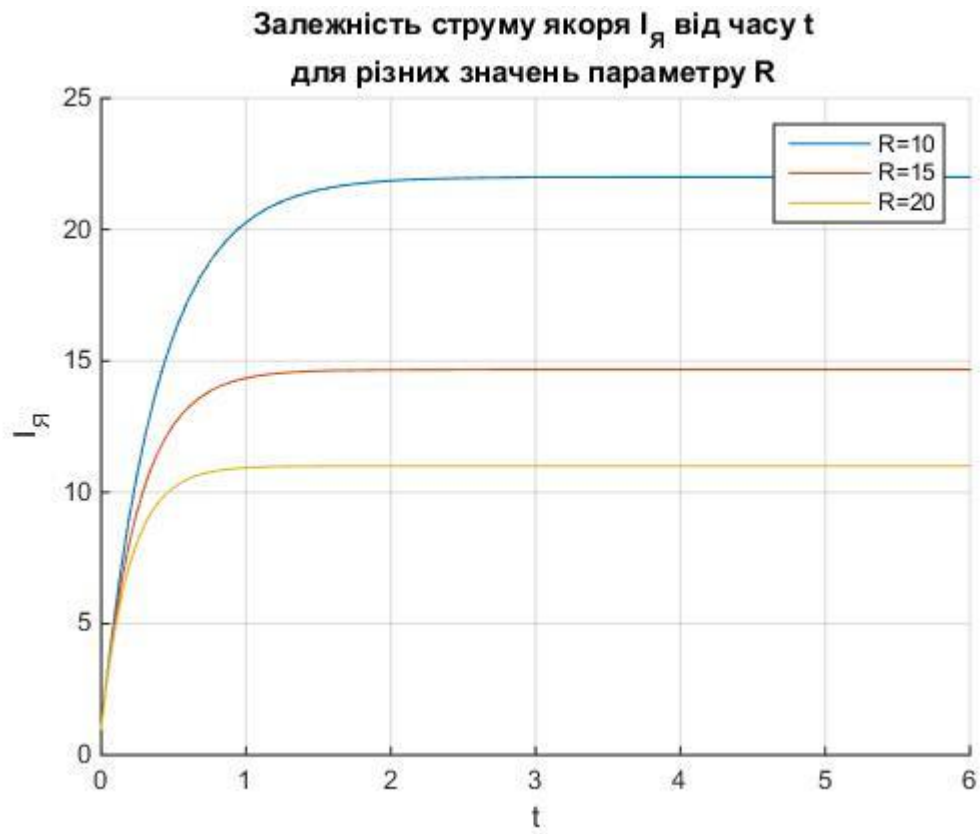
            otherwise
                warning ('error');
        end
        if phase==0
            plot (T, Y (:, nf));
        else
            plot (Y (:, 1), Y (:, 2));
        end
    end
end
grid on; hold off;
title ({nazv; n1})
if phase==0
    xlabel ('t');
    ylabel (ordinata)
else
    xlabel ('\omega')
    ylabel ('I')
end
legend (strcat (sleg, '=', num2str (pvar (1))), strcat (sleg, '=', num2str (pvar (2))),
strcat (sleg, '=', num2str (pvar (3))));

```

В якості залежності моменту інерції  $J_{II}$  від кута  $\varphi$  була вибрана залежність виду  $J_{II}(\varphi) = J_0 + k_{\max} \sin(\varphi)$ , що відповідає кривошипно-шатунному механізму. Функцію  $M_{np}(\varphi)$  вважали рівною  $M_{np}(\varphi) = \exp(-\varphi)$ , взаємну індуктивність  $M(\varphi) = M_{\max} \cos(\varphi)$ .

На рис. 5.1 показана залежність струму якоря  $i_{\text{я}}$  від часу  $t$  для різних значень опору  $R$  та індуктивності  $L_{\text{я}}$  обмотки якоря.

a)



b)

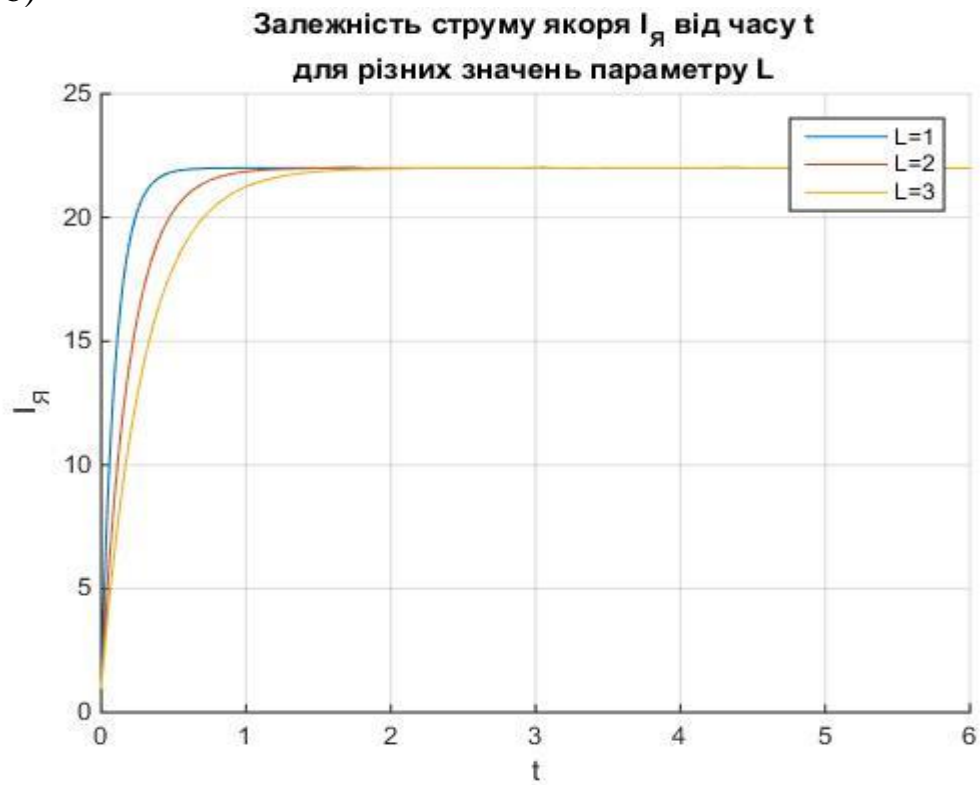
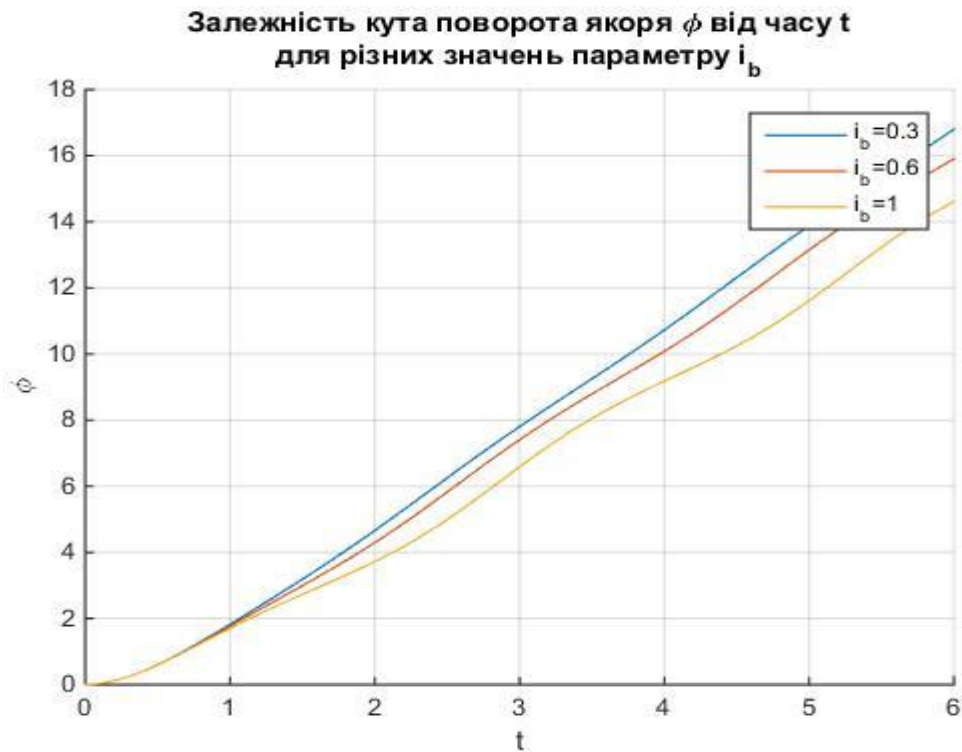


Рисунок 5.1 – Залежність струму якоря  $i_{\text{я}}$  від часу  $t$

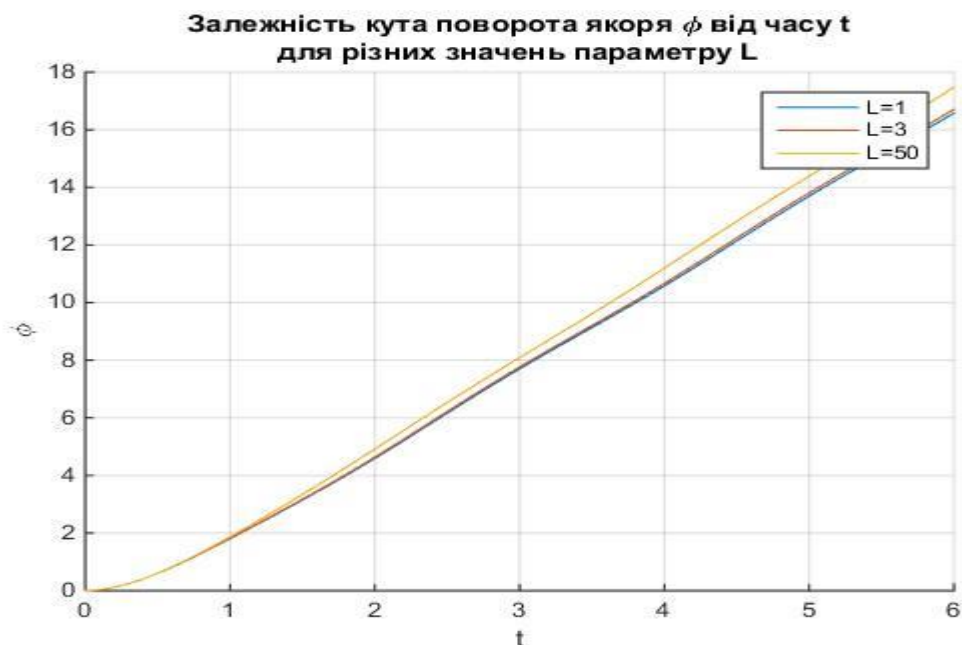
З рис. 5.1, а) видно що після завершення перехідного процесу значення струму набуває сталого значення, яке зменшується зі зростанням  $R$ . Зі збільшенням індуктивності  $L_{я}$  обмотки якоря збільшується тривалість перехідного процесу, а значення струму не змінюється, що показує рис. 5.1, б).

На рис. 5.2 показана залежність кута повороту якоря  $\phi$  і кутової швидкості  $\omega$  від часу  $t$  для різних значень опору  $R$ , індуктивності  $L_{я}$  обмотки якоря та струму  $i_b$  в обмотці збудження.

а)

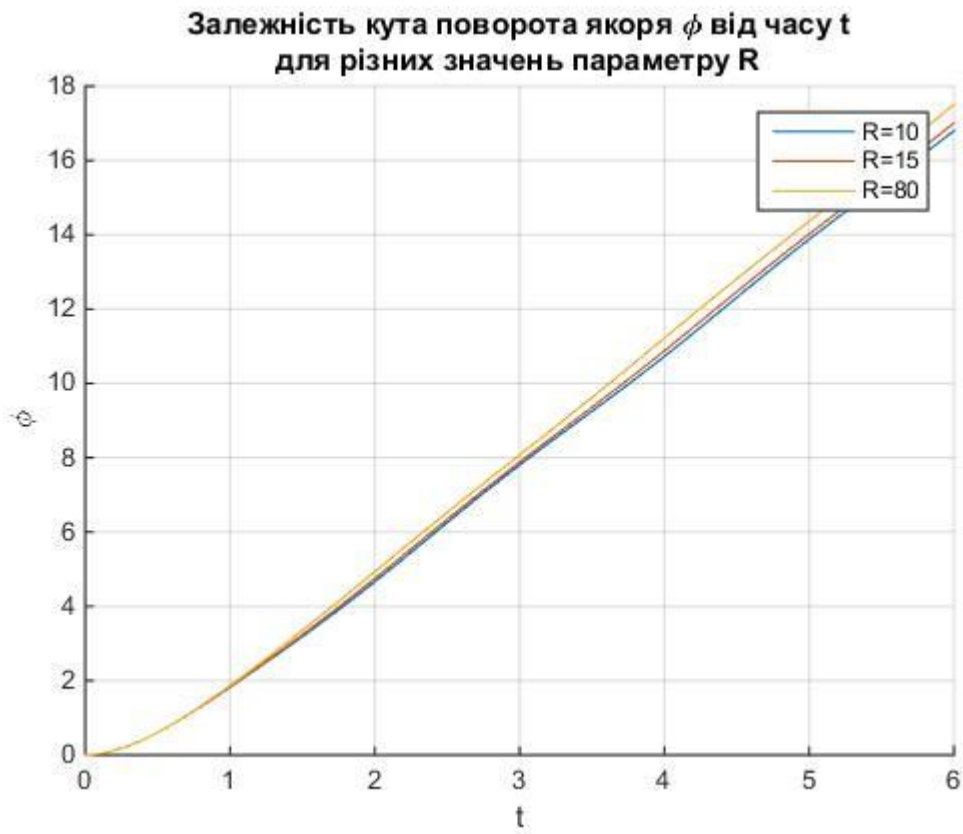


б)

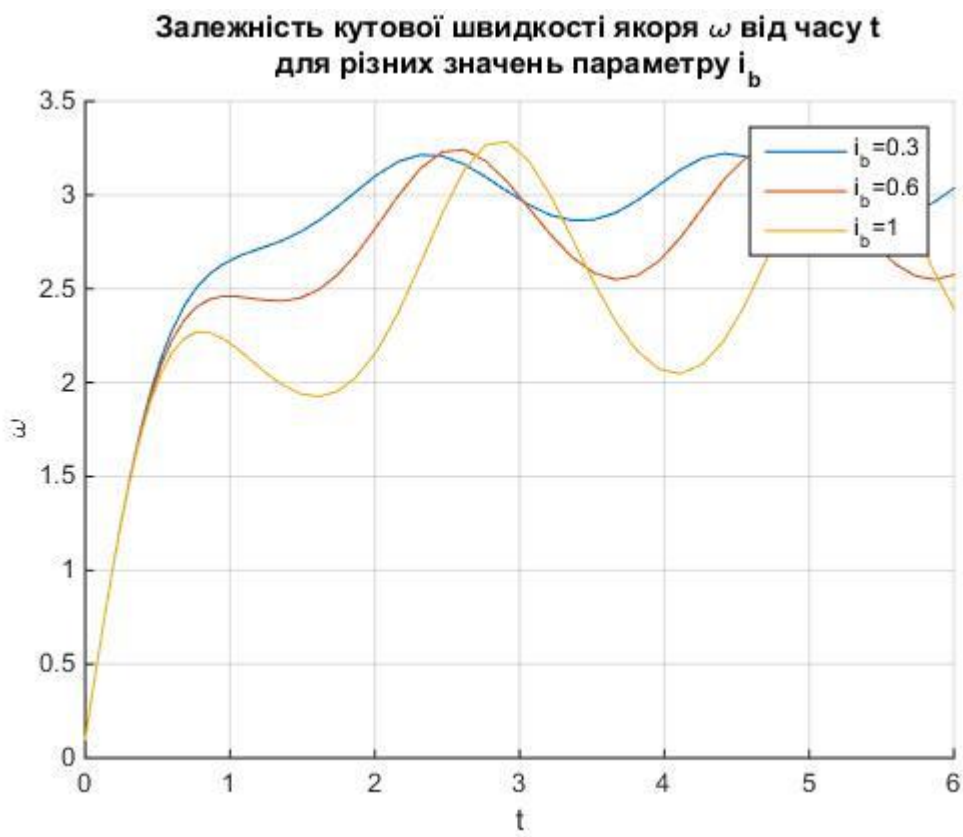




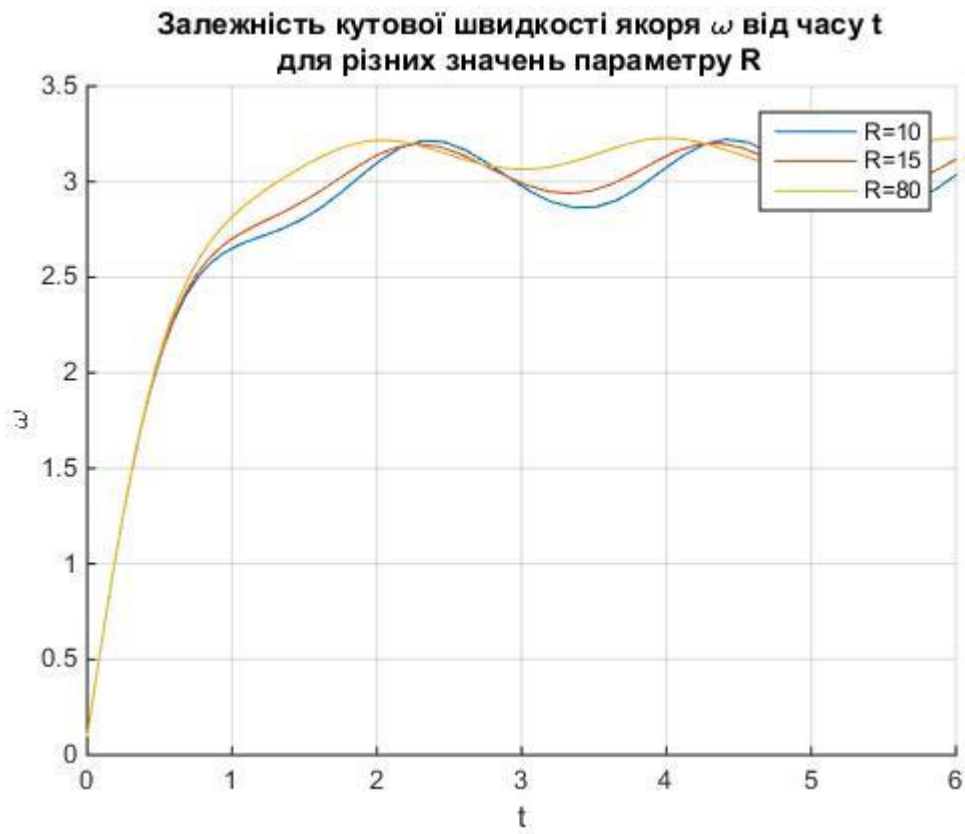
c)



d)



e)



f)

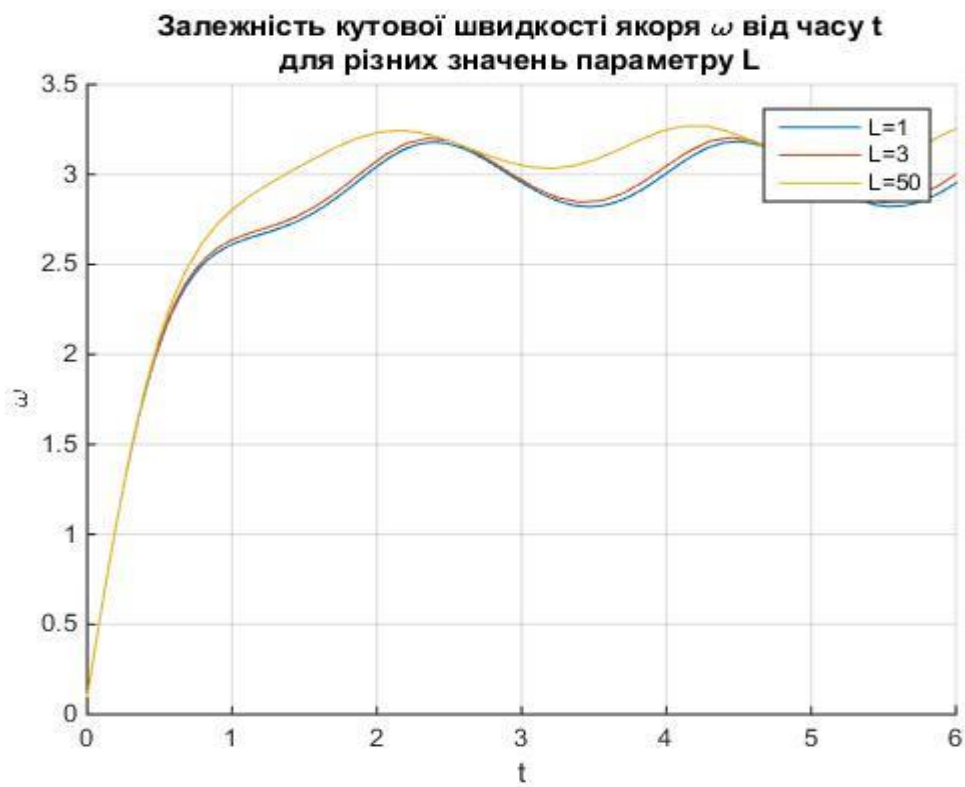


Рисунок 5.2 – Залежність кута повороту якоря  $\varphi$  і кутової швидкості  $\omega$  від часу  $t$

З рис. 5.2 d), e), f) видно, що після завершення перехідного процесу кутова швидкість осцилює навколо сталої величини. Наявність осциляцій пов'язана з існуючою залежністю моменту інерції  $J_{II}$  від кута повороту якоря  $\varphi$ . Амплітуда і період осциляцій залежать від опору  $R$ , індуктивності  $L_{Я}$  обмотки якоря та струму  $i_B$  в обмотці збудження, причому  $i_B$  впливає на ці характеристики сильніше ніж  $R$  та  $L_{Я}$ . Кут повороту якоря  $\varphi$  зі зростанням  $t$  зростає, що видно з рис. 5.2 a), b), c). Зростання  $\varphi$  свідчить про те, що обертання йде в одному напрямі. Нелінійність залежності  $\varphi(t)$  свідчить про наявність осциляцій кутової швидкості.

## 5.2 Аналіз динамічних властивостей уніполярного генератора

Відомі різні схеми і конструкції уніполярних генераторів. До них відносяться: диск Фарадея, уніполярний генератор Тесла, моделі Дас Гупта, Форбса, Тетері, Леру, уніполярні генератори з Т-образними і колоколообразними роторами, N-машина Брюса де Палма, уніполярні машини Неггерата, Пуарсона, Сомеда, Угримова, Пулена, Ліфшиця, Менде і ін. Для деяких типів генераторів розроблені досить докладні методики розрахунку. Однак, розгляд, як правило обмежується описом тільки електромагнітної складової без дослідження впливу динамічних параметрів механічної частини системи.

Розглянемо модель уніполярного генератора з циліндричним ротором [5] (рис. 5.3).

Можливі варіанти, коли магнітне поле обертається навколо циліндра або циліндр обертається в магнітному полі. З бічної поверхні циліндра і валу напруга знімається за допомогою двох щіток.

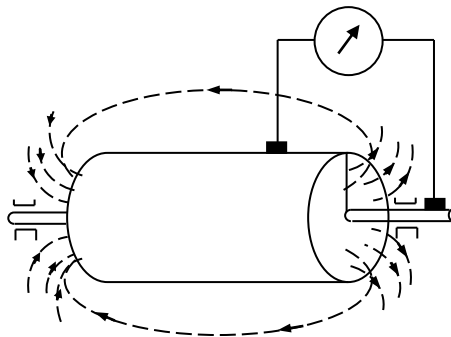


Рисунок 5.3 - Схема циліндричної моделі уніполярної машини

Принципова схема такого генератора показана на рис. 5.4 [5].

Задамося даними для розрахунку: кутова швидкість обертання ротора  $\omega$ , електрорушійна сила (ЕРС) ротора  $E$ , робочий струм  $i$ , омичний

опір генератора  $R$ , індуктивність  $L$  генератора, діаметр ротора  $D$ , довжина бочки ротора  $l$ , щільність матеріалу ротора  $\gamma$ .

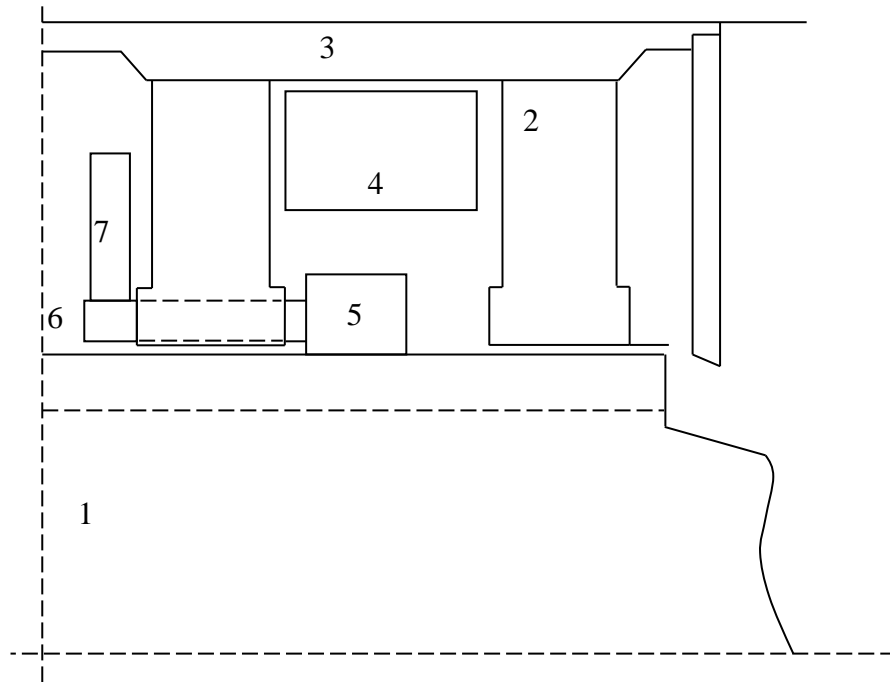


Рисунок 5.4 – Конструктивна схема уніполярної машини з циліндричним ротором: 1 - ротор; 2 - кільцевої полюс; 3 - корпус статора; 4 - обмотка збудження; 5 - струмознімання; 6 - компенсаційні стрижні; 7 - шинопровід

ЕРС можна прийняти пропорційною току  $i$  і кутової швидкості  $\omega$ :

$$E = \alpha i \omega.$$

Об'єм ротора  $V = l \pi D^2 / 4$ . Маса ротора  $m = \gamma V$ . Момент інерції ротора

$$J = \frac{m D^2}{2} \frac{D^2}{4} = \frac{\pi}{32} \gamma D^4.$$

В основу моделі покладена електродинамічна аналогія: сила-напруга. В якості узагальнених координат прийняті кут повороту вала  $\varphi$  і заряд  $q$ . Тоді, рівняння Лагранжа-Максвелла для системи запишуться у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

(5.2)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q,$$

де  $T$  – кінетична енергія системи,  $Q_\varphi$  і  $Q_q$  – узагальнені сили, віднесені до відповідних узагальнених координат.

Приведений механічний момент  $M_n$  на роторі визначимо виходячи з балансу механічної та електричної потужностей:  $M_n \cdot \omega = E \cdot i$ . Або  $M_n = \alpha \cdot i^2$ .

Для визначення узагальненої сили  $Q_\varphi$  дамо системі можливе переміщення по куту повороту  $\delta\varphi \neq 0$  і будемо вважати  $\delta q = 0$ . Узагальнена сила визначається за формулою:

$$Q_\varphi = \frac{(\sum \delta A_k)}{\delta\varphi},$$

де сума робіт сил на можливому переміщенні системи  $(\sum \delta A_k)_\varphi = M_n \cdot \delta\varphi$ .  
Тоді

$$Q_\varphi = \alpha \cdot i^2. \quad (5.3)$$

Тепер приймаємо  $\delta\varphi = 0$  і  $\delta q \neq 0$ . Узагальнена сила

$$Q_q = \frac{(\sum \delta A_k)_q}{\delta q} = \frac{(E - iR)\delta q}{\delta q} = E - iR. \quad (5.4)$$

Кінетичну енергію  $T$  знайдемо як суму механічної енергії  $T_1$  і електрокінетичної енергії  $T_2$ :

$$T \quad T_1 = \frac{1}{2} J \omega^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} L i^2;$$

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} L i^2.$$

Знайдемо похідні від кінетичної енергії, які входять в рівняння (5.2), враховуючи, що  $\dot{\varphi} = \omega$  і  $\dot{q} = i$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J \omega; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J \frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L i; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = L \frac{di}{dt}; \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0. \quad (5.6)$$

Підставивши (5.3) ... (5.6) в (5.2), отримаємо

$$\begin{cases} J \frac{d\omega}{dt} = \alpha \cdot i^2, \\ L \frac{di}{dt} + i \cdot R = \alpha \cdot i \cdot \omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

В (5.7) з другого рівняння виразимо  $\omega$  і підставимо в перше, отримаємо

$$i'' - \frac{(i')^2}{i} = Bi^3, \quad (5.8)$$

де  $B = \frac{\alpha^2}{JL}$ .

Для вирішення рівняння (5.8) використовуємо підстановку

$$i' = V(i).$$

Тоді  $i'' = V \frac{dV}{di}$  і рівняння (5.8) переписеться у вигляді

$$V \frac{dV}{di} - \frac{V^2}{i} = Bi^3 \quad \text{або} \quad \frac{dV}{di} - \frac{V}{i} = \frac{Bi^3}{V}. \quad (5.9)$$

Рівняння (5.9) – це рівняння Бернуллі. Для його вирішення використовуємо підстановку

$$V = u \cdot z. \quad (5.10)$$

$$\frac{dV}{di} = u \frac{dz}{di} + z \frac{du}{di};$$

і

$$\frac{dz}{di} + z \left( \frac{du}{di} - \frac{u}{i} \right) = \frac{Bi^3}{u \cdot z},$$

$$\begin{cases} \frac{du}{di} - \frac{u}{i} = 0, \\ \frac{dz}{di} = \frac{Bi^3}{u^2 \cdot z}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Вирішуємо перше рівняння системи (5.11):

$$\frac{du}{u} = \frac{di}{i} \Rightarrow \ln u = \ln i \Rightarrow u = i. \quad (5.12)$$

Друге рівняння системи (5.11) з урахуванням (5.12):

$$z \frac{dz}{di} = \frac{Bi^3}{i^2} \Rightarrow z dz = Bi di \Rightarrow \frac{z^2}{2} = B \frac{i^2}{2} + C^* .$$

$$z = \pm \sqrt{Bi^2 + C} , \quad (5.13)$$

де  $C$  – постійна інтегрування.

Підставимо (5.12) і (5.13) в (5.10):

$$V = \pm i \sqrt{Bi^2 + C}$$

або

$$\frac{di}{dt} = i \sqrt{Bi^2 + C} , \quad (5.14)$$

і

$$\frac{di}{dt} = -i \sqrt{Bi^2 + C} . \quad (5.15)$$

Рішення рівнянь (5.14) і (5.15) мають вигляд

$$i = - \frac{2C \cdot e^{C_1 \sqrt{C} + \sqrt{C}t}}{BC \cdot e^{2C_1 \sqrt{C} + 2\sqrt{C}t} - 1} , \quad (5.16)$$

і

$$i = - \frac{2C \cdot e^{C_1 \sqrt{C} + \sqrt{C}t}}{BC \cdot e^{2C_1 \sqrt{C}} - e^{2\sqrt{C}t}} , \quad (5.17)$$

де  $C_1$  – постійна інтегрування.

З (5.7), з урахуванням (5.14) ... (5.17) знайдемо кутову швидкість:

$$\omega = \frac{L i'}{\alpha i} + \frac{R}{\alpha} . \quad (5.18)$$

Постійні інтегрування  $C$  і  $C_1$  визначаються з початкових умов.

Розв'яжемо систему (5.7) у програмі Matlab. У програмі позначимо

$$y_1 = \omega, y_2 = i$$

У якості початкових умов візьмемо  $\omega(0)=0, i(0)=0.1$ .

Наведемо текст програми розв'язку системи в програмі Matlab.

Файл solve2\_7.m

```
function sol2_7
hold on;
Y0=[0;0.3];
```

```

alpha=[3 4 20 21];
param=[6 4 1 2];
J=[4 30 80 900];
R=[1 2 3 4];
L=[2 3 4 5];

fgraph(alpha,param,Y0,[0 0.7],1,4,1,'alpha','Залежність кутової швидкості
обертання ротору  $\omega$  від часу t','\omega',0);
fgraph(J,param,Y0,[0 5],1,4,2,'J','Залежність кутової швидкості обертання
ротору  $\omega$  від часу t','\omega',0);
fgraph(R,param,Y0,[0 5],1,4,3,'R','Залежність кутової швидкості обертання
ротору  $\omega$  від часу t','\omega',0);
fgraph(L,param,Y0,[0 5],1,4,4,'L','Залежність кутової швидкості обертання
ротору  $\omega$  від часу t','\omega',0);

fgraph(alpha,param,Y0,[0 0.7],2,4,1,'alpha','Залежність робочого струму I
від часу t','I',0);
fgraph(J,param,Y0,[0 5],2,4,2,'J','Залежність робочого струму I від часу
t','I',0);
fgraph(R,param,Y0,[0 5],2,4,3,'R','Залежність робочого струму I від часу
t','I',0);
fgraph(L,param,Y0,[0 5],2,4,4,'L','Залежність робочого струму I від часу
t','I',0);

function fgraph(pvar,pconst,Y0,tint,nf,n,nvar,sleg,nazv,ordinata,phase)
figure;
hold on;
for i=1:n
    switch nvar
        case 1
            [T,Y]=ode45(@ (t,y)
fun1(t,y,pvar(i),pconst(2),pconst(3),pconst(4)),tint,Y0);
            n1='для різних значень параметру  $\alpha$ ';
        case 2
            [T,Y]=ode45(@ (t,y)
fun1(t,y,pconst(1),pvar(i),pconst(3),pconst(4)),tint,Y0);
            n1='для різних значень параметру J';
        case 3
            [T,Y]=ode45(@ (t,y) fun1(t,y,pconst(1),
pconst(2),pvar(i),pconst(4)),tint,Y0);
            n1='для різних значень параметру R';
        case 4
            [T,Y]=ode45(@ (t,y)
fun1(t,y,pconst(1),pconst(2),pconst(3),pvar(i)),tint,Y0);
            n1='для різних значень параметру L';
        otherwise
            warning('error');
    end
    if phase==0
        plot(T,Y(:,nf));
    else
        plot(Y(:,1),Y(:,2));
    end
end
grid on;hold off;
title({nazv;n1})
xlabel('t')
ylabel(ordinata);
legend(strcat(sleg,'=',num2str(pvar(1))),strcat(sleg,'=',num2str(pvar(2))),
strcat(sleg,'=',num2str(pvar(3))),strcat(sleg,'=',num2str(pvar(4))));

```

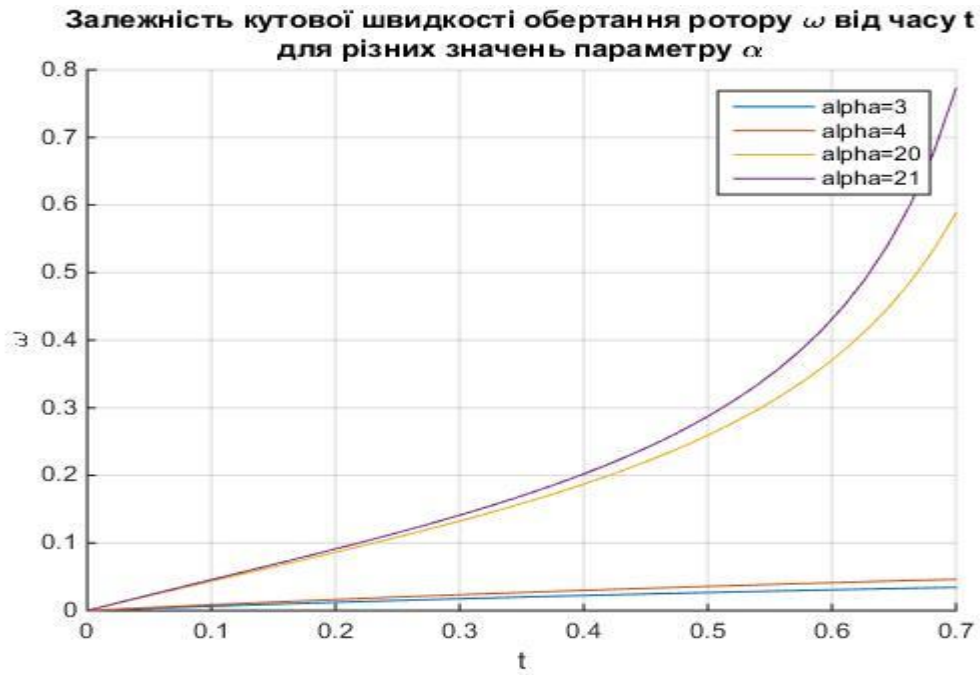


### Файл fun1.m

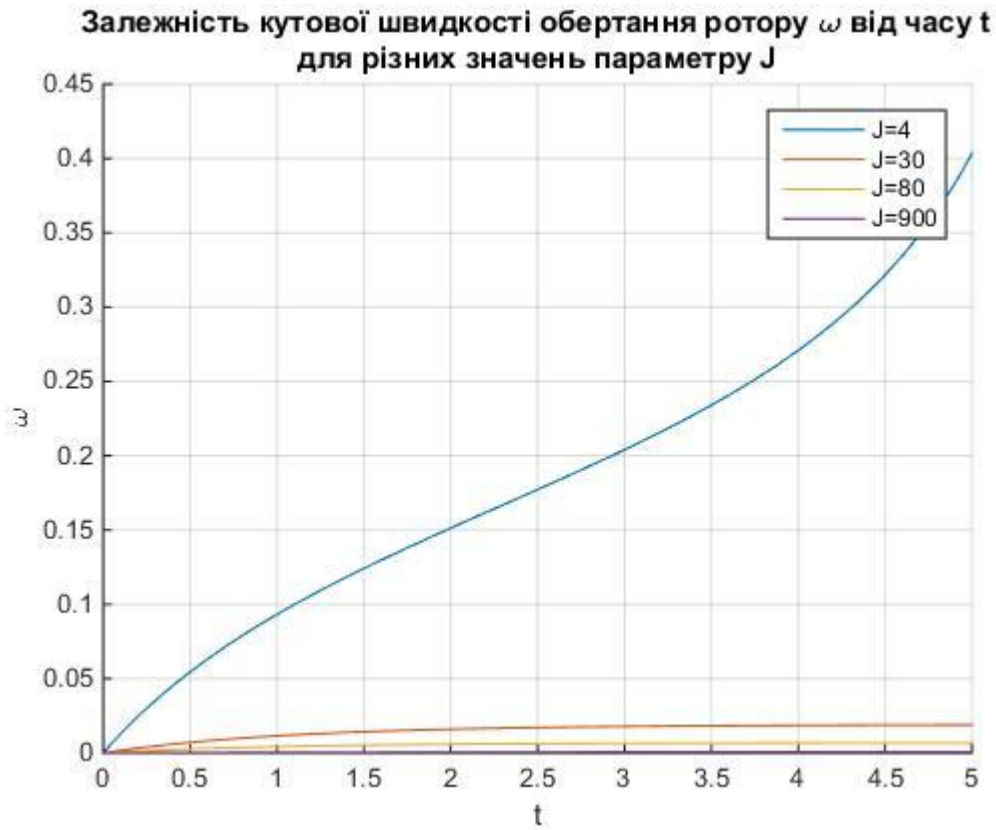
```
function F=fun1(x,y,alpha,J,R,L)  
F=[alpha/J*y(2).^2;-R/L*y(2)+alpha/L*y(2).*y(1)];
```

Графіки рішень цієї системи показані на рис.5.5...5.7.

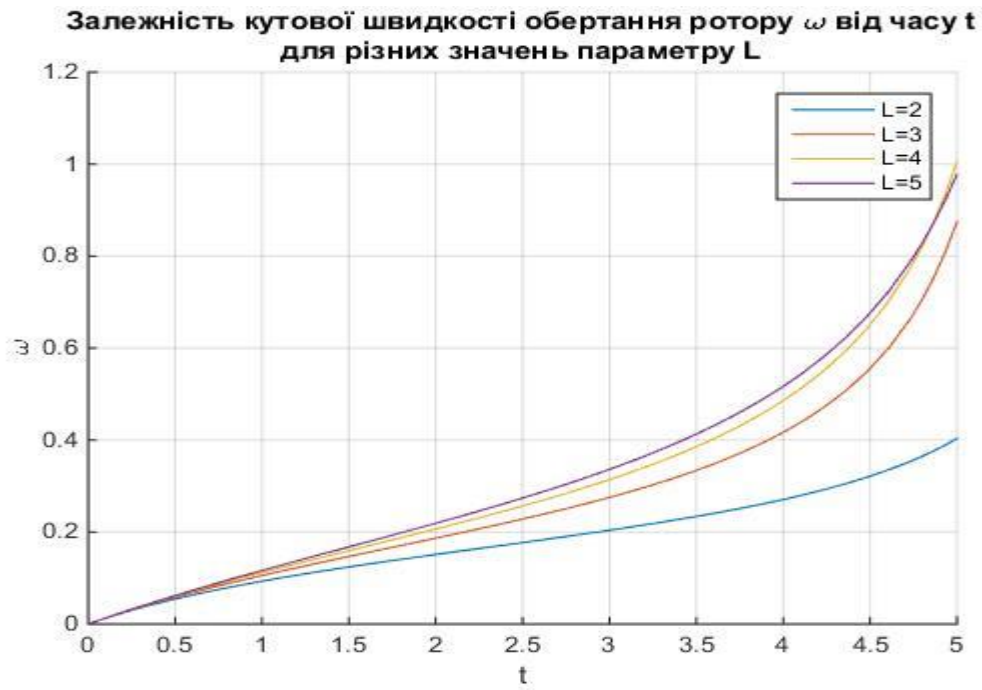
a)



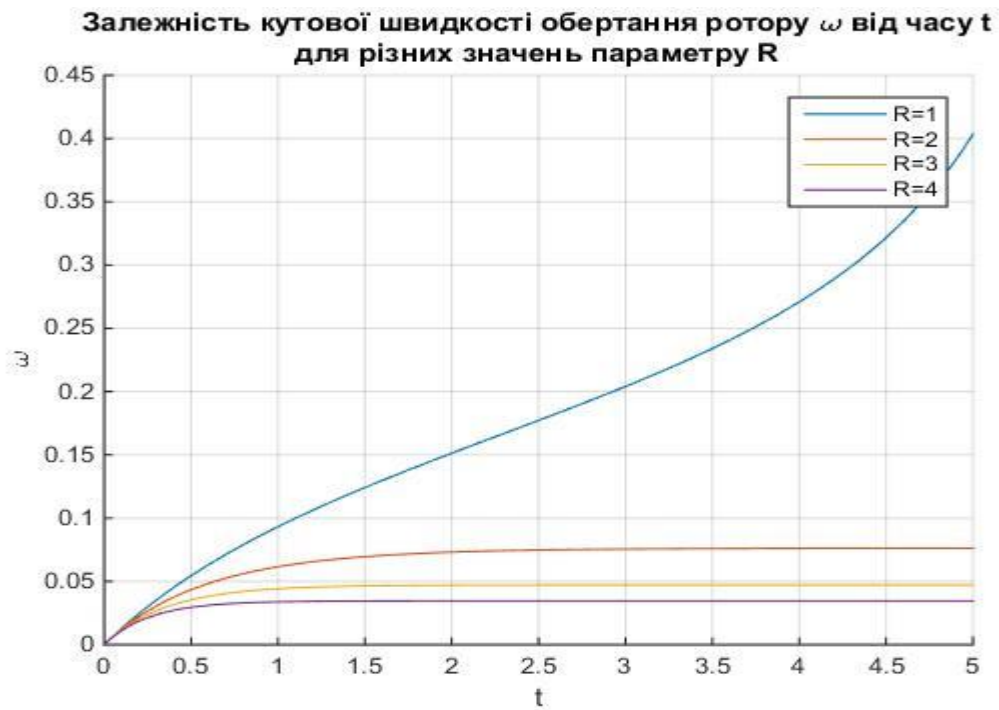
b)



c)



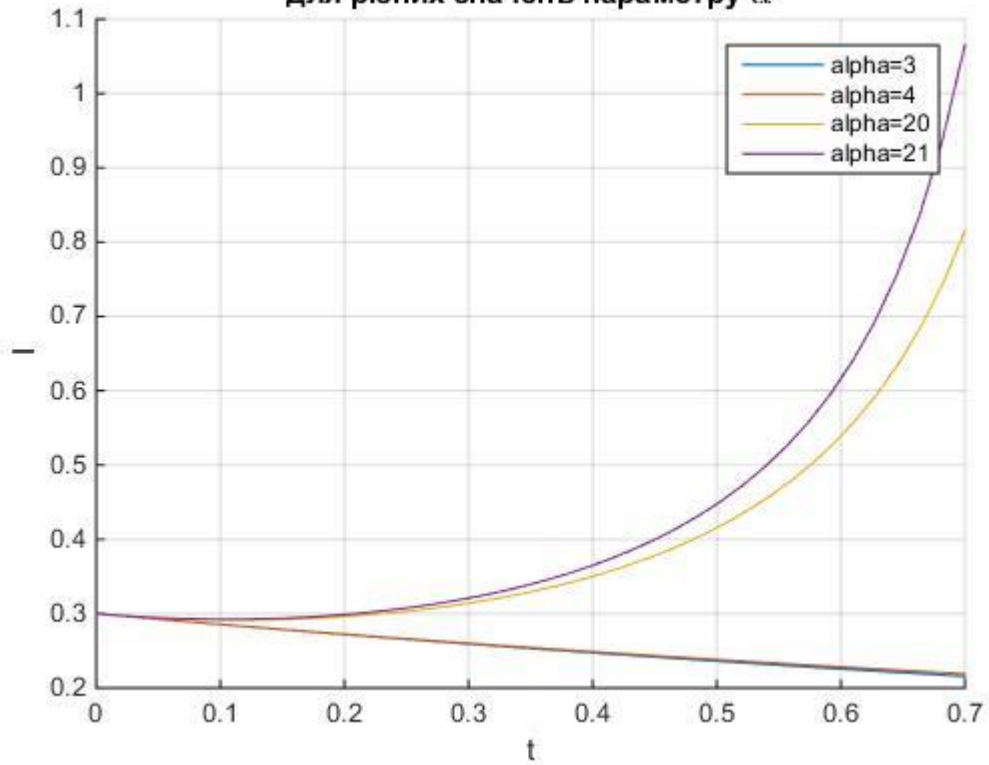
d)



*Рисунок 5.5 – Залежність кутової швидкості обертання ротору  $\omega$  від часу  $t$*

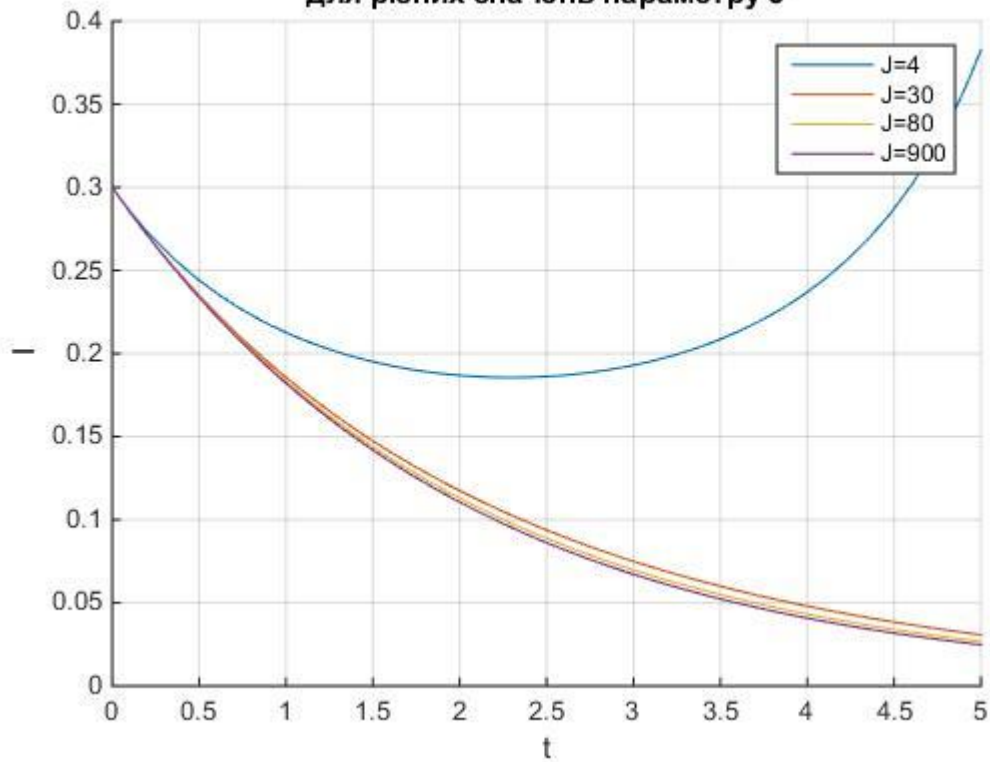
a)

Залежність робочого струму  $I$  від часу  $t$   
для різних значень параметру  $\alpha$

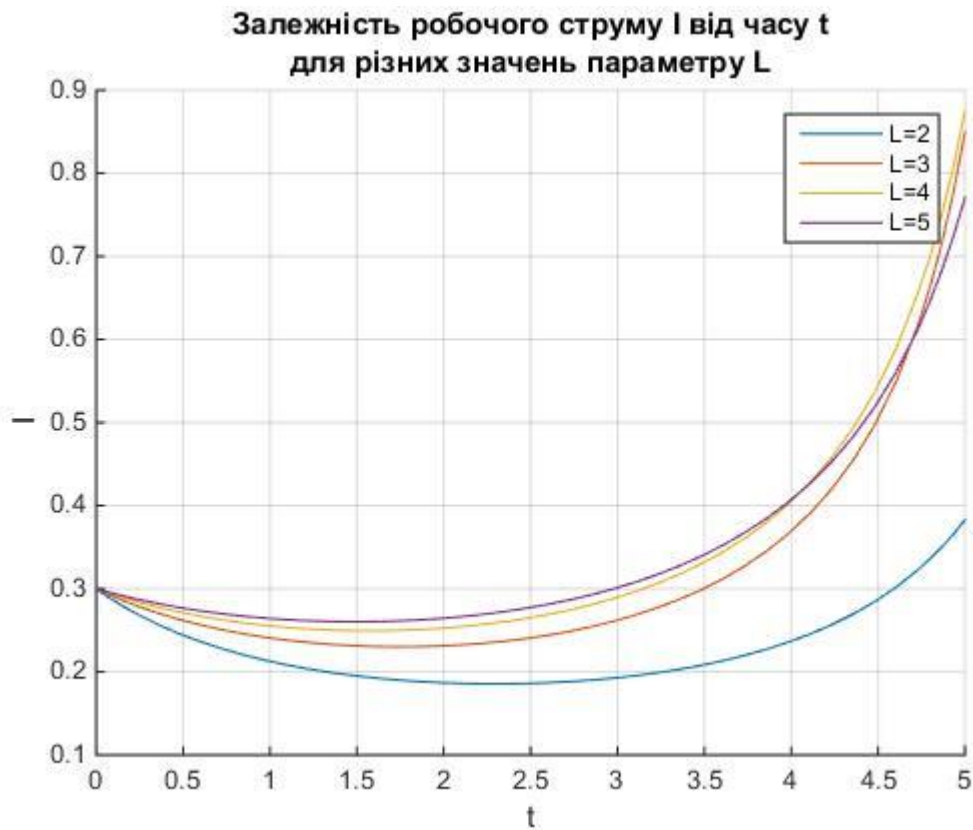


b)

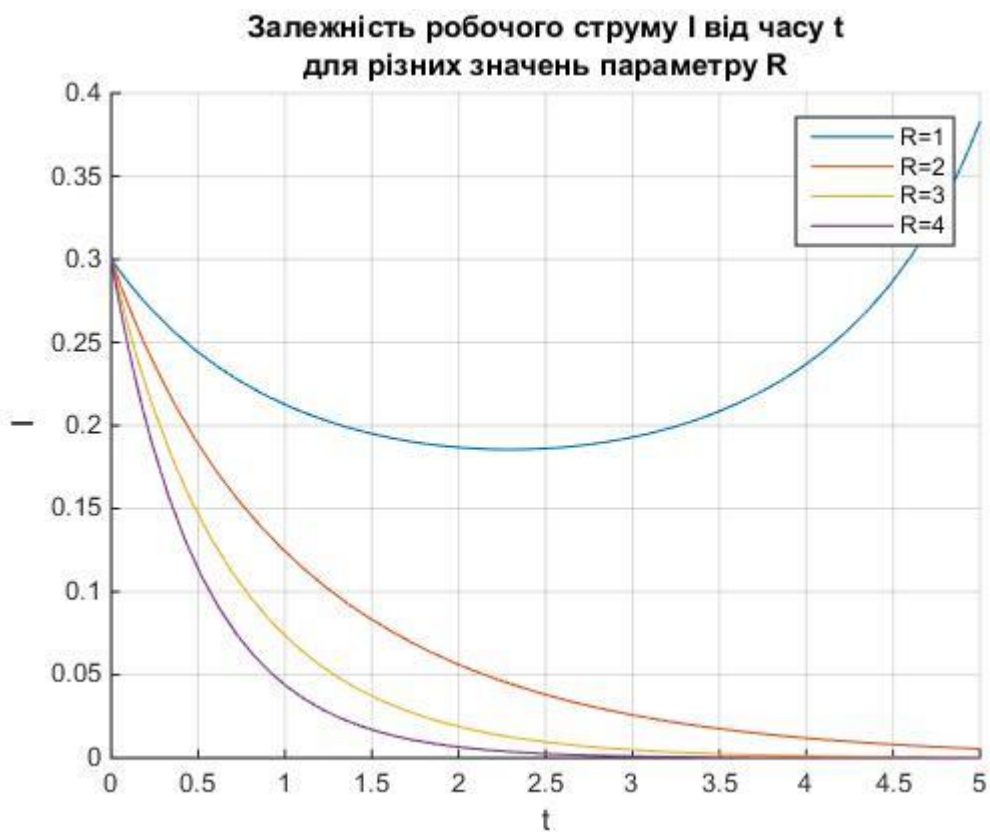
Залежність робочого струму  $I$  від часу  $t$   
для різних значень параметру  $J$



c)



d)



*Рисунок 5.6 – Залежність робочого струму  $i$  від часу  $t$*

На рис. 5.5 та 5.6 показані графіки залежності кутової швидкості обертання ротору  $\omega$  та робочого струму  $I$  уніполярного генератора від часу  $t$ . З графіків видно, що в залежності від значень параметрів  $\alpha$ ,  $J$ ,  $L$ ,  $R$  існує

два режими роботи генератора. Перший режим відповідає рішенню (5.14), другий – (5.15).

Перший режим характеризується тим, що за кінцевий проміжок часу  $t^*$  значення швидкості обертання ротору  $\omega(t)$  та робочого струму  $I(t)$  нескінченно зростає. Це означає, що існує вертикальна асимптота  $t=t^*$ , при наближенні до якої значення  $\omega(t)$  та  $I(t)$  набувають як завгодно великих значень. Значення  $t^*$  залежить від початкових даних та значень параметрів  $\alpha, J, L, R$  (див. рис. 5.5 та 5.6, а), б)).

Другий режим роботи уніполярного генератора характеризується тим, що кутова швидкість обертання ротору  $\omega(t)$  зі зростанням часу  $t$  прямує до сталої величини, а робочий струм  $I(t)$  прямує до нуля (див. рис. 5.5, 5.6, д). Як видно із рис. 5.5, д), величина сталої та тривалість перехідного процесу залежать від параметрів  $\alpha, J, L, R$ .

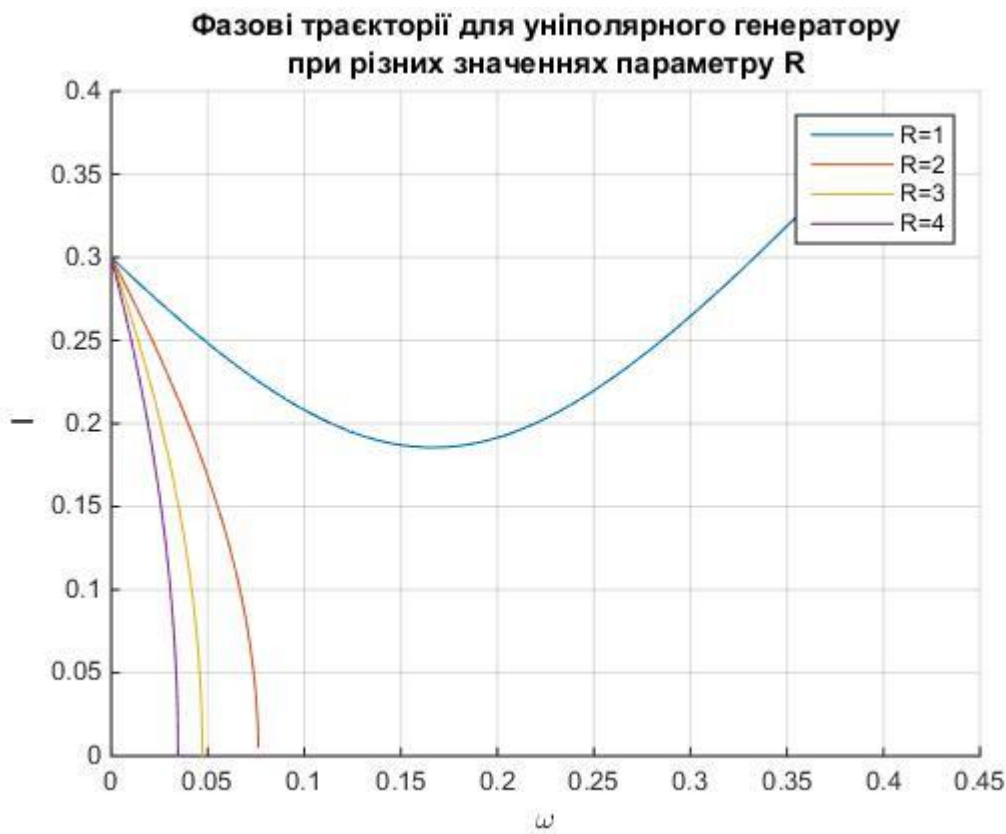


Рисунок 5.7 – Фазові траєкторії для уніполярного генератора при різних значеннях параметру  $R$

На рис. 5.7 показано фазовий портрет динамічної системи, що описується рівняннями (5.7). З цього рисунку видно, що фазові траєкторії, які відповідають значенням  $R=2, 3, 4$  мають точки покою  $(\omega_0, 0)$ ,  $\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t)$ , а фазова траєкторія з  $R=4$  прямує до нескінченності. Ці траєкторії відповідають двом різним режимам роботи уніполярного генератора.

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в програмі Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей

кутової швидкості ротора уніполярного генератора і сили струму від часу, а також фазовий портрет представлені на рис. 5.8...5.10.

```

> restart,
> with(plots) :
> J := 4 : R := 1 : L := 2 : alpha := 3 :
>
> #Чисельне рішення дифференційного рівняння
ружу системи
> sys := diff(omega(t), t) =  $\frac{\alpha}{J} \cdot i^2(t)$ , L·diff(i(t), t) + R·i(t) = alpha·i(t)·omega(t) :
> fcns := [omega(t), i(t)] :
> dsol := dsolve({sys, omega(0) = 0, i(0) = 0.1}, fcns, numeric,
output = listprocedure) :
> #Побудова графіка зміни кутової швидкості ротора
>
> odeplot(dsol, [t, omega(t)], 0..3, numpoints = 500, title = 'Залежність
кутової швидкості ротора від часу', gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

**Залежність кутової швидкості ротора від часу**

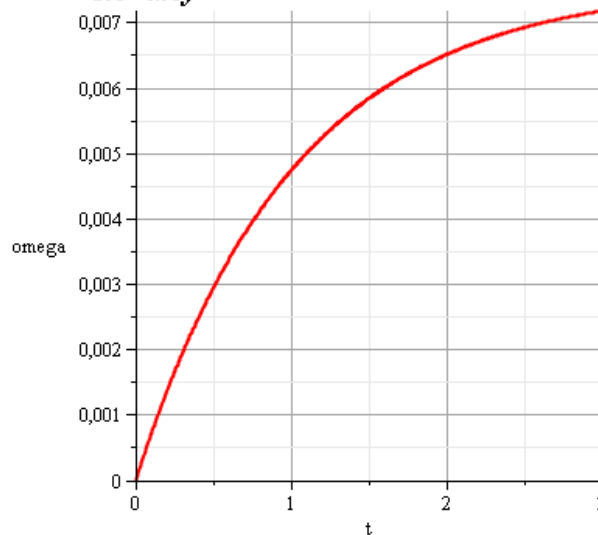


Рисунок 5.8 – Залежність кутової швидкості ротора генератора ( $\omega$ ) від часу  $t$ .

```

> #Побудова графіка зміни сили струму від часу
>
> odeplot(dsol, [t, i(t)], 0..3, numpoints = 500, title = 'Залежність сили струму від
часу', color = blue, gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

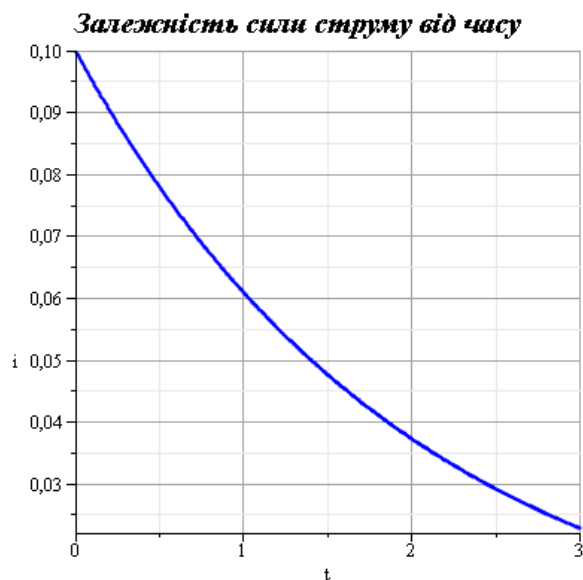


Рисунок 5.9 – Залежність сили струму в обмотці генератора ( $i$ ) від часу  $t$ .

```

> #Побудова фазового портрета
>
> odeplot(dsol, [ω(t), i(t)], 0..3, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет кутова
швидкість ротора - сила струму', gridlines = true, thickness = 2,
titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

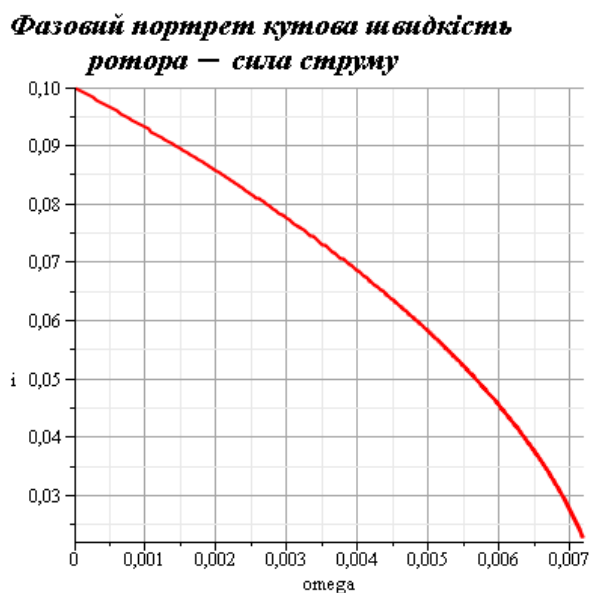


Рисунок 5.10 – Фазовий портрет «кутова швидкість ротора ( $\omega$ ) – сила електричного струму ( $i$ )»

### 5.3 Електромеханічна система автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму

Система автоматичного регулювання складається з регульованого об'єкта та елементів управління, які впливають на об'єкт при зміні однієї

або декількох регульованих змінних. Під впливом вхідних сигналів (управління або обурення), змінюються регульовані змінні. Мета ж регулювання полягає у формуванні таких законів, при яких вихідні регульовані змінні мало відрізнялися б від необхідних значень.

Проектування систем автоматичного регулювання можна вести двома шляхами:

- 1) методом аналізу, коли при заздалегідь обраній структурі системи (розрахунковим шляхом або моделюванням) визначають її параметри;
- 2) методом синтезу, коли за вимогами, до системи одразу ж вибирають найкращу її структуру і параметри.

Обидва ці способи отримали широке практичне застосування. Але основою обох способів є створення адекватної математичної моделі об'єкта, на якій базується подальше використання принципів оптимізації системи управління [11].

Головна увага звертається на етап складання замкнутої системи диференціальних рівнянь руху ЕМС автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму з паралельним збудженням.

У генераторі з паралельним збудженням обмотка збудження приєднана через регульовальний реостат паралельно обмотці якоря. Для нормальної роботи споживачів електроенергії необхідно підтримувати сталість напруги на затискачах генератора, незважаючи на зміну загального навантаження. Це здійснюється за допомогою регулювання струму збудження. Генератори постійного струму з паралельним збудженням застосовуються в техніці зв'язку для живлення радіоустановок, для живлення зарядних агрегатів, в пересувних зварювальних апаратах і ін. [11].

На рис. 5.11 зображена система автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму з паралельним збудженням. Напруга  $U$  регулюється шляхом зміни величини опору  $r$  в ланцюзі збудження.

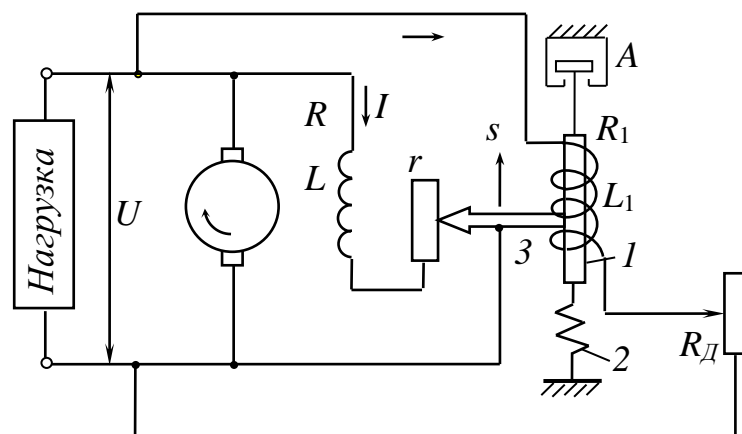


Рисунок 5.11 - Система автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму з паралельним збудженням

Якщо, наприклад, напруга  $U$  з якоїсь причини почала падати, зменшиться струм  $I_1$ , а значить, і тягова сила електромагніту  $I$ . Сердечник



електромагніту і пов'язаний з ним движок 3 реостата відтягнуться пружиною 2 вниз, зменшиться опір  $r$ , збільшиться струм збудження  $I$  і в результаті ліквідується падіння напруги  $U$ . Підлягає регулювання напруга  $U$ , що задається реостатом з опором  $R_d$ .

Отримаємо лінеаризоване рівняння динаміки регулятора, що виражає залежність відхилення  $\Delta r$  від відхилення  $\Delta U$ ; відхилення  $\Delta r$  приймаємо пропорційним відхиленню  $\Delta s$ , т. е.  $\Delta r = h_3 \Delta s$ . Тягову силу електромагніту приймаємо пропорційною квадрату сили струму  $F_{\text{эм}} = c_1 I_1^2$ , жорсткість пружини дорівнює  $c_2$ , сила тертя, пропорційна швидкості сердечника електромагніту  $F_{\text{тр}} = h \dot{s}$ . Маса рухомої частини, опір і індуктивність обмотки електромагніту відповідно рівні  $m$ ,  $R_1$ ,  $L_1$ .

Розіб'ємо систему регулювання напруги генератора на елементи (перший елемент – котушка електромагніту; другий елемент – рухома частина електромагніту) і складемо рівняння.

Розглянемо перший елемент. Вхідна величина напруга генератора  $U$ , вихідна величина струм котушки електромагніту  $i_1$ .

Складемо рівняння за законом Кірхгофа для котушки електромагніту:

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot (R_1 + R_d) = U. \quad (5.19)$$

Рівняння статичного режиму електромагніту:

$$I_{10} \cdot (R_1 + R_d) = U_0. \quad (5.20)$$

Запишемо рівняння (5.19) в малих збільшеннях:

$$L_1 \cdot \frac{d(I_{10} + \Delta i_1)}{dt} + (I_{10} + \Delta i_1) \cdot (R_1 + R_d) = L_1 \cdot \frac{d(\Delta i_1)}{dt} + I_{10} (R_1 + R_d) + \Delta i_1 (R_1 + R_d) = U_0 + \Delta U \quad (5.21)$$

віднімемо з (5.21) рівняння (5.20)

$$L_1 \cdot \frac{d(\Delta i_1)}{dt} + \Delta i_1 \cdot (R_1 + R_d) = \Delta U \quad (5.22)$$

перепишемо (5.22) в наступному вигляді:

$$\frac{L_1}{(R_1 + R_d)} \cdot \frac{d(\Delta i_1)}{dt} + \Delta i_1 = \frac{\Delta U}{(R_1 + R_d)}.$$

Введемо позначення:

$$\frac{U}{(R_1 + R_d)} = I_{10}; \quad \frac{L_1}{(R_1 + R_d)} = T_1; \quad \frac{1}{(R_1 + R_d)} = k_1;$$

Отримаємо

$$T_1 \cdot \frac{d(\Delta i_1)}{dt} + \Delta i_1 = k_1 \cdot \Delta U. \quad (5.23)$$

Другий елемент. Вхідна величина напруги генератора  $U$ , вихідна величина переміщення сердечника електромагніту  $\Delta s$ . З теореми про рух центру мас системи слід:

$$m \cdot a_{cy} = \sum F_y, \quad (5.24)$$

де  $a_{cy} = \ddot{s}$  – прискорення центру мас рухомої частини по осі  $y$ ;

$m$  — маса рухомої частини;

$\sum F_y$  – сума сил, що діють на рухому систему.

Для визначення сил діючих на рухому систему, складемо схему (рис. 5.12).

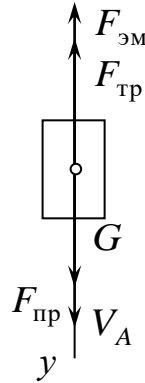


Рисунок 5.12 – Розрахункова схема

Рівняння рівноваги сил при статичному (нерухомому) стані сердечника:

$$F_{пр0} - F_{эм0} - F_{тр0} + G = c_2 \cdot s_0 + m \cdot g - c_1 \cdot (I_{10})^2 = 0, \quad (5.25)$$

$$\text{де } G = m \cdot g \text{ – сила тяжіння;} \quad (5.26)$$

$$F_{пр0} = c_2 \cdot s_0 \text{ – сила пружності пружини;} \quad (5.27)$$

$s_0$  – початкове розтягнення пружини;

$$F_{тр} = h \cdot \dot{s} \text{ – сила тертя;} \quad (5.28)$$

при статичному стані  $F_{тр0} = 0$ ;

$$F_{эм0} = c_1 \cdot I_{10}^2 \text{ – сила електромагніту;} \quad (5.29)$$

$$\text{Сила електромагніту} \quad F_{эм} = c_1 \cdot (I_1)^2.$$

Рівняння (5.23) нелінійно, його необхідно лінеаризувати. Розкладемо (5.29) в ряд Тейлора і отримаємо рівняння динаміки в малих відхиленнях:

$$F_{эм} = c_1 \cdot \left( F_{эм0} + \left. \frac{\partial F_{эм}}{\partial I_1} \right|_{I_{10}} \cdot \Delta i \right) + \Delta = c_1 \cdot (I_{10})^2 + 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i,$$

де  $\Delta$  – складові вищого порядку, відповідно до методу лінеаризації їх відкидають.

Відхилення електромагнітної сили:

$$\Delta f_{\text{эм}} = F_{\text{эм}} - F_{\text{эм}0} = c_1 \cdot (I_{10})^2 + 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i - c_1 \cdot (I_{10})^2 = 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i .$$

При русі сердечника електромагніту з'являється сила тертя пропорційна швидкості:

$$\frac{dv}{dt} = \dot{s} .$$

Підставимо рівняння (5.25)-(5.29) в (5.24):

$$m \cdot \ddot{s} = c_2 \cdot s - c_1 \cdot (I_1)^2 - h \cdot \dot{s} .$$

Введемо малі відхилення змінних величин:

$$U_{\text{ВХ}} = U_0 + \Delta U ; I_1 = I_{10} + \Delta i_1 ; s = s_0 + \Delta s ; r = r_0 + \Delta r ; F = F_0 + \Delta f ;$$

$$m \cdot (s_0 + \Delta s)'' = c_2 \cdot (s_0 + \Delta s) - (c_1 \cdot (I_{10})^2 + 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i) - h \cdot (s_0 + \Delta s)' + m \cdot g . \quad (5.30)$$

Віднімемо з (5.30) рівняння (5.25). У лівій частині рівняння запишемо вихідну величину і всі її похідні, в правій частині вхідну величину і її похідні.

$$m \cdot \Delta \ddot{s} + h \cdot \Delta \dot{s} + c_2 \cdot \Delta s + \Delta s = 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i . \quad (5.31)$$

За умовою відхилення

$$\Delta r = k_3 \cdot \Delta s \quad (5.32)$$

Проведемо заміну змінної. Підставимо в (5.31) значення (5.32):

$$m \cdot \frac{\Delta \ddot{r}}{k_3} + h \cdot \frac{\Delta \dot{r}}{k_3} + c_2 \cdot \frac{\Delta r}{k_3} = 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta i ,$$

звідки:

$$\Delta i = \frac{m \cdot \Delta \ddot{r} + h \cdot \Delta \dot{r} + c_2 \cdot \Delta r}{k_3 \cdot 2 \cdot c_1 \cdot I_{10}} . \quad (5.33)$$

Підставимо (5.33) в (5.23):

$$T_1 \cdot (m \cdot \Delta \ddot{r} + h \cdot \Delta \dot{r} + c_2 \cdot \Delta r) + (m \cdot \Delta \ddot{r} + h \cdot \Delta \dot{r} + c_2 \cdot \Delta r) = k_1 \cdot \Delta U \cdot k_3 \cdot 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} .$$

Приведемо коефіцієнт перед шуканою величиною до 1.

$$T_1 \cdot m \cdot \Delta \ddot{r} + \Delta \ddot{r} \cdot (T_1 \cdot h + m) + \Delta \dot{r} (T_1 \cdot c_2 + h) + c_2 \cdot \Delta r = k_1 \cdot k_3 \cdot 2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot \Delta U$$

$$T_1 \cdot \frac{m}{c_2} \cdot \Delta \ddot{r} + \Delta \ddot{r} \cdot \left( \frac{T_1 \cdot h + m}{c_2} \right) + \Delta \dot{r} \cdot \left( \frac{T_1 \cdot c_2 + h}{c_2} \right) + \Delta r = k_1 \cdot \frac{2 \cdot c_1 \cdot I_{10}}{c_2} \cdot k_3 \cdot \Delta U$$

$$T_1 \cdot T_2^2 \cdot \Delta \ddot{r} + \Delta \ddot{r} \cdot (T_1 \cdot T_3 + T_2^2) + \Delta \dot{r} \cdot (T_1 + T_3) + \Delta r = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \Delta U \quad (5.34)$$

де;  $k_2 = 2 \cdot I_{10} \cdot \frac{c_1}{c_2}$ ;  $T_2^2 = \frac{m}{c_2}$ ;  $T_3 = \frac{h}{c_2}$ .

Таким чином, отримано лінійне диференціальне рівняння 3-го порядку, що описує динаміку регулятора і виражає залежність відхилення  $\Delta r$  від відхилення  $\Delta U$ .

Вирішимо цю ж задачу іншим способом. Рух ЕМС описують рівняння (5.19) і (5.24). Для зручності подальшого вирішення перепишемо ці рівняння:

$$m \cdot \Delta \ddot{s} = m \cdot g + c_2 \cdot \Delta s - h \cdot \Delta \dot{s} - c_1 \cdot i_1^2,$$

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot (R_1 + R_d) = U + \Delta U(t). \quad (5.35)$$

Струм в котушці електромагніту змінюється за законом:

$$i_1(t) = i_{1\text{св}}(t) + i_{1\text{ввн}}(t), \quad (5.36)$$

де  $i_{1\text{св}}(t)$  – вільна складова струму, яка визначається загальним рішенням диференціального рівняння (5.35);

$i_{1\text{ввн}}(t)$  – вимушена складова струму, що є приватним рішенням диференціального рівняння.

Для рівняння (5.35) складемо характеристичне рівняння:

$$L_1 \cdot p + (R_1 + R_d) = 0. \quad (5.37)$$

Визначимо коріння характеристичного рівняння (5.37):

$$p = -\frac{(R_1 + R_d)}{L_1}.$$

Корінь характеристичного рівняння - дійсне ціле число. Рішення будемо шукати у вигляді:

$$i_{1\text{св}}(t) = A_1 \cdot e^{pt}. \quad (5.38)$$

Визначимо приватне рішення диференціального рівняння (5.35). Введемо припущення. Вважаємо, що напруга генератора змінюється за лінійним законом:

$$\Delta U(t) = k_4 \cdot \Delta U \cdot t,$$

де  $k_4$  – коефіцієнт пропорційності.

Перепишемо праву частину рівняння (5.35):

$$U + \Delta U(t) = U + k_4 \cdot \Delta U \cdot t.$$

Часне рішення будемо шукати у вигляді:

$$i_{1\text{ввн}}(t) = B_1 \cdot t + C_1. \quad (5.39)$$

Визначимо першу похідну від (5.39):

$$i'_{1\text{ввн}}(t) = B_1. \quad (5.40)$$

Підставами (5.39) і (5.40) в ліву частину (5.35) і визначимо невідомі коефіцієнти.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( B_1 + B_1 \cdot t \cdot \frac{(R_1 + R_d)}{L_1} + C_1 \cdot \frac{(R_1 + R_d)}{L_1} \right) = \frac{U}{L_1} + k_4 \cdot \frac{\Delta U}{L_1} \cdot t. \\ B_1 \cdot \frac{(R_1 + R_d)}{L_1} = k_4 \cdot \frac{\Delta U}{L_1}, \quad B_1 = \frac{k_4 \cdot \Delta U}{(R_1 + R_d)}. \\ B_1 + C_1 \cdot \frac{(R_1 + R_d)}{L_1} = \frac{U}{L_1}, \quad C_1 = \frac{U}{(R_1 + R_d)} - \frac{B_1 \cdot L_1}{(R_1 + R_d)} = \frac{U}{(R_1 + R_d)} - \frac{k_4 \cdot \Delta U \cdot L_1}{(R_1 + R_d)}. \end{array} \right.$$

Введемо позначення:

$$\frac{U}{(R_1 + R_d)} = I_{10}, \quad \frac{L_1}{(R_1 + R_d)} = T_1, \quad \frac{1}{(R_1 + R_d)} = k_1.$$

Запишемо закон зміни струму  $i_1(t)$ :

$$i_1(t) = A_1 \cdot e^{pt} + k_4 \cdot \Delta U (k_1 \cdot t - T_1) + I_{10}. \quad (5.41)$$

Визначимо коефіцієнт  $A_1$ . Для початкових умов  $t=0$   $i_1(0) = I_{10}$  тоді:

$$I_{10} = A_1 \cdot e^{p \cdot 0} + k_4 \cdot \Delta U (k_1 \cdot 0 - T_1) + I_{10},$$

$$A_1 = k_4 \cdot \Delta U \cdot T_1,$$

$$i_1(t) = k_4 \cdot \Delta U \cdot T_1 \cdot (e^{pt} - 1) + k_4 \cdot k_1 \cdot \Delta U \cdot t + I_{10}. \quad (5.42)$$

Отже, сила електромагніту:

$$F_{\text{эм}} = c_1 \cdot \left( k_4 \cdot \Delta U \cdot T_1 \cdot (e^{pt} - 1) + k_4 \cdot k_1 \cdot \Delta U \cdot t + I_{10} \right)^2, \quad (5.43)$$

відхилення

$$\Delta r = k_3 \cdot \Delta s, \quad (5.44)$$

звідки:

$$\Delta s = \frac{\Delta r}{k_3}.$$

Підставами рівняння (5.35) - (5.44) в (5.19), отримаємо

$$m \cdot \Delta \ddot{s} = m \cdot g + c_2 \cdot \Delta s - c_1 \cdot \left( \Delta U \left( k_4 \cdot T_1 (e^{pt} - 1) + k_4 \cdot k_1 \cdot t \right) + I_{10} \right)^2 - h \cdot \Delta \dot{s}$$

або

$$m \cdot \Delta \ddot{s} + h \cdot \Delta \dot{s} - c_2 \cdot \Delta s = m \cdot g - c_1 \cdot \left( I_{10}^2 + 2 \cdot I_{10} \cdot \Delta U \cdot D + (\Delta U \cdot D)^2 \right).$$

Введемо позначення:

$$D = \left( k_4 \cdot T_1 (e^{pt} - 1) + k_4 \cdot k_1 \cdot t \right); \quad \Delta \dot{r} = k_3 \cdot \Delta \dot{s}; \quad \Delta \ddot{r} = k_3 \cdot \Delta \ddot{s}.$$

Підставимо отримані позначення в (5.39)

$$\left( \Delta \ddot{r} + \frac{h}{m} \cdot \Delta \dot{r} - \frac{c_2}{m} \cdot \Delta r \right) \frac{1}{k_3} = g - \frac{c_1}{m} \cdot \left( I_{10}^2 + 2 \cdot I_{10} \cdot \Delta U \cdot D + (\Delta U \cdot D)^2 \right). \quad (5.45)$$

Рівняння (5.45) є неоднорідним диференціальним рівнянням. Рішенням такого рівняння буде сума загального рішення однорідного рівняння і приватного рішення неоднорідного рівняння.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (5.45). Для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо коріння:

$$\lambda^2 + \frac{h}{m} \cdot \lambda - \frac{c_2}{m} = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{h}{m} - \frac{\sqrt{h^2 + 4 \cdot c_2 \cdot m}}{m} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{h}{m} + \frac{\sqrt{h^2 + 4 \cdot c_2 \cdot m}}{m} \right).$$

Отримано різні дійсні корені, серед яких немає нуля, тому спільне рішення:

$$\Delta r = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \Delta U} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta U}.$$

З'ясуємо, в якому вигляді будемо шукати приватне рішення. Запишемо праву частину рівняння (5.45) в наступному вигляді:

$$g - \frac{c_1}{m} \cdot \left( I_{10}^2 + 2 \cdot I_{10} \cdot \Delta U \cdot D + (\Delta U \cdot D)^2 \right) = A_2 + B_2 \cdot \Delta U + D_2 \cdot \Delta U^2,$$

$$A_2 = g - \frac{c_1 \cdot I_{10}^2}{m}, \quad B_2 = \frac{2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot D}{m}, \quad D_2 = \frac{c_1}{m} \cdot D^2.$$

Рішення будемо шукати у вигляді:

$$\Delta \tilde{r} = A_3 + B_3 \cdot \Delta U + D_3 \cdot \Delta U^2. \quad (5.46)$$

Перша похідна від (5.46):

$$\Delta \tilde{r}' = B_3 + 2 \cdot D_3 \cdot \Delta U.$$

Друга похідна від (5.46):

$$\Delta \tilde{r}'' = 2 \cdot D_3.$$

Підставимо значення похідних (5.32) в ліву частину (5.31):

$$\left( \Delta \ddot{r} + \frac{h}{m} \cdot \Delta \dot{r} - \frac{c_2}{m} \cdot \Delta r \right) \frac{1}{k_3} = 2 \cdot D_3 + \frac{h}{m} \cdot (B_3 + 2 \cdot D_3 \cdot \Delta U) - \frac{c_2}{m} \cdot (A_3 + B_3 \cdot \Delta U + D_3 \cdot \Delta U^2)$$

Складемо систему лінійних коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{D_3 \cdot c_2}{m} = D_2, \\ \frac{2 \cdot D_3 \cdot h}{m} - \frac{B_3 \cdot c_2}{m} = B_2, \\ 2 \cdot D_3 - \frac{A_3 \cdot c_2}{m} + \frac{B_3 \cdot h}{m} = A_2. \end{array} \right.$$

Введемо позначення:

$$T_2^2 = \frac{m}{c_2}, \quad T_3 = \frac{h}{c_2}, \quad D_3 = -\frac{D_2}{T_2^2}, \quad D_3 = -\frac{D_2}{T_2^2} = -\frac{c_1 \cdot D^2}{m \cdot T_2^2},$$

$$B_3 = \frac{\frac{2 \cdot D_3 \cdot h}{m} - B_2}{\frac{c_2}{m}} = \frac{2 \cdot D_3 \cdot h}{c_2} - \frac{B_2}{\frac{c_2}{m}} = -\frac{2 \cdot D^2 \cdot c_1 \cdot h}{m^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot D}{c_2},$$

$$A_3 = 2 \cdot D_3 \cdot \frac{m}{c_2} - A_2 \cdot \frac{m}{c_2} + \frac{B_3 \cdot h}{m} \cdot \frac{m}{c_2} = -\frac{2 \cdot c_1 \cdot D^2}{m} - A_2 \cdot T_2^2 - \frac{2 \cdot h^2 \cdot D^2 \cdot c_1}{c_2 m^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot D \cdot h}{c_2^2},$$

$$A_2 \cdot T_2^2 = \frac{I_{10}^2 \cdot c_1}{c_2} - \frac{mg}{c_2},$$

$$A_3 = \frac{I_{10}^2 \cdot c_1}{c_2} - \frac{mg}{c_2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot D^2}{m} - \frac{2 \cdot h^2 \cdot D^2 \cdot c_1}{c_2 m^2} - \frac{2 \cdot c_1 \cdot I_{10} \cdot D \cdot h}{c_2^2}.$$

$$\Delta r = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \Delta U} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta U} + A_3 + B_3 \cdot \Delta U + D_3 \cdot \Delta U^2.$$

Визначимо коефіцієнти  $C_1$  і  $C_2$  для початкових умов:  $\Delta U = 0$ ;  $\Delta r = 0$ ;  $\Delta \dot{r} = 0$ ;  $\Delta \ddot{r} = 0$ .

Перша похідна:

$$\Delta \dot{r} = C_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \Delta U} + C_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta U} + B_3 + 2 \cdot D_3 \cdot \Delta U;$$

друга похідна:

$$\Delta \ddot{r} = C_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \Delta U} + C_2 \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \Delta U} + 2 \cdot D_3;$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + A_3, & C_1 = -C_2 - A_3, \\ 0 = C_1 \cdot \lambda_1 + C_2 \cdot \lambda_2 + B_3, & 0 = (-C_2 - A_3) \cdot \lambda_1 + C_2 \cdot \lambda_2 + B_3, \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{B_3 - A_3 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$C_1 = -\left(\frac{B_3 - A_3 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - A_3 = -\frac{B_3}{\lambda_1 - \lambda_2} + A_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right).$$

Всі параметри, які входять в рівняння (5.26), визначаються із вихідних даних і початкових умов. Саме рівняння повністю відповідає сформульованій меті дослідження і встановлює пряму залежність відхилення  $\Delta r$  від відхилення  $\Delta U$ .



На базі отриманих аналітичним шляхом математичних моделей можна проектувати систему автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму з паралельним збудженням, визначати параметри, що забезпечують задані показники стійкості, точності і якості, визначати динамічні процеси в системі. На підставі математичного моделювання складають технічні вимоги на апаратуру системи. Остаточний вибір параметрів регулятора і його настроювання виконують в натурних умовах при дослідному відпрацюванні системи регулювання.

Зведемо диференціальне рівняння третього порядку (5.34) для функції  $\Delta r$  до системи трьох рівнянь першого порядку. Введемо позначення  $\Delta r(t) = y_1(t)$ ,  $\Delta \dot{r}(t) = y_2(t)$ ,  $\Delta \ddot{r}(t) = y_3(t)$ . Тоді система першого порядку буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = (k_1 k_2 k_3 \Delta u - y_1 - y_2 (T_1 + T_3) - y_3 (T_1 T_3 + T_2^2)) / (T_1 T_2^2) \end{cases}$$

В якості початкових умов виберемо

$$\Delta r = 0, \Delta \dot{r} = 0, \Delta \ddot{r} = 0$$

Наведемо програму Matlab чисельного розв'язку цього рівняння

Файл solve2\_15.m

```
function sol2_15
```

```
Y0=[0;0;0];
```

```
[T,Y]=ode45(@fun3,[0 0.01],Y0);
```

```
plot(T,Y(:,1));
```

```
grid on;
```

```
title('Графік залежності відхилення \delta r від відхилення напруги \Delta u')
```

```
xlabel('t');
```

```
ylabel('y');
```

```
figure;
```

```
plot(T,Y(:,2));
```

```
title({'Графік залежності першої похідної відхилення \delta r''';  
'від відхилення напруги \Delta u'})
```

```
xlabel('t');
```

```
ylabel('y''');
```

```
grid on;
```

```
figure;
```

```
plot(T,Y(:,3));
```

```
title({'Графік залежності другої похідної відхилення \delta r''''';  
'від відхилення напруги \Delta u'})
```

```
xlabel('t');
```

Файл fun3.m

```
function F=fun3(x,y)
```

```
U0=115;
```

```
R1=5;
```

```
m=1;
```

```
Rd=15;
```

$I_{10}=U_0/(R_1+R_d);$   
 $L_1=2e-3;$   
 $T_1=L_1/(R_1+R_d);$   
 $k_1=1/(R_1+R_d);$   
 $c_1=0.00905;$   
 $c_2=10;$   
 $k_2=2*I_{10}*c_1/c_2;$   
 $T_2=\text{sqrt}(m/c_2);$   
 $h=0.01;$   
 $T_3=h/c_2;$   
 $k_3=1;$   
 $F=[y(2);y(3);(k_1*k_2*k_3.*x-y(1)-(T_1+T_3).*y(2)-(T_1*T_3+T_2^2).*y(3))./(T_1*T_2^2)]$

Графіки рішення наведено на рис. 5.13...5.15

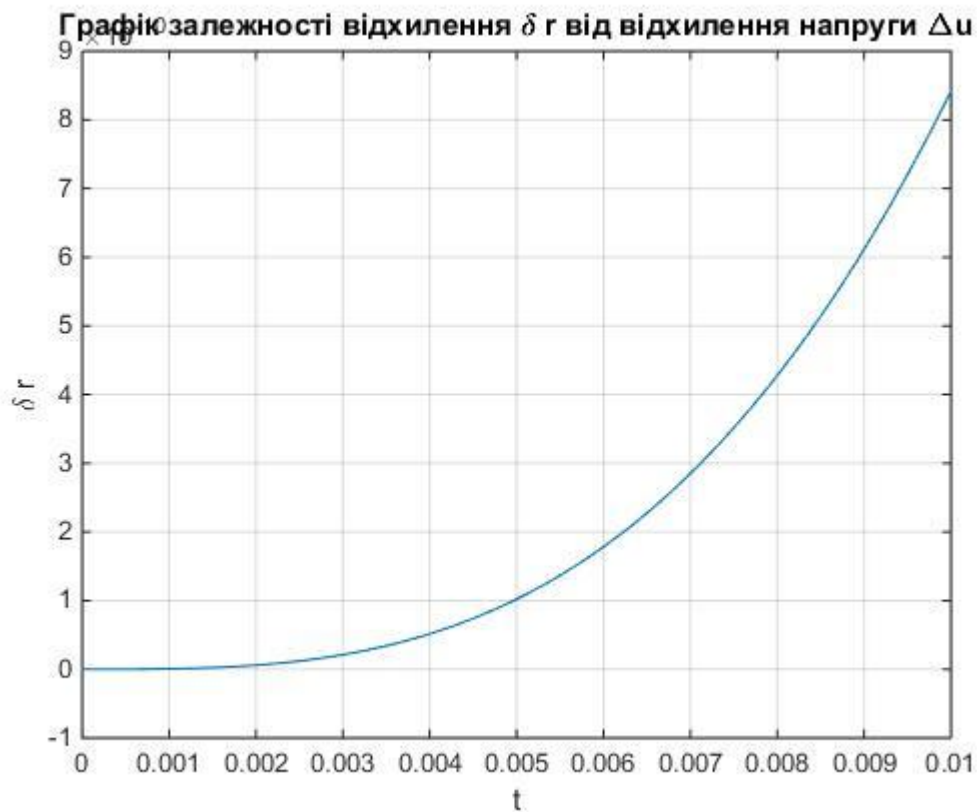


Рисунок 5.13 – Графік залежності відхилення  $\Delta r$  від відхилення напруги генератора  $\Delta u$

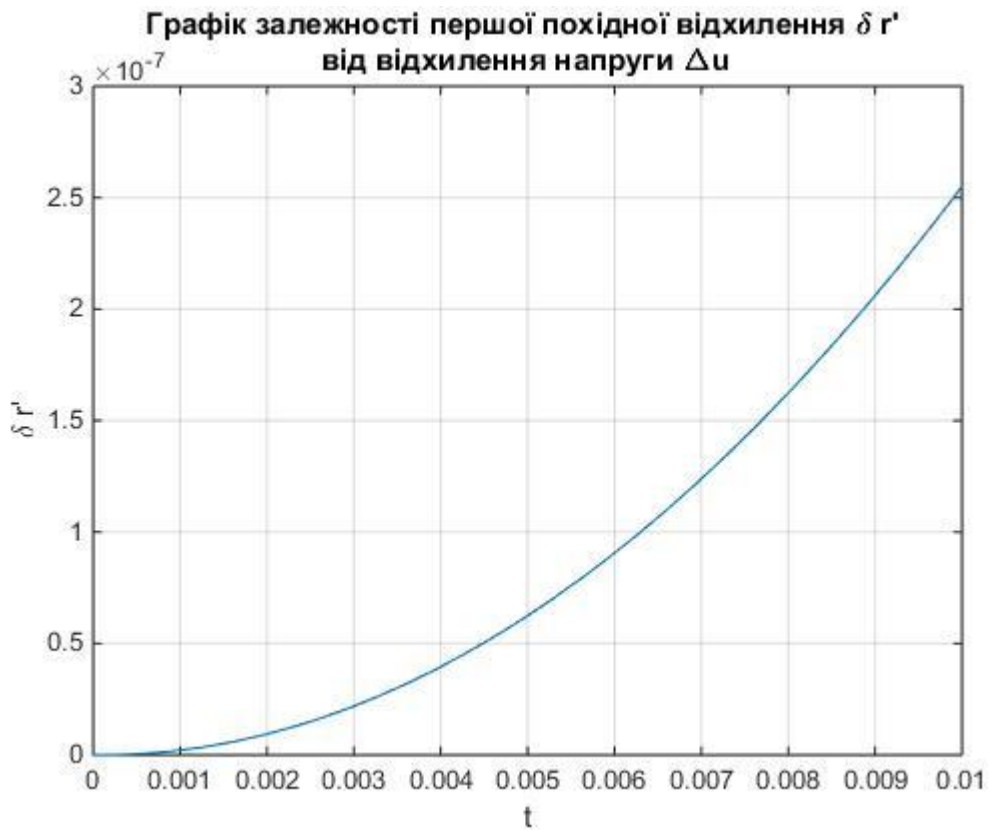


Рисунок 5.14 – Графік залежності відхилення  $\Delta \dot{i}$  від відхилення напруги генератора  $\Delta u$

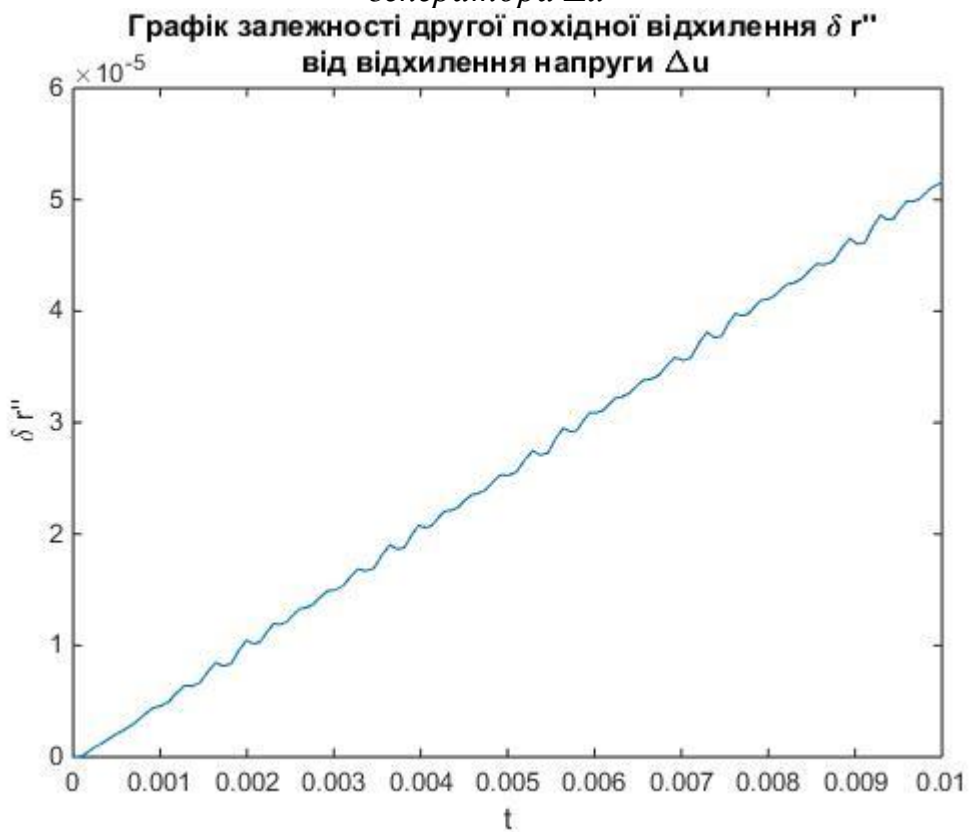


Рисунок 5.15 – Графік залежності відхилення  $\Delta \ddot{i}$  від відхилення напруги генератора  $\Delta u$

## 5.4 Електромеханічна система електромагнітного гальма

Електротехнічні системи оточують нас у повсякденному житті. В якості прикладів таких систем можна привести: електромагнітні гальма, електроприводи колодкових гальм на транспорті і в ліфтах, запірні пристрої, електромагніти гідроклапанів і високовольтних силових вимикачів, електромагнітні муфти і т.п.

Установка електромагнітного гальма дає можливість стрімко зупиняти інерційне навантаження і утримувати механізм в нерухомому стані при відключеному силовому живленні мотора, що потрібно для дотримання вимог до безпеки ряду індустриального обладнання. Існує кілька типів гальм: з залежним і незалежним живленням. Залежне і незалежне живлення гальма визначає тип його підключення до джерела енергії. При залежному живленні гальмо підключається до обмотки мотора, а при незалежному - до зовнішнього джерела живлення.

Існують вбудовані і прибудовані електромагнітні гальма. Конструктивна особливість моторів з вбудованим гальмом полягає в тому, що за рахунок особливої конструкції ротора і вала, основна частина електромагнітного гальма розташовується всередині самого мотора. Зовні під кожухом знаходиться тільки гальмівний диск-вентилятор.

Розглядуване електромагнітне гальмо [6] представлено на рис. 5.16.

Гальмівна колодка електромагнітного гальма, розташованого в вертикальній площині, приводиться в рух коромислом ВС, яке було скріплене шарніром В з кривошипом ОА (рис. 5.16). До кривошипа ОА жорстко прикріплений постійний магніт NS, який при подачі на обмотку соленоїда постійної напруги  $u$  втягується всередину соленоїда. При знеструмленому соленоїді кривошип ОА займає горизонтальне положення, спираючись на опору  $A_1$ , а колесо вільно обертається навколо осі, що проходить через точку  $O_1$ . Сумарна вага кривошипа ОА і постійного магніту NS  $P_1$  прикладена в точці Е, вага коромисла ВС  $P_2$  прикладена в середині ВС - точці Г, а вага гальмівної колодки  $P_3$  - в точці С. Пронумеруємо ланки механізму: кривошип ОА - 1, коромисло - 2, гальмівна колодка - 3. Позначимо через  $J_1, J_3$  моменти інерції першого і третього тіла системи щодо своїх осей обертання, а через  $J_2$  - момент інерції коромисла щодо центра мас Г. Нехай довжини ланок механізму рівні  $OB = BE = EA = r_1, BC = r_2, CD = r_3$ .

Електрична частина пристрою утворена джерелом постійної напруги і обмоткою соленоїда. Позначимо через  $L_{11}$  коефіцієнт самоіндукції обмотки соленоїда, через  $R$  - омичний опір середовища. Замінімо постійний магніт - соленоїдом з постійним струмом  $i_0$  і позначимо через  $L_{10}$  коефіцієнт взаємної індукції обмотки соленоїда з контуром еквівалентного струму  $i_0$ .

Складемо рівняння Лагранжа - Максвелла для електромагнітного гальма. Механічна частина системи є шарнірний четириланковий механізм

(кривошипно - коромисловий), який, як відомо, представляє систему з одним ступенем свободи. Електрична частина системи містить один контур із змінним струмом. Як узагальнену координату електромеханічної системи вибираємо кут повороту  $\varphi$  кривошипа ОА і струм  $i$  в обмотці соленоїда.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії  $T_1$  кривошипа ОА, кінетичної енергії  $T_2$  коромисла ВС і кінетичної енергії  $T_3$  гальмівної колодки CD.

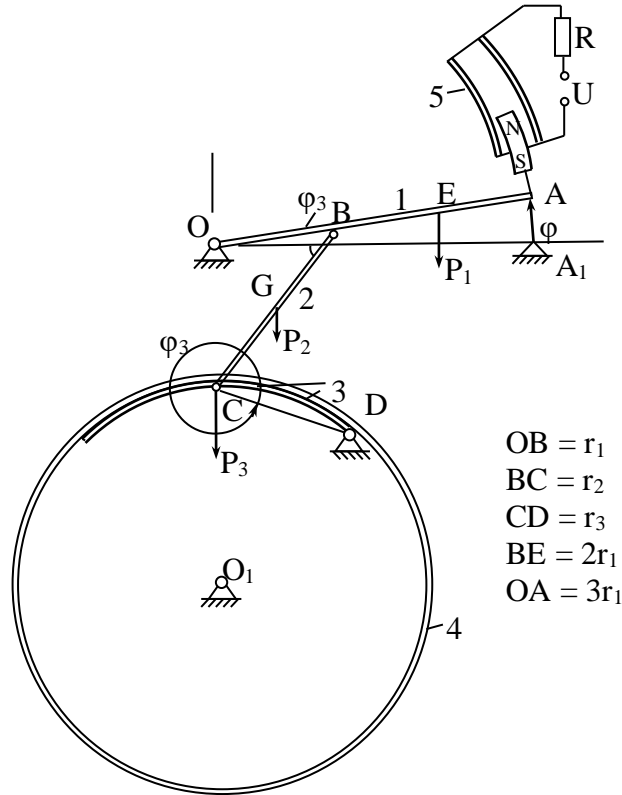


Рисунок 5.16 – Електромагнітне гальмо: 1 - кривошип, 2 - коромисло, 3 - гальмівна колодка, 4 - колесо, 5 - соленоїд.

Кривошип і гальмівна колодка здійснюють обертальний рух, тому

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2, \quad \Omega = \dot{\varphi}, \quad \Omega_{3z} = \dot{\varphi}_3,$$

де  $\varphi_3$  - кут повороту колодки навколо полюса С.

Коромисло ВС здійснює плоскопаралельний рух, тому

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2; \quad \Omega_{2z} = \dot{\varphi}_2,$$

де  $v_c$  – швидкість центру мас коромисла,  $\varphi_2$  – кут повороту коромисла навколо полюса В. Отже, повна кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2 + \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2. \quad (5.47)$$

Виразимо кутові швидкості  $\Omega_{2z}$ ,  $\Omega_{3z}$  і швидкість точки G через узагальнену координату  $\varphi$  і кутову швидкість  $\Omega$ . Для цього складемо

кінематичні рівняння для шарнірного чотириланника  $OBCD$ . Відповідно до відомих формул кінематики

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}]; \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}]; \quad \bar{v}_D = \bar{v}_C + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}].$$

Послідовно виключаючи швидкості в проміжних точках, отримаємо

$$\bar{v}_D = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}].$$

З огляду на те, що  $\bar{v}_D = \bar{v}_0 = 0$ , маємо

$$[\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}] = 0.$$

Проектуючи цю векторну рівність на осі координат, одержуємо

$$\begin{aligned} -\Omega r_1 \sin \varphi - \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \Omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 &= 0; \\ \Omega r_1 \cos \varphi + \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \Omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Помноживши 1-е рівняння (5.48) на  $\cos \varphi_3$ , 2-е рівняння на  $\sin \varphi_3$  і складаючи, знайдемо

$$\Omega_{2z} = \Omega \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Аналогічно визначаємо кутову швидкість гальмівної колодки

$$\Omega_{3z} = \Omega \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_2)}{r_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Нарешті, випишемо рівняння для швидкості центру мас коромисла

$$\bar{v}_G = [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BG}].$$

Проектуючи це векторне співвідношення на осі координат, одержуємо

$$\begin{aligned} v_{Gx} &= -\Omega r_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2; \\ v_{Gy} &= -\Omega r_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2; \\ v_G^2 &= \Omega^2 r_1^2 + \Omega \Omega_{2z} r_1 r_2 \cos(\varphi - \varphi_2) + \frac{1}{4} \Omega_{2z}^2 r_2^2. \end{aligned}$$

З фізичного змісту задачі ясно, що кути  $\varphi$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  в процесі роботи системи змінюються незначно, тому замінимо в знайдених кінематичних співвідношеннях кути  $\varphi$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  їх початковими значеннями  $\varphi_1^0 = 0$ ,  $\varphi_2^0$ ,  $\varphi_3^0$ . Тоді після підстановки в (5.47) отримуємо

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 ;$$

$$J = J_1 + \frac{P_2 r_1^2}{g} \left[ 1 + \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin (\varphi_2^0 - \varphi_3^0)} + \frac{(\sin \varphi_3^0)^2}{4(\sin (\varphi_3^0 - \varphi_2^0))^2} \right] +$$

$$+ r_1^2 \frac{J_2 r_3^2 (\sin \varphi_3^0)^2 + J_3 r_2^2 (\sin \varphi_2^0)^2}{r_2^2 r_3^2 (\sin (\varphi_3^0 - \varphi_2^0))^2} .$$

Величина  $J$  носить назву приведенного моменту інерції і при точному вирішенні задачі є функцією узагальненої координати  $\varphi$ , проте в силу зробленого припущення про малість зміни кутів повороту ланок системи величину  $J$  можна вважати постійною.

Потенційна енергія системи

$$\Pi = P_1 y_E + P_2 y_G + P_3 y_C ,$$

де  $y_E, y_G, y_C$  - ординати точок  $E, G, C$ .

Підставляючи у вираз для потенційної енергії

$$y_E = 2r_1 \sin \varphi, \quad y_G = r_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} r_2 \sin \varphi_2, \quad y_C = r_1 \sin \varphi + r_2 \sin \varphi_2,$$

Отримуємо

$$\Pi = (2P_1 + P_2 + P_3) r_1 \sin \varphi + \left( \frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) r_2 \sin \varphi_2 . \quad (5.49)$$

Зауважимо, що при диференціюванні вираження (5.49) по узагальненій координаті  $\varphi$  потрібно враховувати залежність кута  $\varphi_2$  від  $\varphi$ , причому в силу знайдених вище кінематичних співвідношень

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi} = \frac{\Omega_{2z}}{\Omega} = \frac{r_1 \sin (\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin (\varphi_3 - \varphi_2)} .$$

Отже,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P r_1 ,$$

$$P r_1 = \left[ (2P_1 + P_2 + P_3) \cos \varphi + \left( \frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2 \sin (\varphi - \varphi_3)}{\sin (\varphi_3 - \varphi_2)} \right] r_1 .$$

При малій зміні кутів  $\varphi, \varphi_2, \varphi_3$  приведенний момент  $P r_1$  можна вважати постійним, а вираз для потенційної енергії записати у вигляді

$$\Pi = P_0 r_1 \varphi ,$$

де

$$P_0 = 2P_1 + P_2 + P_3 + \left( \frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin(\varphi_2^0 - \varphi_3^0)}.$$

Випишемо вираз для магнітної енергії системи

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + \frac{1}{2} L_{10} i i_0.$$

Коефіцієнт взаємної індукції  $L$  залежить від положення якоря всередині соленоїда, і, отже, від кута повороту  $\varphi$  кривошипа  $OA$ . При малих кутах  $\varphi$  функцію  $L_{10}(\varphi)$  можна розкласти в ряд Тейлора і знехтувати квадратичними членами

$$L_{10}(\varphi) = L_{10}(0) + \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi.$$

При цьому магнітна енергія системи набуде вигляду

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi,$$

де  $f = i_0 \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \text{const}.$

З огляду на, що ємності в електричному ланцюзі відсутні і електрична енергія дорівнює нулю, складемо функцію Лагранжа для даної електромеханічної системи

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - P_0 r_1 \varphi + \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi.$$

Якщо знехтувати тертям в шарнірах, то диссипативна функція системи буде визначатися тільки втратами на джоулево тепло

$$\psi = \frac{1}{2} R i^2.$$

Узагальнення неконсервативні сили механічної природи в системі відсутні, тому рівняння Лагранжа - Максвелла мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{i}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{i}} = u.$$

Виконуючи операції диференціювання, отримуємо

$$J \ddot{\varphi} + P_0 r_1 - f i = 0;$$

(5.50)

$$L_{11} \frac{di}{dt} + f \dot{\varphi} + R i = u.$$



Диференціальні рівняння (5.50) описують процеси, що відбуваються в механічній та електричній частинах пристрою.

Для моделювання роботи механізму задамося конкретними значеннями параметрів:  $J=5,2$  кг\*м<sup>2</sup>,  $P_0=150$ Н,  $r_l=0,4$ м,  $f=0,55$ В,  $L_{11}=12$ мкГн,  $R=0,1$ Ом,  $u=12$ В.

Моделювання виконаємо з використанням програми Mathcad. Нижче наведено блок рішення системи рівнянь (5.50):

```

Given

J·φ''(t) + P0·r1 - f·i(t) = 0

L11·i'(t) + f·φ'(t) + R·i(t) = u

φ(0) = 0   φ'(0) = 0.001

i(0) = 0

t := 0,0.01..2

( φ
 i ) := Odesolve( ( φ
 i ), t, 2)

ω(t) := d/dt φ(t)
    
```

На рис. 5.17...5.20 представлені результати моделювання.

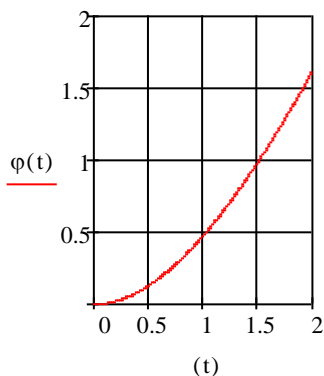


Рисунок 5.17 – Залежність кута  $\varphi(t)$  від часу  $t$

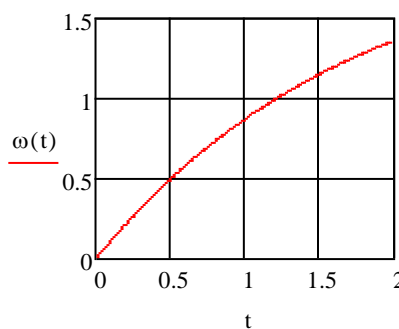


Рисунок 5.18 – Залежність кутової швидкості  $\omega(t)$  від часу  $t$

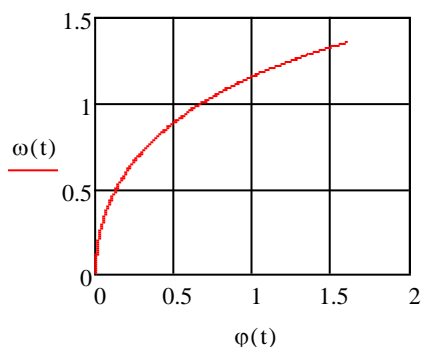


Рисунок 5.19 – Фазовий портрет в координатах  $\varphi(t)$  -  $\omega(t)$

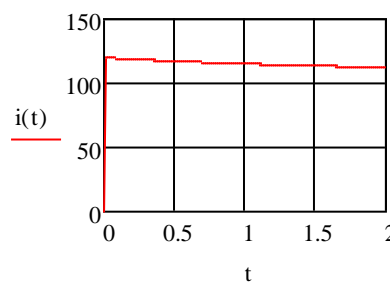


Рисунок 5.20 – Залежність сили струму  $i(t)$  від часу  $t$

Із системи рівнянь (5.50) можна знайти час  $\tau$  між подачею напруги на обмотку соленоїда і початком руху гальмівної колодки

$$\tau = \frac{L_{11}}{R} \cdot \ln \frac{fu}{Ju - Rr_1 P_0}.$$

Початок руху якоря можливо лише за умови

$$u > \frac{Rr_1 P_0}{f}.$$

Це співвідношення вирішує завдання про величину мінімального напруги, при якому можлива робота електромагнітного гальма.

Для порівняння розглянемо розв'язання цієї задачі в програмі Maple. Лістинг програми Maple і результати моделювання у вигляді залежностей руху кривошипа  $OA$ , його кутової швидкості, зміни сили електричного струму в обмотці соленоїда від часу, а також фазовий портрет представлені на рис. 5.21...5.24.

```
> restart,
> with(plots) :
> J := 5.2 : P0 := 150 : r1 := 0.4 : f := 0.55 :
  L11 := 0.000012 : R := 0.1 : u := 12 :
> #Чисельне рішення диференційного рівняння
  #руху тіла
> sys := diff(φ(t), t) = p(t), diff(p(t), t) =  $\frac{f}{J} \cdot i(t) - \frac{P0 \cdot r1}{J}$ ,
  L11 \cdot diff(i(t), t) + f \cdot p(t) + R \cdot i(t) = u :
> fens := [φ(t), p(t), i(t)] :
> dsol := dsolve({sys, φ(0) = 0, p(0) = 0.001, i(0) = 0}, fens,
  numeric, output = listprocedure) :
> #Побудова графіка руху кривошипа OA
> odeplot(dsol, [t, φ(t)], 0.01 .. 1.5, numpoints = 500, title = 'Залежність
  кута повороту кривошипа від часу', gridlines = true, thickness = 2,
  titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

**Залежність кута повороту кривошипа від часу**

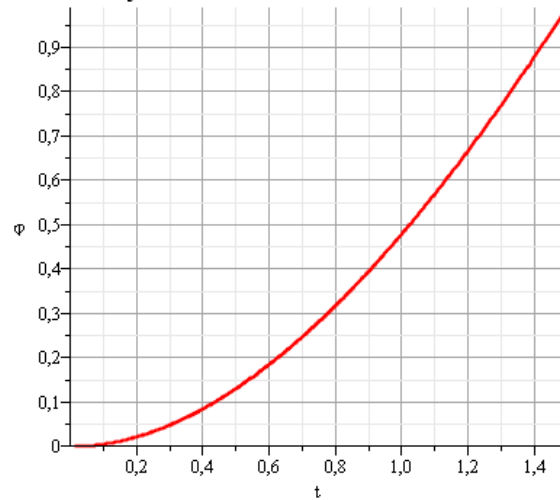


Рисунок 5.21 – Залежність кута повороту кривошипа  $\varphi$  від часу  $t$ .

```
> #Побудова графіка зміни кутової швидкості  
#кривошипа OA  
> odeplot(dsol, [t, p(t)], 0..1.5, numpoints = 500, title = 'Залежність кутової  
швидкості кривошипа від часу', gridlines = true, thickness = 2,  
titlefont = [TIME, bold, 16], color = blue);
```

**Залежність кутової швидкості кривошипа від часу**

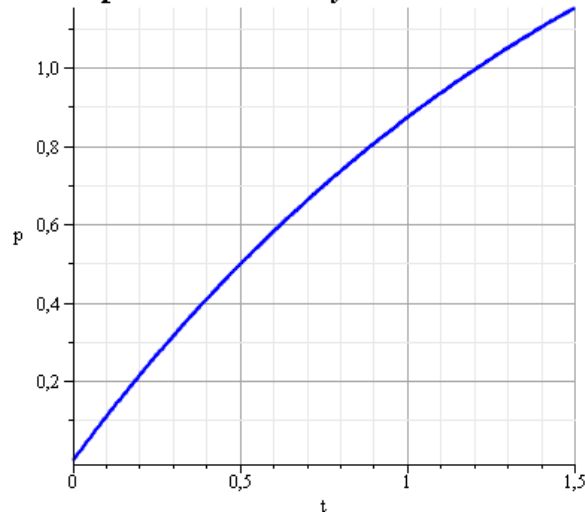


Рисунок 5.22 – Залежність кутової швидкості кривошипа ( $p$ ) від часу  $t$ .

```
> #Побудова графіка зміни сили струму від часу  
> odeplot(dsol, [t, i(t)], 0..0.005, numpoints = 500, title = 'Залежність сили  
струму від часу', gridlines = true, thickness = 2,  
titlefont = [TIME, bold, 16]);
```

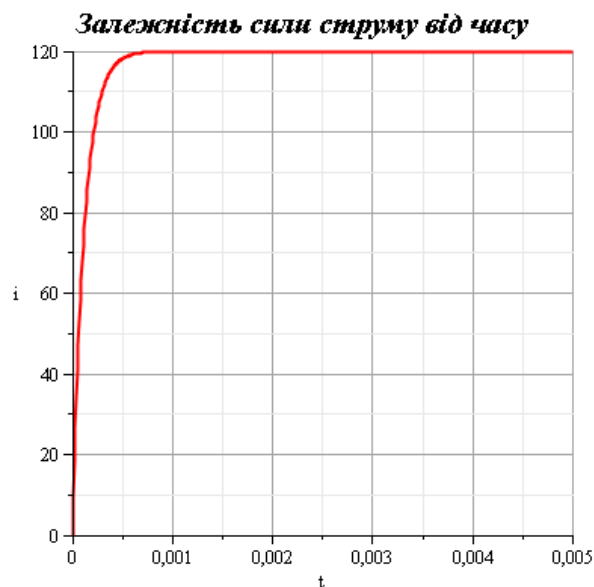


Рисунок 5.23 – Залежність сили струму в обмотці соленоїда ( $i$ ) від часу  $t$

```

> #Побудова фазового портрета
> odeplot(dsol, [ $\varphi(t)$ ,  $p(t)$ ], 0..0.05, numpoints = 500, title = 'Фазовий портрет', gridlines = true, thickness = 2, titlefont = [TIME, bold, 16]);

```

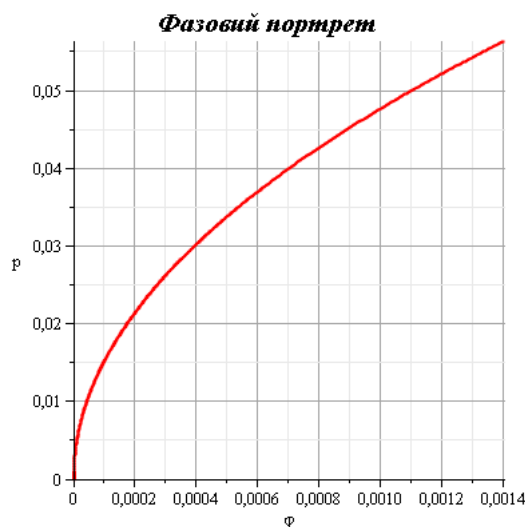


Рисунок 5.24 – Фазовий портрет «кут повороту кривошипа  $OA$  ( $\varphi$ ) - кутова швидкість кривошипа ( $p$ )»

## 5.5 Коливальна електромеханічна система, що складається з двох двигунів постійного струму

Розглянемо електромеханічну систему (ЕМС), коливання якої порушується двома електродвигунами постійного струму [12]. Коливальна

система, зображена на рис. 5.25 і складається з двох джерел енергії, один з яких знаходиться на нерухомому підставі і з'єднаний пружною зв'язком з рухомою основою (платформою) іншого джерела енергії з неврівноваженим ексцентриком. При спільній роботі двох джерел енергії спостерігаються на практиці деякі області нестійкості (зрив коливань, зупинки).

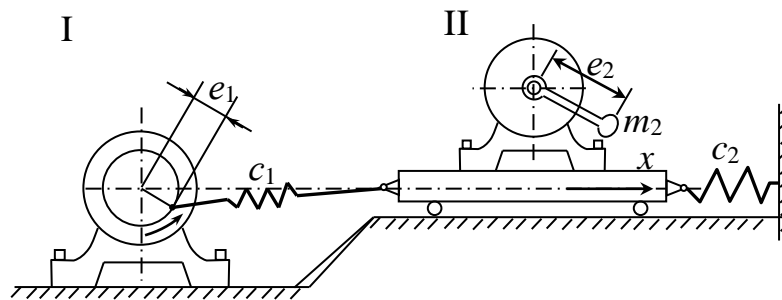


Рисунок 5.25 – Ескіз коливальні системи.

Складемо вираження механічних і електричних складових кінетичної, потенційної енергій і дисипативної функції даної системи:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + 2\dot{\varphi}_2 \dot{x} e_2 \cos \varphi_2 + e_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} L_1 \dot{i}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{i}_2^2 + \psi_1 i_1 + \psi_2 i_2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_1 (x - e_1 \sin \varphi_1)^2 + m_2 e_2 g (1 - \cos \varphi_2),$$

$$D = \frac{1}{2} r \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \rho_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} R_1 \dot{i}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{i}_2^2,$$

де використані наступні позначення:  $x$  – координата поступального руху платформи,  $\varphi_1, \varphi_2$  – кути поворотів роторів джерел енергії,  $m_1$  – маса, яка здійснює поступальний переміщення,  $m_2$  – маса неврівноваженого ексцентрика,  $I_1, I_2$  – моменти інерції роторів відповідно першого і другого джерел енергії,  $L_1, L_2$  – індуктивність обмотки якорів джерел енергії,  $\psi_1, \psi_2$  – потокозчеплення обмотки зі стаціонарним магнітним полем збудження,  $R_1, R_2$  – активні опори обмотки якорів джерел енергії,  $r$  – коефіцієнт сил опору, що виникають при поступальному переміщенні маси,  $\rho_1, \rho_2$  – коефіцієнти моментів сил опору, що виникають при обертанні роторів. Як джерела енергії використана модель джерела енергії постійного струму з незалежним збудженням.

Рівняння Лагранжа II роду з узагальненням для електромеханічних систем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, рівняння руху розглянутої системи мають вигляд

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = c_1 e_1 \sin \varphi_1 - m_2 e_2 \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + m_2 e_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2,$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + \rho_1 \dot{\varphi}_1 = k_1 i_1 + c_1 e_1 x \cos \varphi_1 - c_1 e_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1,$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + \rho_2 \dot{\varphi}_2 = k_2 i_2 - m_2 e_2 \ddot{x} \cos \varphi_2 - m_2 e_2 g \sin \varphi_2,$$

$$L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + k_1 \varphi_1 = u_1,$$

$$L_2 \dot{i}_2 + R_2 i_2 + k_2 \varphi_2 = u_2,$$

де  $m = m_1 + m_2$ ,  $c = c_1 + c_2$ ,  $I_2 = I + m_2 e_2^2$ ,  $l_1, l_2$  – ексцентриситети роторів.

Проведемо чисельне інтегрування цієї системи рівнянь для конкретної коливальної системи, яка служить ілюстрацією якісного характеру перехідних і усталених режимів повної математичної моделі даної ЕМС. Нехай параметри цієї електромеханічної системи мають наступні значення:  $m = 5.8$  кг,  $m_2 = 0.29$  кг,  $c = 78.04$  Н/м,  $c_1 = 25.51$  Н/м,  $e_1 = 0.005$  м,  $e_2 = 0.0075$  м,  $I_1 = 1$  кг · м<sup>2</sup>,  $I_2 = 1$  кг · м<sup>2</sup>,  $R_1 = 0.01$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $L_1 = 0.02$  Гн,  $L_2 = 0.04$  Гн,  $\kappa_1 = 0.01$  Дж/А,  $\kappa_2 = 0.02$  Дж/А,  $\rho_1 = 0.01$  Дж/с,  $\rho_2 = 0.02$  Дж/с,  $r = 0.33$  Н · с/м.

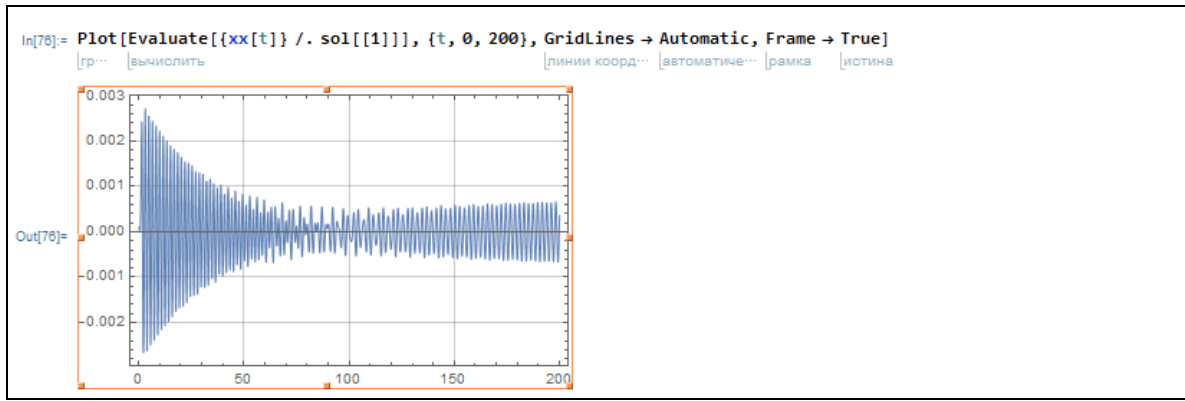
Лістинг програми в програмі Wolfram Mathematica.

```

In[75]:= With[{g = 9.8, m = 5.8, m2 = 0.29, c = 78.04, c1 = 25.51, e1 = 0.005, e2 = 0.0075, I1 = 1, I2 = 1, R1 = 0.001,
используя
R2 = 4, L1 = 0.02, L2 = 0.04, k1 = 0.01, k2 = 0.02, ρ1 = 0.00, ρ2 = 0.02, r = 0.33, u1 = 12, u2 = 12},
sol =
NDSolve[
численно решить ДУ
{m*xx''[t] + r*xx'[t] + c*xx[t] == c1*e1*Sin[ϕ1[t]] - m2*e2*ϕ2''[t]*Cos[ϕ2[t]] +
[синус] [косинус]
m2*e2*((ϕ2'[t])^2)*Sin[ϕ2[t]],
[синус]
I1*ϕ1''[t] + ρ1*ϕ1'[t] == k1*i1[t] + c1*e1*xx[t]*Cos[ϕ1[t]] - c1*(e2^2)*Sin[ϕ1[t]]*Cos[ϕ1[t]],
[косинус] [синус] [косинус]
I2*ϕ2''[t] + ρ2*ϕ2'[t] == k2*i2[t] - m2*e2*xx''[t]*Cos[ϕ2[t]] - m2*e2*g*Sin[ϕ2[t]],
[косинус] [синус]
L1*i1'[t] + R1*i1[t] + k1*ϕ1'[t] == u1, L2*i2'[t] + R2*i2[t] + k2*ϕ2'[t] == u2, xx[0] == 0.0001,
ϕ1[0] == 0.0001, ϕ2[0] == 0.0001, i1[0] == 0.0001, i2[0] == 0.0001, xx'[0] == 0.0001, ϕ1'[0] == 0.0001,
ϕ2'[0] == 0.0001}, {xx, ϕ1, ϕ2, i1, i2}, {t, 0, 200}]]

Out[75]= {{xx → InterpolatingFunction[Domain: {{0., 200.}}
Output: scalar],
ϕ1 → InterpolatingFunction[Domain: {{0., 200.}}
Output: scalar], ϕ2 → InterpolatingFunction[Domain: {{0., 200.}}
Output: scalar],
i1 → InterpolatingFunction[Domain: {{0., 200.}}
Output: scalar], i2 → InterpolatingFunction[Domain: {{0., 200.}}
Output: scalar]}]}

```



Представимо результати інтегрування графічно (рис. 5.26...5.30). Будемо проводити аналіз системи в залежності від величини напруги, що підводиться ( $u_1=u_2=u$ ). У розрахунках обрані ті значення напруги ( $u=12, 18, 110, 220, 380$  В), які найчастіше використовуються в промисловості.

З рис. 5.26 і рис. 5.27 видно, що найбільша амплітуда коливань платформи (а нас цікавлять режими малих амплітуд) реалізується при підводиться напрузі  $u=12, u=18$  В, а з рис. 5.28-5.31 при значеннях  $u=110, 220, 380$  В система починає коливання з малими амплітудами досить швидко, що добре для промислових установок. Отже, при рівномірному збільшенні напруги, треба швидше пройти малі значення напруги.

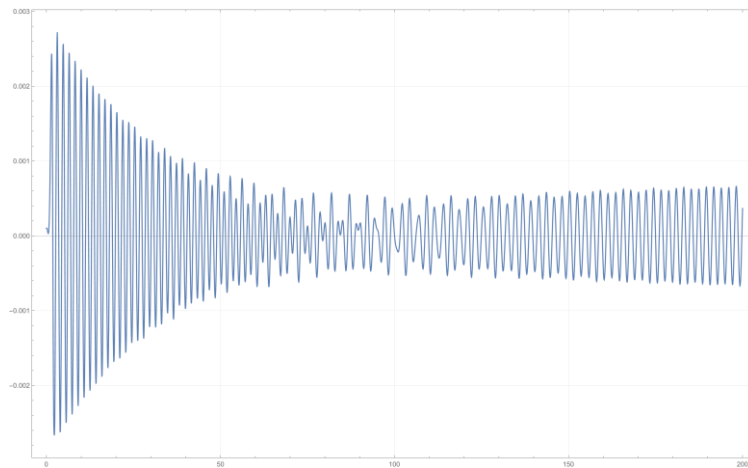


Рисунок 5.26 – Коливання платформи при  $u=12$  В

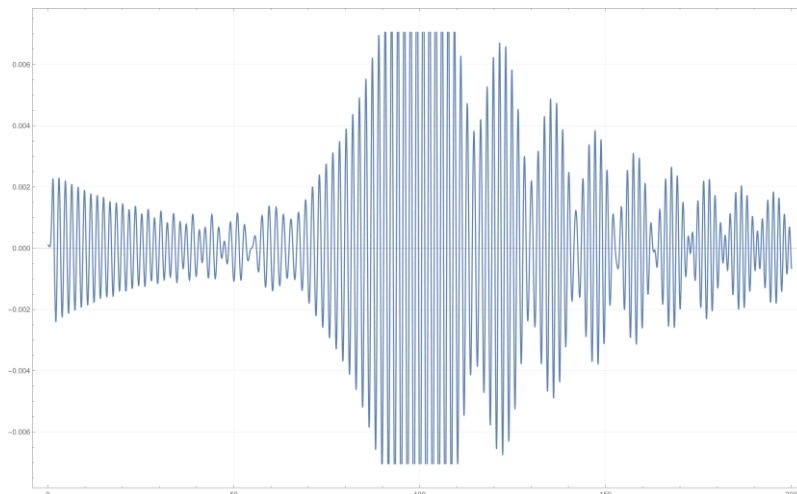
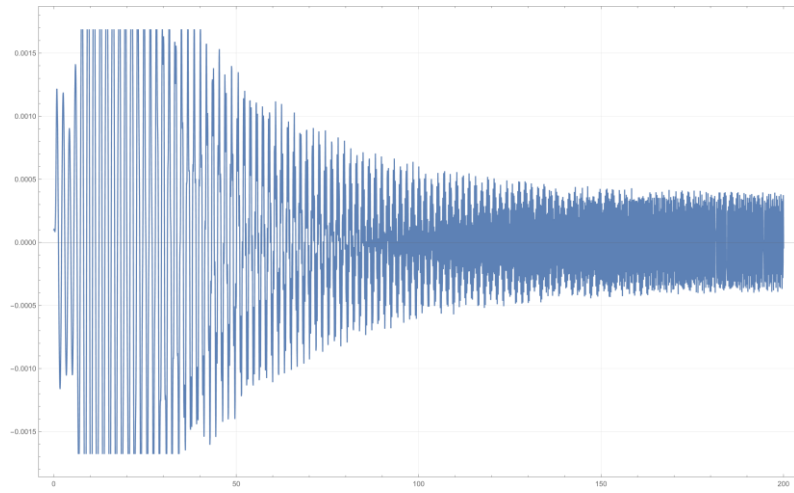
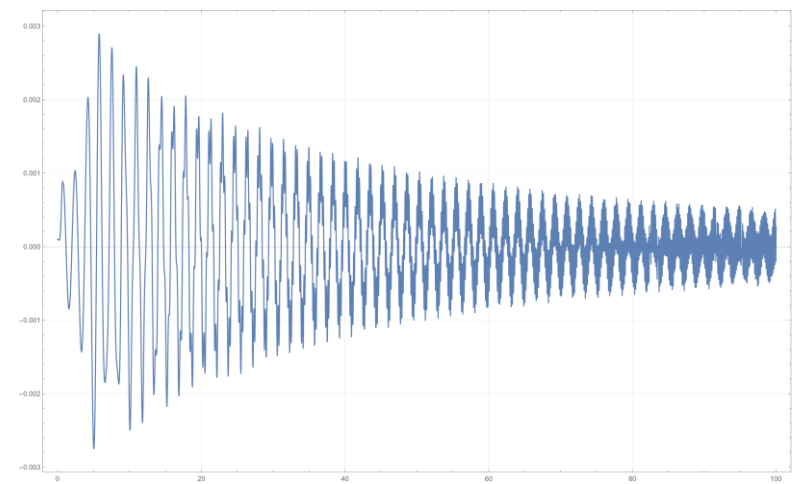


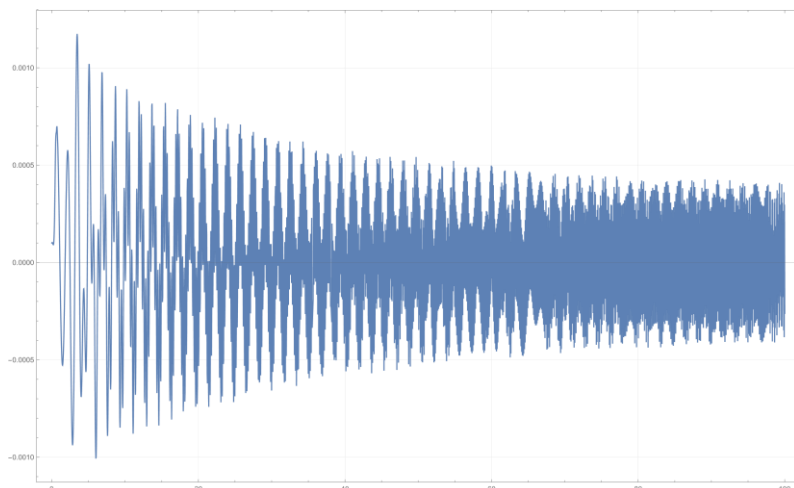
Рисунок 5.27 – Коливання платформи при  $u=18$  В



*Рисунок 5.28 – Коливання платформи при  $u=110$  В*

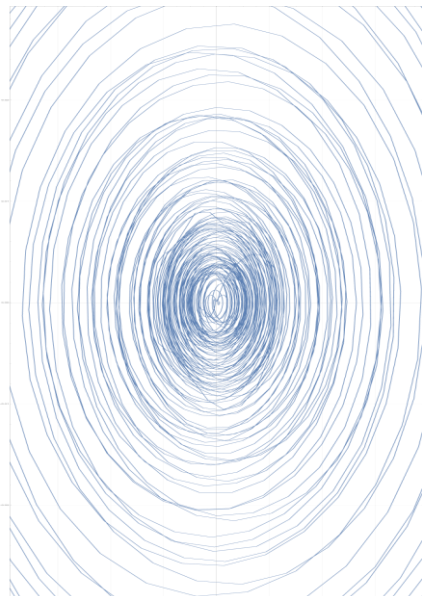


*Рисунок 5.29 – Коливання платформи при  $u=220$  В*



*Рисунок 5.30 – Коливання платформи при  $u=380$  В*





*Рисунок 5.31 – Фазовий портрет при  $u=18\text{ В}$*

Отриманий результат дозволяє зробити висновок, що для розглянутої конкретної коливальної системи та конкретних джерел енергії при вибраних параметрах їх спільна робота робить позитивний вплив, так як в процесі експлуатації реальних систем якраз і намагаються домогтися ефекту малості амплітуди коливань. В даному випадку використаний підхід дозволяє оцінити можливість зменшення вібрації і тим самим сприяє поліпшенню якісних можливостей експлуатації електромеханічних систем.

## 6 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН ЗМІННОГО СТРУМУ

### 6.1 Моделювання асинхронної машини у фазних координатах

#### 6.1.1 Теоретичні відомості

Система диференціальних рівнянь електричної рівноваги кіл статора та ротора асинхронного двигуна (АД) для миттєвих значень напруг, струмів та потокозчеплень, складена з урахуванням припущень [41], в матричній формі має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\text{де } \mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} U_{sA} \\ U_{sB} \\ U_{sC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} i_{sA} \\ i_{sB} \\ i_{sC} \end{bmatrix}, \quad \Psi_s = \begin{bmatrix} \Psi_{sA} \\ \Psi_{sB} \\ \Psi_{sC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} U_{ra} \\ U_{rb} \\ U_{rc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix},$$

$\Psi_r = \begin{bmatrix} \Psi_{ra} \\ \Psi_{rb} \\ \Psi_{rc} \end{bmatrix}$  – вектори напруг, струмів і потокозчеплень фаз А, В, С статора

і а, b, c ротора;  $\mathbf{R}_s = \text{diag}([R_{sA} \ R_{sB} \ R_{sC}])$ ,  $\mathbf{R}_r = \text{diag}([R_{ra} \ R_{rb} \ R_{rc}])$  – діагональні матриці активних опорів відповідно фаз статора і ротора, які приведені до статора;  $\mathbf{O}$  – нульова матриця розмірності  $[3 \times 3]$ .

За умови повної симетрії АД ( $R_{sA} = R_{sB} = R_{sC} = R_s$ ,  $R_{ra} = R_{rb} = R_{rc} = R_r$ ) рівняння (6.1) може бути розділено на два рівняння – баланси напруг окремо статора і ротора, – тоді матриці активних опорів  $\mathbf{R}_s$  і  $\mathbf{R}_r$  можуть бути замінені відповідними скалярними величинами.

При ненасиченому магнітному колі машини потокозчеплення фаз статора і ротора можуть бути виражені через струми фаз статора і ротора і відповідні індуктивності  $L_A, \dots, L_a, \dots$  та взаємоіндуктивності  $L_{AB}, \dots, L_{aC}, \dots$  наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\text{де } \mathbf{L}_{ss} = \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{BA} & L_B & L_{BC} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_C \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{rs} = \begin{bmatrix} L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix}.$$

До (6.2) входять індуктивності фаз

$$\left. \begin{aligned} L_A &= L_{AA} + L_{AA\sigma}; \\ L_B &= L_{BB} + L_{BB\sigma}; \\ L_C &= L_{CC} + L_{CC\sigma}; \\ L_a &= L_{aa} + L_{aa\sigma}; \\ L_b &= L_{bb} + L_{bb\sigma}; \\ L_c &= L_{cc} + L_{cc\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

що складаються з головних індуктивностей фаз і індуктивностей розсіяння.

Головні індуктивності усіх фаз за умови повної симетрії АД однакові і не залежать від кутового положення ротора:

$$L_{AA} = L_{BB} = L_{CC} = L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_h, \quad (6.4)$$

де  $L_h$  – максимальна приведена взаємна індуктивність між фазами статора і ротора, яка залежить від обмоточних даних статора (числа пар полюсів  $Z_p$ , числа витків  $W_s$ , обмоточного коефіцієнту  $k_{os}$ ), магнітних властивостей середовища повітряного зазору (магнітна пронизливість  $\mu_0$ ) і геометричних розмірів області зазору (розрахункова довжина магнітопроводу  $l_\delta$ , полюсне ділення  $\tau$ , реальна ширина зазору  $\delta$ , коефіцієнт Картера  $k_\delta$ ) [41]:

$$L_h = \frac{4\mu_0}{Z_p \pi^2} (W_s k_{os})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta} = \frac{2}{3} L_m, \quad (6.5)$$

де  $L_m$  – головна взаємна індуктивність між фазою статора і фазами ротора.

Тепер відповідно до (6.3) сумарні індуктивності фаз статора і ротора можна виразити через взаємну індуктивність:

$$\left. \begin{aligned} L_A &= L_B = L_C = L_h \left( 1 + \frac{3}{2} \sigma_s \right); \\ L_a &= L_b = L_c = L_h \left( 1 + \frac{3}{2} \sigma_r \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

де  $\sigma_s = \frac{L_{s\sigma}}{L_m} = \frac{2}{3} \frac{L_{s\sigma}}{L_h}$ ,  $\sigma_r = \frac{L_{r\sigma}}{L_m} = \frac{2}{3} \frac{L_{r\sigma}}{L_h}$  – коефіцієнти розсіяння статора і ротора відповідно.

Головні взаємні індуктивності між фазами статора і між фазами ротора також дорівнюють одна одній і не залежать від кутового положення ротора [41]:

$$L_{AB} = L_{BC} = L_{AC} = L_{ab} = L_{bc} = L_{ac} = -L_h/2 = -L_m/3. \quad (6.7)$$

Взаємні індуктивності між фазами статора і ротора залежать від кута

$$\theta_r = \theta_{r0} + \int \omega_r dt = z_p(\theta_0 + \int \omega dt), \quad (6.8)$$

що визначає положення ротора відносно статора, приведеного до числа полюсів статора між осями фаз  $A$  статора і  $a$  ротора [41]:

$$\left. \begin{aligned} L_{Aa} = L_{Bb} = L_{Cc} = L_{aA} = L_{bB} = L_{cC} = L_h \cos(\theta_r); \\ L_{Ab} = L_{Bc} = L_{Ca} = L_{bA} = L_{cB} = L_{aC} = L_h \cos(\theta_r + 2\pi/3); \\ L_{Ac} = L_{Ba} = L_{Cb} = L_{cA} = L_{aB} = L_{bC} = L_h \cos(\theta_r + 4\pi/3). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

У формулі (6.8)  $\theta_{r0} = z_p \theta_0$  – початкове значення кута повороту ротора, приведене до числа полюсів статора, **ел.** рад;  $\omega_r = z_p \omega$  – кутова швидкість обертання ротора, приведена до числа полюсів статора, **ел.** рад;  $\theta$ ,  $\omega$  – дійсні значення величин, геом. рад.

Електромагнітний момент АД в загальному випадку дорівнює [41]:

$$M = z_p \frac{\partial W_E}{\partial \theta},$$

де  $W_E$  – електромагнітна енергія, що передається зі статора на ротор АД) і може бути обчислений за матричним виразом

$$M = -z_p L_h \mathbf{I}_s \mathbf{B} \mathbf{I}_r,$$

$$\text{де } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) & \sin(\theta_r + 2\pi/3) & \sin(\theta_r + 4\pi/3) \\ \sin(\theta_r + 4\pi/3) & \sin(\theta_r) & \sin(\theta_r + 2\pi/3) \\ \sin(\theta_r + 2\pi/3) & \sin(\theta_r + 4\pi/3) & \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \quad - \text{ матричний}$$

коефіцієнт.

Можна також використати більш простий і зручніший матричний вираз [42]:

$$M = z_p \mathbf{I}_r^T \mathbf{D} \Psi_r,$$

$$\text{де } \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \text{постійний матричний коефіцієнт.}$$

Рівняння руху ЕП на основі двигуна, ротор якого обертається, в якому не ураховано можливу наявність пружних сил, має вигляд [43]:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dJ}{d\theta} = M - M_C, \quad (6.10)$$

де  $J$  – сумарний момент інерції ЕМС, приведений до валу двигуна, який у загальному випадку є функцією кутового положення ротора  $\theta$ ;  $M_C$  – сумарний статичний момент навантаження, складається з власно моменту навантаження на валу двигуна і моменту сухого тертя тощо.

У випадках, коли момент інерції не є функцією кутового положення ротора, загальне рівняння руху (6.10) дещо спрощується і приймає вигляд:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_C.$$

Рівняння АД у фазних координатах описують процеси в асинхронній машині, дозволяючи при цьому не відходити від фізичної сутності цих процесів. За допомогою такої моделі можливе також якісне дослідження роботи АД за умов несиметрії АД або джерела живлення (штатна несиметрія або несиметричні режими), при живленні АД від неідеального джерела живлення (джерело несинусоїдної напруги).

Проте такій моделі властивий той недолік, що вона містить періодичні коефіцієнти у диференціальних рівняннях (насамперед, рівняння (6.2)), що робить неможливим аналітичне їх розв'язання і значно збільшує тривалість їх чисельного рішення.

### **6.1.2 Завдання**

Складіть структурну схему АД із короткозамкненим ротором у фазних координатах і виконайте моделювання за умови повної симетрії АД. Параметри АД взяти із табл.6.1 відповідно до номеру варіанта.

Промодельуйте прямий пуск АД, накид та скид номінального навантаження ( $M_C = M_H$ ). Встановіть, як впливає на перехідні процеси в АД вплив певного фактора (табл.6.2) і його величина. Промодельуйте режими динамічного гальмування АД, реверса (шляхом зміни порядку чергування фаз).

Таблиця 6.1 – Технічні данні асинхронних двигунів з короткозамкненим ротором  
серії МТК,  $U_{slе.н}=380 В$ ,  $f_{s,н}=50 Гц$

№	Тип	P <sub>н</sub> , кВт	n <sub>н</sub> , об/хв	I <sub>хх</sub> , А	Статор				Ротор			J, кг·м <sup>2</sup>
					R <sub>с</sub> , Ом	X <sub>сст</sub> , Ом	I <sub>стн</sub> , А	I <sub>стн</sub> , А	R <sub>т</sub> , Ом	X <sub>тст</sub> , Ом		
1	МТК011-6	1,4	870	3,2	3,93	4,8	2,9	8,41	3,80	0,02		
2	МТК012-6	2,2	875	4,6	2,58	7,2	4,5	5,7	2,63	0,028		
3	МТК-11-6	2,2	883	4,7	2,54	6,4	4,2	5,02	2,88	0,04		
4	МТК-12-6	3,5	875	6,8	1,61	9,6	6,85	3,36	1,92	0,063		
5	МТК111-6	3,5	870	6,1	2,03	10,1	7	3,33	1,46	0,046		
6	МТК-21-6	5,0	910	9,2	1,07	13,4	9,2	1,86	1,5	0,098		
7	МТК112-6	5,0	890	8,4	1,39	13,5	9,2	2,34	1,02	0,065		
8	МТК-22-6	7,5	905	12	0,74	19,3	13,6	1,33	1,07	0,138		
9	МТК-31-8	7,5	682	13,5	0,90	19,1	13,2	1,30	0,79	0,25		
10	МТК211-6	7,5	905	11,0	1,07	18,4	13,6	1,62	1,05	0,11		
11	МТКВ311-8	7,5	680	13,2	0,965	20	13,7	1,17	0,70	0,262		
12	МТК-31-6	11,0	920	16,2	0,47	26,4	19,2	0,82	0,71	0,25		

*Продовження таблиці б.1*

13	МТК-41-8	11,0	685	19,4	0,43	0,53	28,8	19,5	0,84	0,66	0,445
14	МТКВ311-6	11,0	910	15,7	0,54	0,575	26	19,5	0,73	0,64	0,212
15	МТКВ312-8	11,0	690	21,3	0,53	0,56	30,4	19,6	0,725	0,44	0,375
16	МТК-42-8	16,0	685	25,8	0,27	0,36	39,6	28,6	0,60	0,47	0,65
17	МТКВ312-6	16,0	905	19,8	0,33	0,41	37,8	28,6	0,52	0,47	0,3
18	МТКВ411-8	16,0	695	28,2	0,285	0,43	41	27,8	0,505	0,42	0,512
19	МТК-51-8	22,0	692	28,8	0,18	0,30	52,6	38,4	0,38	0,39	1,05
20	МТКВ411-6	22,0	935	29,7	0,19	0,31	50,0	37,0	0,355	0,375	0,475
21	МТКВ412-8	22,0	695	35,8	0,207	0,32	53,02	38,0	0,37	0,32	0,712
22	МТК-52-8	28,0	695	35,9	0,14	0,23	64,6	49,0	0,30	0,30	1,38
23	МТКВ511-8	28,0	700	40,0	0,123	0,245	68,0	49,1	0,27	0,235	0,975
24	МТКВ512-8	37,0	705	55,0	0,08	0,17	91,0	63,0	0,19	0,16	1,32

Таблиця 6.2 – Фактори, вплив яких на перехідні процеси необхідно простежити

№ вар.	Фактор	Примітка
1	Несиметрія обмоток статора	$R_{sA} \neq R_{sB} \neq R_{sC}$
2		$L_{AA\sigma} \neq L_{BB\sigma} \neq L_{CC\sigma}$
3	Несиметрія обмоток ротора	$R_{ra} \neq R_{rb} \neq R_{rc}$
4	Момент інерції є функцією кутового положення ротора	$J(\theta) = J_{cp}[1 + k_J \sin(k_\theta \theta)]$
5	Момент навантаження є функцією кутового положення ротора	$M_C(\theta) = M_{Ccp}[1 + k_M \sin(k_\theta \theta)]$
6	Несиметрія напруги живлення	$U_{sAm} \neq U_{sBm} \neq U_{sCm}$
7		$\varphi_{sA} \neq \varphi_{sB} \neq \varphi_{sC}$
8	Несинусоїдність напруги живлення (періодичність залишається незмінною)	Напруга прямокутна
9		Напруга полігармонічна

В усіх випадках отримуйте такі графіки:

- залежності амплітудних (або ефективних) значень струмів статора та ротора, електромагнітного моменту та швидкості АД в функції часу;
- залежності миттєвих значень напруги статора, струмів статора та ротора в функції часу.
- залежності амплітудних (ефективних) значень струмів статора та ротора, а також електромагнітного моменту в функції частоти обертання АД (динамічні характеристики).

### 6.1.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання роботи

Для підвищення зручності використання математичного опису АД в (6.2) позначимо

$$c_1 = \cos(\theta_r), \quad c_2 = \cos(\theta_r + 2\pi/3), \quad c_3 = \cos(\theta_r + 4\pi/3);$$

$$e_{ss} = 1 + \frac{3}{2} \sigma_s, \quad e_{rr} = 1 + \frac{3}{2} \sigma_r.$$

Тоді з урахуванням (6.3) – (6.9) рівняння (6.2) перетворимо до наступного вигляду:

$$\Psi_0 = L_0 I_0,$$

$$\text{де } \Psi_0 = \begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix}; \quad I_0 = \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix};$$



$$\mathbf{L}_0 = \frac{2}{3} \mathbf{L}_m \begin{bmatrix} e_{ss} & -1/2 & -1/2 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -1/2 & e_{ss} & -1/2 & c_3 & c_1 & c_2 \\ -1/2 & -1/2 & e_{ss} & c_2 & c_3 & c_1 \\ c_1 & c_3 & c_2 & e_{rr} & -1/2 & -1/2 \\ c_2 & c_1 & c_3 & -1/2 & e_{rr} & -1/2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & -1/2 & -1/2 & e_{rr} \end{bmatrix}.$$

Вирішуючи це матричне рівняння відносно об'єднаного вектору струмів

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{L}_0^{-1} \Psi_0, \quad (6.11)$$

можна визначати на кожному кроці чисельного інтегрування поточні значення фазних струмів статора і ротора.

Можливість багатьох блоків програми Simulink, зокрема блоку Integrator, обробляти векторні сигнали, дозволяє створити дуже компактну і наочну модель АД в трифазній системі координат. Цьому ж сприяє наявність у складі Simulink блоку Matlab Fcn бібліотеки Functions&Tables, що створює інтерфейс між MATLAB-функціями і додатком Simulink.

Структурна схема АД у фазних координатах, що побудована на основі рівнянь (6.1), (6.8), (6.11), зображена на рис.6.1.

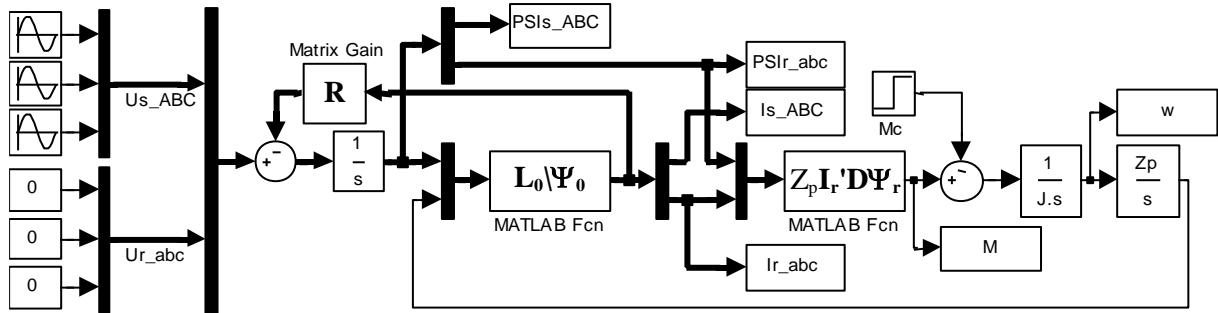


Рисунок 6.1 – Структурна схема АД у фазних координатах

Синусоїдні вхідні сигнали фазних напруг статора формуються джерелами синусоїдних сигналів Sine Wave бібліотеки Sources:

$$\left. \begin{aligned} u_{sA} &= U_{sAm} \sin(\omega_s t + \phi_{sA}); \\ u_{sB} &= U_{sBm} \sin(\omega_s t - 2\pi/3 + \phi_{sB}); \\ u_{sC} &= U_{sCm} \sin(\omega_s t + 2\pi/3 + \phi_{sC}), \end{aligned} \right\}$$

де  $U_{sAm}$ ,  $U_{sBm}$ ,  $U_{sCm}$  – амплітуди фазних напруг статора;  $\phi_{sA}$ ,  $\phi_{sB}$ ,  $\phi_{sC}$  – фазові кути фазних напруг статора;  $\omega_s$  – кутова частота напруги статора.

Для АД із короткозамкненим ротором фазні напруги ротора дорівнюють нулю:

$$u_{ra} = u_{rb} = u_{rc} = 0.$$

За умови повної симетрії напруги статора

$$U_{sAm} = U_{sBm} = U_{sCm} = U_{sfm}, \quad \phi_{sA} = \phi_{sB} = \phi_{sC} = \phi_{sf}.$$

У каталозі задані номінальна частота напруги статора ( $f_{s.H}$ , Гц) і ефективне (діюче) значення номінальної лінійної напруги статора ( $U_{sle.H}$ , В). За цими даними можна розрахувати номінальне ефективне і амплітудне значення напруги статора

$$U_{sfe.H} = \frac{U_{sle.H}}{\sqrt{3}}, \quad U_{sfm.H} = U_{sfe.H} \sqrt{2},$$

а також номінальну кутову частоту напруги статора  $\omega_{s.H} = 2\pi f_{s.H}$ .

На першому етапі виконання роботи амплітуду фазних напруг слід задати  $U_{sfm} = U_{sfm.H}$ , а фазовий кут  $\phi_{sf}$  обрати довільно.

Коефіцієнт блоку Matrix Gain відповідає клітинній матриці активних опорів в (6.1):

$$\mathbf{R} = \text{diag}([R_{sA} \quad R_{sB} \quad R_{sC} \quad R_{ra} \quad R_{rb} \quad R_{rc}]).$$

Об'єднання сигналів у вектори і поділ їх на окремі складові, виконується блоками `Mux` і `Demux` бібліотеки `Signals&Systems` відповідно.

Блоки `Matlab Function` використовуються для обчислення сигналів струмів за (6.11), а також для формування сигналу електромагнітного моменту. Для цього дослідником повинні бути написані власні функції, які, наприклад, можуть мати вигляд:

```
function Io = name1(u)
global Lm Ess Err
PSIo=u(1:6); tetar=u(7);
c1=cos(tetar);
c2=cos(tetar+2*pi/3);
c3=cos(tetar+4*pi/3);
L=[Ess -1/2 -1/2 c1 c2 c3;
  -1/2 Ess -1/2 c3 c1 c2;
  -1/2 -1/2 Ess c2 c3 c1;
  c1 c3 c2 Err -1/2 -1/2;
  c2 c1 c3 -1/2 Err -1/2;
  c3 c2 c1 -1/2 -1/2 Err];
L=2/3*Lm*L; PSIo=PSIo(:);
Io=L\PSIo;
```

```
function M_em = name2(u)
global Zp Lm
u=u(:)';
D=[0 1 -1; -1 0 1; 1 -1 0];
PSIr=u(1:3)';
Ir=u(4:6);
M_em=Zp*Ir*D*PSIr/sqrt(3);
```

Ці функції необхідно зберегти в m-файлах під іменами, що збігаються з іменами функцій `name1.m` і `name2.m`, і зробити посилання на

них у вікнах параметрів блоку. Для прикладу на рис.6.2 показано вікно введення параметрів блоку Matlab Fcn. У полі Output width вказується розмір вихідного параметру.

Аргументи функцій відповідають вхідним сигналам ланки, а результати – вихідним.

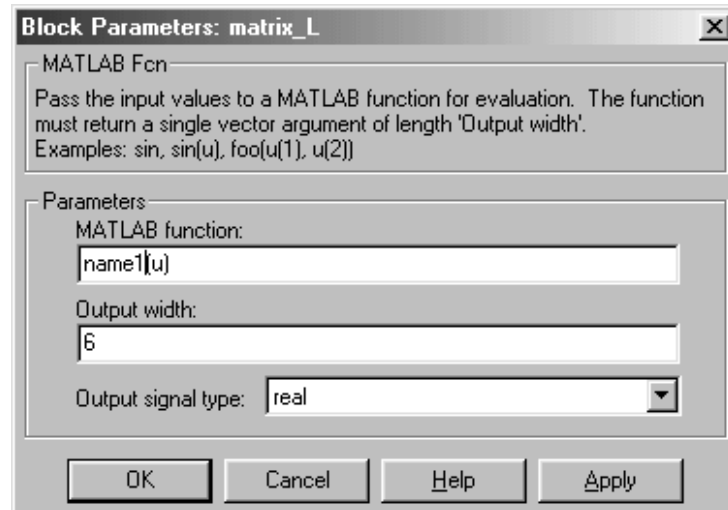


Рисунок 6.2 – Вікно для введення параметрів блоку MATLAB Fcn

Перед початком виконання роботи також слід скласти Script-файл з параметрами двигуна.

Окрім паспортних даних цей файл повинен містити розрахунок додаткових параметрів, а також об'явлення глобальних змінних  $L_m$ ,  $Z_p$ ,  $e_{ss}$ ,  $e_{rr}$ .

Для розрахунку додаткових параметрів двигуна слід використовувати наступні формули:

$$X_m = \frac{U_{sfe.H} - I_{xx} \sqrt{R_s^2 + X_{s\sigma}^2}}{I_{xx}}; L_m = \frac{X_m}{\omega_{s.H}}; \sigma_s = \frac{X_{s\sigma}}{X_m}; \sigma_r = \frac{X_{r\sigma}}{X_m};$$

$$n_0 = \frac{3000}{Z_p}, s_H = \frac{n_0 - n_H}{n_H}, \omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60}, \omega_H = \omega_0(1 - s_H), M_H = \frac{P_H}{\omega_H},$$

де  $I_{xx}$  – струм статора у режимі холостого ходу,  $n_0$ ,  $s_H$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_H$  – ,  $M_H$  – номінальний момент.

Амплітудні значення електромагнітних величин можуть бути виражені через миттєві фазні значення за формулою

$$Y_{fm} = \sqrt{Y_A^2 + Y_B^2 + Y_C^2},$$

обчислення за якою доцільно реалізувати за допомогою блоку Fcn бібліотеки Functions&Tables, вікно параметрів якого зображене на рис.6.3.

При дослідження випадків несиметрії параметри потрібних блоків змінюються відповідно до мети досліджень.

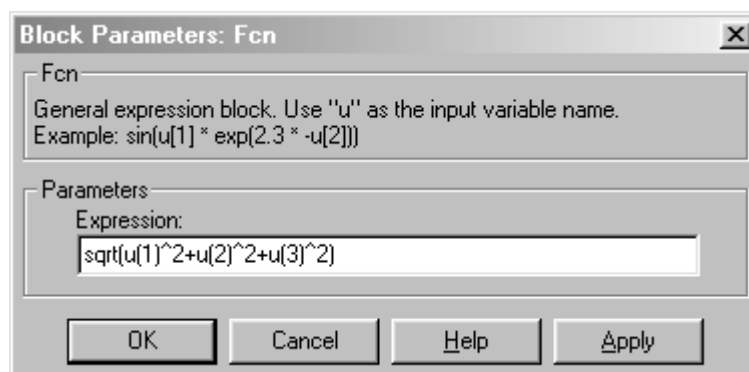


Рисунок 6.3 – Вікно параметрів блоку Fcn

Для дослідження впливу несинусоїдності напруги на перехідні процеси в моделі можна або замінити джерела напруг на будь-які інші, використовуючи блоки бібліотеки Sources (наприклад, на генератори прямокутних імпульсів Pulse Generator), або сформувати сигнали напруги як суми гармонічних складових з відповідними коефіцієнтами (при полігармонічному живленні).

У випадку необхідності дослідження впливу навантаження, що періодично змінюється в функції кута повороту ротора, такий сигнал моменту статичного опору формується за допомогою блоку Fcn.

У випадку ж, коли момент інерції є функцією кутового положення ротора, у моделі слід замінити вузол електромеханічного перетворення на такий, що відповідає рівнянню (6.10) (рис.6.4).

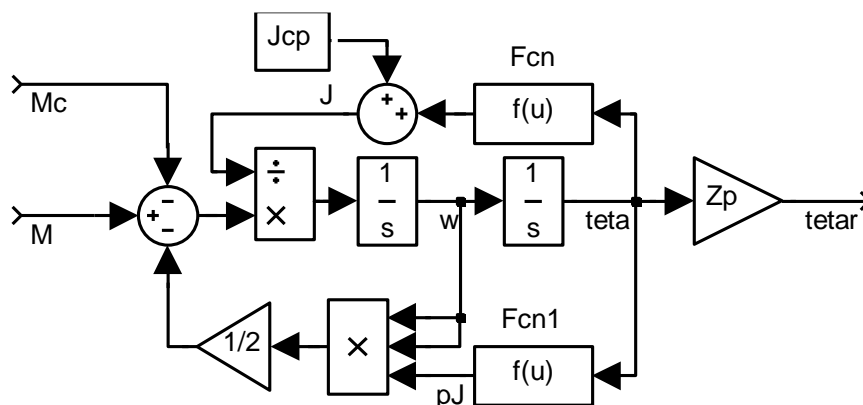


Рисунок 6.4 – Підсистема електромеханічного перетворення енергії у випадку  $J = f(\theta)$

При цьому сигнал  $dJ/d\theta$  рекомендується попередньо обчислити аналітично, якщо це можливо, якщо ні – використати тотожне (6.10) рівняння руху:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega \frac{dJ}{dt} = M - M_C,$$

і скористатися блоком Derivative бібліотеки Continuous.

Для дослідження режиму динамічного гальмування АД треба в момент початку гальмування напругу однієї з фаз статора зробити рівною нулю, а на дві інші фази подати постійні за значенням та протилежні за знаком сигнали, наприклад,

$$u_{sA} = U_{sfe.H}/2, u_{sB} = -U_{sfe.H}/2, u_{sC} = 0.$$

Це може бути зроблено за допомогою ланок Switch бібліотеки Nonlinear.

Для дослідження режиму реверса в момент початку реверса слід аналогічним чином змінити порядок чергування фаз (наприклад, з ABC на ACB), помінявши місцями відповідні сигнали фазних напруг статора.

## 6.2 Моделювання координатних перетворювачів

### 6.2.1 Загальні відомості

Для спрощення математичного опису машин змінного струму дуже часто прибігають до еквівалентного перетворення координат, в основі якого лежить припущення про повну симетрію електричної машини, а також поняття узагальненого вектора.

Розглянемо трифазну систему координатних осей, нерухому в просторі (рис. 6.5). З центра системи координат проведемо вектор струму статора  $\tilde{I}_s$  такий, що його проєкції на осі А, В та С дорівнюють миттєвим значенням струму відповідних фаз статора.

При обертанні вектора  $\tilde{I}_s$  з кутовою швидкістю  $\omega_s = \frac{d\theta_s}{dt}$  відносно фазної системи координат статора А,В,С його проєкції на координатні осі будуть дорівнювати:

$$\left. \begin{aligned} i_{sA} &= I_{sfm} \sin(\theta_s); \\ i_{sB} &= I_{sfm} \sin(\theta_s - 2\pi/3); \\ i_{sC} &= I_{sfm} \sin(\theta_s + 2\pi/3), \end{aligned} \right\}$$

де  $I_{sfm}$  – амплітуда фазного струму статора,  $\theta_s$  – кут між вектором  $\tilde{I}_s$  і віссю А статора.

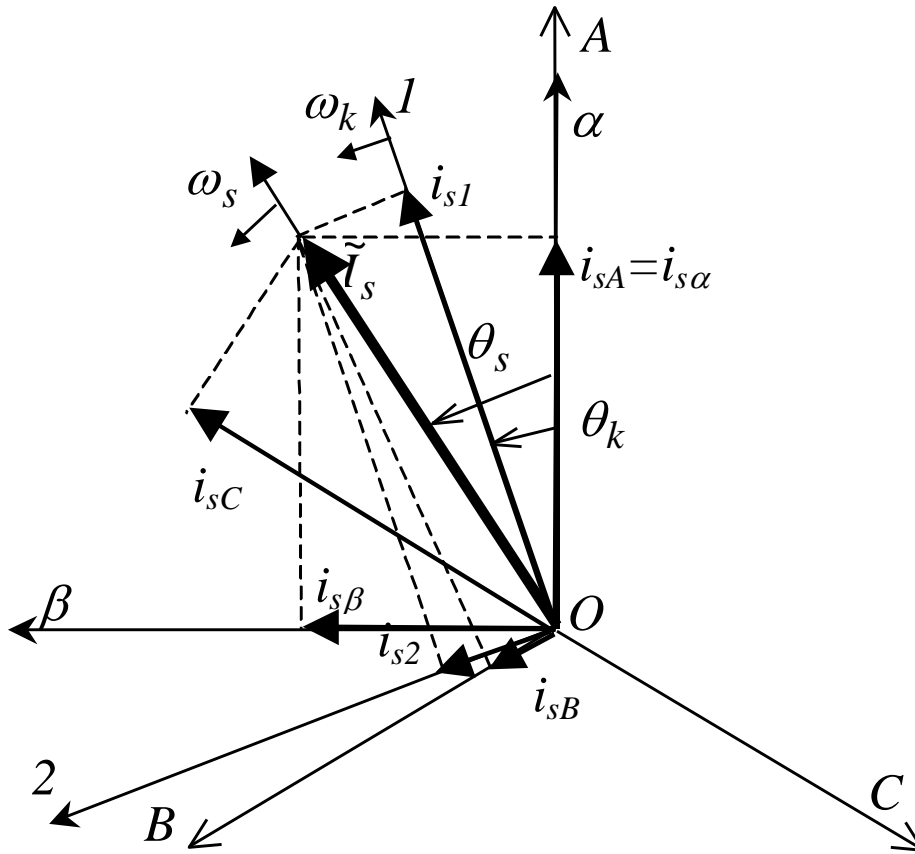


Рисунок 6.5 – Трифазна система координатних осей

Таким чином, за допомогою одного вектора, який обертається, можливо представити симетричні синусоїдні сигнали усіх трьох фаз статора.

Цей вектор називають узагальненим. Узагальнений вектор  $\tilde{\mathbf{I}}_s$  пов'язаний із значеннями фазних струмів виразом:

$$\tilde{\mathbf{I}}_s = \frac{2}{3} \left( i_{sA} + \bar{a} \cdot i_{sB} + a^{-2} \cdot i_{sC} \right) = \frac{2}{3} \mathbf{a} \mathbf{I}_s, \quad (6.12)$$

де  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & a^{-2} \end{bmatrix}$  – вектор комплексних ортів;  $\bar{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $a^{-2} = e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Аналогічним чином вводяться інші узагальнені вектори електромагнітних величин – напруг, струмів, потокозчеплень – статора і ротора. В останньому випадку узагальнені вектори вводяться у трифазній системі координат a, b, c ротора.

Обертання узагальненого вектора відбувається в одній площині, тому стає зрозумілим, що трифазна система координат є надмірною, і

більш доцільним є використання ортогональної двофазної системи координат.

Введемо ортогональну систему координат статора  $\alpha, \beta$  (рис.6.5), одна вісь якої (наприклад,  $\alpha$ ) співпадає з віссю А для сигналів статора, а інша ( $\beta$ ) є ортогональною до неї (поверненою кут  $90^\circ$  проти годинникової стрілки).

Така система координат зветься стаціонарною (нерухомою) ортогональною системою координат статора, оскільки вона, як і система координат А,В,С, є нерухомою відносно статора. Для зручності проєкції електромагнітних величин на одну з осей (наприклад,  $\alpha$ ) умовно вважаються дійсними складовими, на іншу ( $\beta$ ) – уявними. Таким чином, узагальнений вектор, наприклад, струму статора у нерухомій ортогональній системі координат може бути представлений у комплексному вигляді

$$\tilde{I}_{s\_ \alpha\beta} = i_{s\alpha} + j i_{s\beta} = I_{s\text{fm}} (\cos \theta_s + j \sin \theta_s) = I_{s\text{fm}} e^{j\theta_s} .$$

Таким же чином може бути представлений, наприклад, узагальнений вектор струму ротора у нерухомій ортогональній системі координат ротора  $u, v$ .

У нерухомих системах координат сигнали є гармонічними і змінюються з частотами, що дорівнюють таким у природних трифазних системах координат: так, сигнали статора змінюються з кутовою частотою джерела  $\omega_s$ , а ротора – з кутовою частотою ковзання  $s\omega_s = \omega_s - \omega_r$ .

Якщо ввести ортогональну систему координат 1,2 (рис.6.5), яка обертається з довільною швидкістю  $\omega_k$  відносно нерухомої, одну з осей (1) визначити як дійсну, а іншу (2) – як уявну, то узагальнений вектор (6.12) можна представити у вигляді:

$$\tilde{I}_{s\_ 12} = i_{s1} + j i_{s2} = (i_{s\alpha} + j i_{s\beta}) (\cos \theta_k - j \sin \theta_k) = \tilde{I}_{s\_ \alpha\beta} e^{-j\theta_k} .$$

Легко побачити, що зворотне перетворення виконується за формулою

$$\tilde{I}_{s\_ \alpha\beta} = \tilde{I}_{s\_ 12} e^{j\theta_k} .$$

Таким чином, положення системи координат 1,2 відносно нерухомої  $\alpha, \beta$  статора визначається кутом

$$\theta_k = \theta_{k0} + \int \omega_k dt , \quad (6.13)$$

де  $\theta_{k0}$  – початкове значення кута між системами координат. У той же час положення ротора відносно статора визначається кутом  $\theta_r$ , який визначається за формулою:

$$\theta_r = \theta_{r0} + \int \omega_r dt = z_p (\theta_0 + \int \omega dt),$$

що визначає положення ротора відносно статора, приведеного до числа полюсів статора між осями фаз А статора і а ротора:

$$\left. \begin{aligned} L_{Aa} = L_{Bb} = L_{Cc} = L_{aA} = L_{bB} = L_{cC} = L_h \cos(\theta_r); \\ L_{Ab} = L_{Bc} = L_{Ca} = L_{bA} = L_{cB} = L_{aC} = L_h \cos(\theta_r + 2\pi/3); \\ L_{Ac} = L_{Ba} = L_{Cb} = L_{cA} = L_{aB} = L_{bC} = L_h \cos(\theta_r + 4\pi/3). \end{aligned} \right\}$$

У цій формулі  $\theta_{r0} = z_p \theta_0$  – початкове значення кута повороту ротора, приведене до числа полюсів статора, ел. рад;  $\omega_r = z_p \omega$  – кутова швидкість обертання ротора, приведена до числа полюсів статора, ел. рад;  $\theta$ ,  $\omega$  – дійсні значення величин, геом. рад.

Не важко побачити, що кут, який характеризує положення системи координат 1,2 відносно нерухомої  $u, v$  ротора, буде дорівнювати

$$\theta_k - \theta_r = \theta_{k0} - \theta_{r0} + \int (\omega_k - \omega_r) dt,$$

а вираз, наприклад, для вектора струму ротора у системі координат 1,2 буде мати такий вигляд:

$$\tilde{I}_{r_{12}} = i_{r1} + j i_{r2} = \tilde{I}_{r_{uv}} e^{-j(\theta_k - \theta_r)}. \quad (6.14)$$

Викладене є справедливим також і для векторів напруг і потокозчеплень статора і ротора.

Аналізуючи (6.14), можна зробити загальний висновок про те, що для перетворення векторів від однієї довільної системи координат достатньо знати кутове положення систем координат одна відносно одної.

З викладеного витікає такий важливий висновок, що частота зміни початкового гармонічного (у нерухомій системі координат) сигналу обмотки, перетвореного до системи координат, що обертається відносно цієї обмотки з кутовою швидкістю  $\omega_k$ , становитиме  $\omega_s - \omega_k$  для статора, і  $\omega_s - \omega_r - \omega_k$  для ротора АД.



### 6.2.2 Завдання

1 Розробіть структурні схеми наступних перетворювачів координат:

- від нерухомої трифазної системи координат до нерухомої ортогональної (перетворювач 3→2);
- від нерухомої ортогональної системи координат до ортогональної, що обертається із кутовою швидкістю  $\omega_k$  (перетворювач 2→2);
- від ортогональної системи координат, що обертається із кутовою швидкістю  $\omega_k$ , до нерухомої ортогональної (перетворювач 2→2);
- від нерухомої ортогональної системи координат до нерухомої трифазної (перетворювач 2→3).

2 Складіть модель послідовного перетворення вхідного сигналу напруги статора у трифазній системі координат

$$\left. \begin{aligned} u_{sA} &= U_{s\text{fm}} \sin(\omega_s t + \phi_s); \\ u_{sB} &= U_{s\text{fm}} \sin(\omega_s t - 2\pi/3 + \phi_s); \\ u_{sC} &= U_{s\text{fm}} \sin(\omega_s t + 2\pi/3 + \phi_s). \end{aligned} \right\}$$

до обертової системи координат 1,2 і назад, використовуючи усі розроблені координатні перетворювачів. Значення  $U_{s\text{fm}}$ ,  $\omega_s$  оберіть рівними відповідним номінальним величинам із завдання, значення  $\phi_s$  оберіть довільно. Значення кута  $\theta_k$  обчислюйте за (6.13), його початкове значення  $\theta_{k0}$  оберіть довільно. Значення, що обираються довільно можна прийняти рівними нулю.

3 Моделювання виконайте тричі при різних законах змінювання  $\omega_k$  в функції часу: 1)  $\omega_k = \omega_{s,H} = \text{const}$ , де  $\omega_{s,H} = 314,1 \text{ c}^{-1}$ ; 2)  $\omega_k = N \cdot t$ ; 3)  $\omega_k = N \sin \omega_s t$ , де  $N$  – число з вашого варіанту.

У кожному випадку впевніться у тотожності початкових і кінцевих сигналів. У роботі навести сигнали у системі координат А,В,С і  $\alpha,\beta$ , а також (для кожного випадку) сигнали у системі координат 1,2 і частоту обертання останньої  $\omega_k$  в функції часу.

### 6.2.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання роботи

1 Для створення маскованої підсистеми слід виділити необхідну частину системи, а потім визвавши контекстне меню обрати Create Subsystem.

2 Внаслідок складності структурних схем, що використовуються при моделюванні трифазних двигунів, назви блоків, значення яких зрозумілі з їхнього зображення, можна сховати, викликавши контекстне меню для блока Format → Hide Name.

3 На практиці найбільш поширеним є саме двоступінчате перетворення координат у кожному напрямку. Формули координатних перетворень можуть бути отримані із аналізу рис.6.5.

Так, перетворення 3→2 може бути виконано за наступними формулами:

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= u_{sA}; \\ u_{s\beta} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u_{sB} - u_{sC}). \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Перетворення 2→2:

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= u_{s\alpha} \cos\theta_k + u_{s\beta} \sin\theta_k; \\ u_{s2} &= -u_{s\alpha} \sin\theta_k + u_{s\beta} \cos\theta_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Зворотне перетворення 2→2:

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= u_{s1} \cos\theta_k - u_{s2} \sin\theta_k; \\ u_{s\beta} &= u_{s1} \sin\theta_k + u_{s2} \cos\theta_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Перетворення 2→3:

$$\left. \begin{aligned} u_{sA} &= u_{s\alpha}; \\ u_{sB} &= -\frac{1}{2}u_{s\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}u_{s\beta}; \\ u_{sC} &= -\frac{1}{2}u_{s\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2}u_{s\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

4 Для перетворення сигналів ротора у формулах (6.16) і (6.17) замість кута  $\theta_k$  використовують кут  $\theta_k - \theta_r$ , де  $\theta_r$  – кут між осями фаз А статора і а ротора.

5 При моделюванні можливі різні підходи до складання структурних схем координатних перетворювачів: матричне перетворення, перетворення комплексних величин і безпосереднє обчислення за (6.15) – (6.18). Саме останній підхід найчастіше реалізується у реальних САК.

Структурні схеми перетворювачів координат, складені за формулами (6.15) – (6.18), наведені на рис.6.6., а на рис. 6.7 – їхнє представлення у MATLAB Simulink.

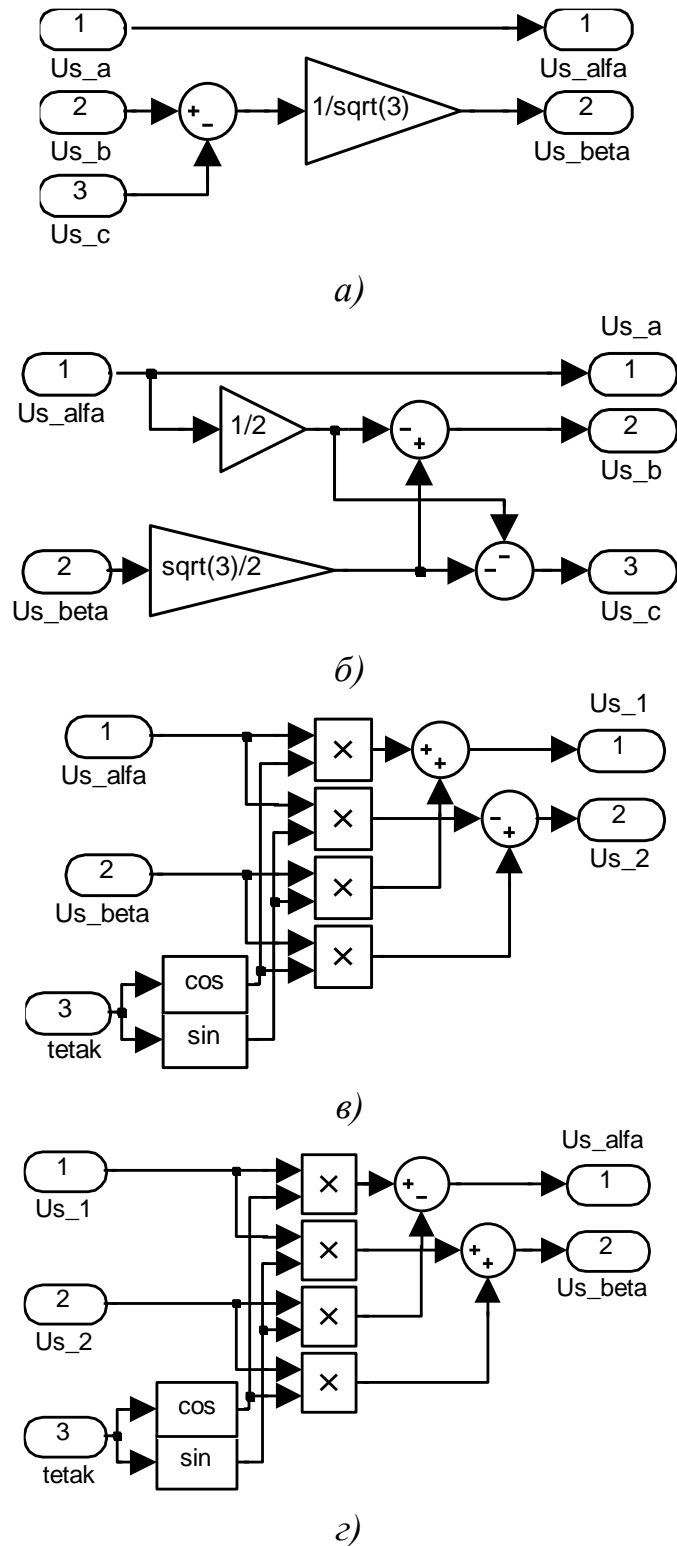


Рисунок 6.6 – Структурні схеми координатних перетворювачів:  
 а –  $3 \rightarrow 2$ ; б –  $2 \rightarrow 3$ ; в –  $2 \rightarrow 2$ ; з –  $2 \rightarrow 2$  (зворотній)

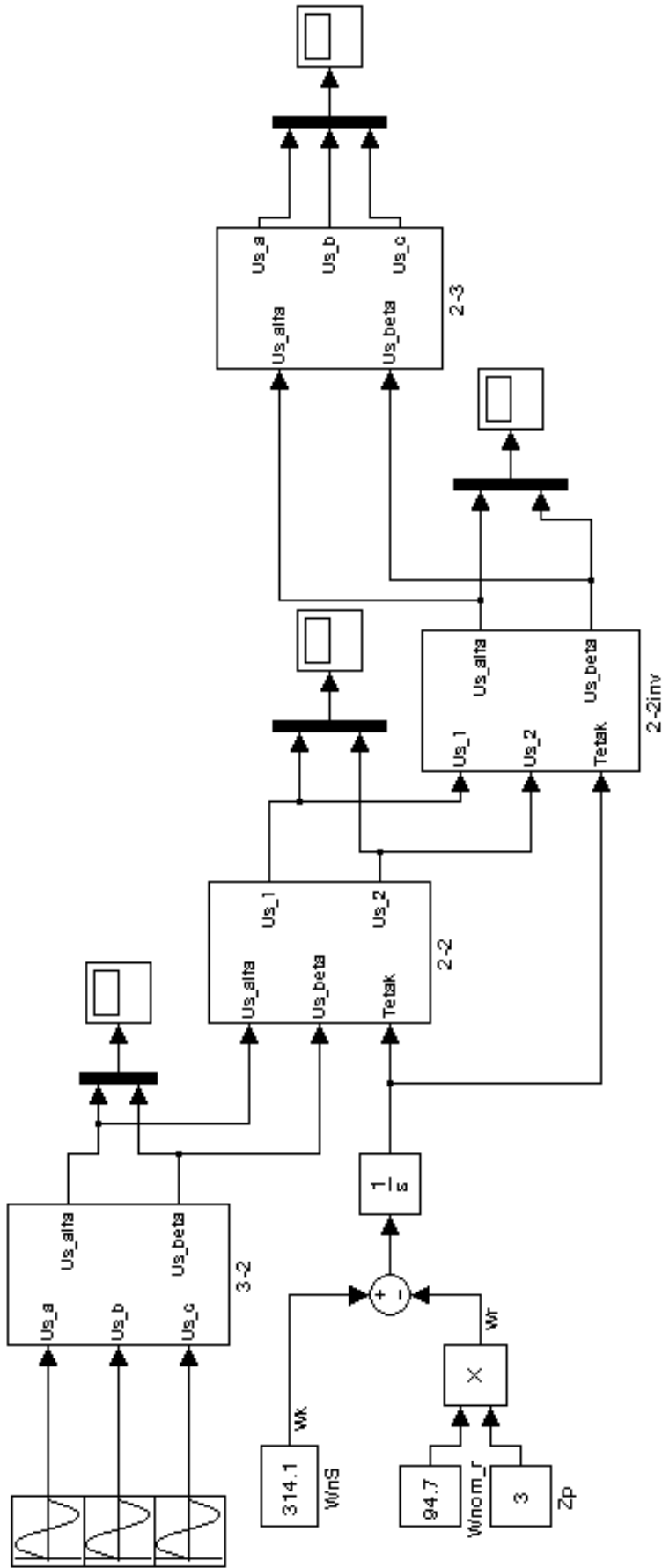


Рисунок 6.7 – Структурна схема послідовного перетворення координат

## 6.3 Моделювання асинхронної машини в ортогональній системі координат

### 6.3.1 Загальні відомості

Метою моделювання АД в ортогональних двофазних координатах є створення моделі АД, еквівалентної за своїми основними властивостями об'єкту і його моделі у фазних координатах, котра у той же час є більш простою, і тому більш зручною у моделюванні і придатною до синтезу ефективних алгоритмів управління АД.

Напруга статора та ротора у трифазній системі координат може бути представлена системою з двох векторних диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_s &= R_s \tilde{I}_s + \frac{d\tilde{\Psi}_s}{dt}; \\ \tilde{U}_r &= R_r \tilde{I}_r + \frac{d\tilde{\Psi}_r}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Для того, щоб ці рівняння можливо було розв'язати разом, їх треба записати в одній системі координат 1,2, кутове положення якої відносно статора характеризується довільним кутом  $\theta_k$ , а відносно ротора – кутом  $\theta_k - \theta_r$ .

Таким чином, усі вектори необхідно записати у новій системі координат. Для цього слід перше рівняння (6.19) помножити на  $e^{-j\theta_k}$ , а друге – на  $e^{-j(\theta_k - \theta_r)}$ . В результаті можна отримати рівняння балансу напруг статора і ротора еквівалентної двофазної асинхронної машини в системі координат, що обертається відносно стаціонарної системи координат статора з довільною кутовою швидкістю  $\omega_k$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_s &= R_s \tilde{I}_s + \frac{d\tilde{\Psi}_s}{dt} + j\omega_k \tilde{\Psi}_s; \\ \tilde{U}_r &= R_r \tilde{I}_r + \frac{d\tilde{\Psi}_r}{dt} + j(\omega_k - \omega_r) \tilde{\Psi}_r, \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

де  $j\omega_k \tilde{\Psi}_s$  і  $j\omega_k \tilde{\Psi}_r$  – ЕРС обертання в рівняннях для відповідних обмоток, які пропорційні швидкості обертання  $\omega_k$ ;  $-j\omega_r \tilde{\Psi}_r$  – ЕРС обертання ротора, яка пропорційна приведеній кутовій швидкості ротора відносно електромагнітного поля статора  $\omega_r$ .

Для розв'язання системи (6.20) недостає рівнянь, які б зв'язували між собою значення струмів та потокозчеплень. Вказані рівняння можна

отримати, якщо використати рівняння взаємних індуктивностей статора та ротора (6.9)

Підставимо значення косинусів кутів у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_r &= \frac{e^{j\theta_r} + e^{-j\theta_r}}{2}; \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{e^{j\theta_r} \bar{a} + e^{-j\theta_r} \bar{a}^{-2}}{2}; \\ \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{e^{j\theta_r} \bar{a}^{-2} + e^{-j\theta_r} \bar{a}}{2}. \end{aligned} \right\}$$

У векторній формі одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}_s &= L_s \tilde{I}_s + L_m \tilde{I}_r; \\ \tilde{\Psi}_r &= L_m \tilde{I}_s + L_r \tilde{I}_r, \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

де  $L_s = L_m + L_{s\sigma}$ ,  $L_r = L_m + L_{r\sigma}$  – повні індуктивності відповідно фаз статора і ротора еквівалентної двофазної машини,  $L_{s\sigma}$ ,  $L_{r\sigma}$  – індуктивності розсіювання.

Крім того, для еквівалентної машини справедливим є наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}_s &= \tilde{\Psi}_m + L_{s\sigma} \tilde{I}_s; \\ \tilde{\Psi}_r &= \tilde{\Psi}_m + L_{r\sigma} \tilde{I}_r, \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

де  $\tilde{\Psi}_m = L_m \tilde{I}_m$  – вектор потокозчеплення від головного магнітного потоку (потокозчеплення у повітряному зазорі);

$\tilde{I}_m = \tilde{I}_s + \tilde{I}_r$  – вектор струму намагнічування.

Рівняння (6.20) – (6.22) мають назву рівнянь Парка-Горєва, і перетворення, за допомогою яких вони отримані – перетворенням Парка-Горєва.

Електромагнітний момент еквівалентної машини обчислюється за формулами:

$$M = \frac{3}{2} z_p \operatorname{Im} \left[ \tilde{\Psi}_s^* \cdot \tilde{I}_s \right], \quad (6.23)$$

або

$$M = \frac{3}{2} z_p \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}_r \cdot \tilde{I}_r^*].$$

Використовуючи (6.21), (6.22), із рівняння (6.23), електромагнітний момент можна виразити через будь-які вектори.

Розглянуті рівняння (6.20)...(6.22), доповнені одним з рівнянь обчислення електромагнітного моменту та рівнянням руху, представляють собою математичний опис узагальненої асинхронної машини в ортогональній системі координат, яка обертається відносно нерухомої з довільною кутовою швидкістю  $\omega_k$ . Слід підкреслити, що тут усі електромагнітні величини (як статора, так і ротора) представлені у одній і тій же системі координат, тому характер їх змінювання аналогічний.

При будь-якій швидкості обертання системи координат модель дозволяє досліджувати процеси при пуску (гальмуванні) двигуна, накиді (скиді) навантаження, а також отримати динамічні і статичні характеристики двигуна.

При математичному моделюванні асинхронних машин та при проектуванні систем ЕП на їх основі використовуються ортогональні системи координат, які відрізняються одна від одної частотою обертання відносно нерухомої статора. Окремо виділяють орієнтовані системи координат, коли одна з осей системи координат суміщається із просторовим положенням одного з векторів електромагнітних величин (який називають базисом або опорним вектором); принципово базисом може бути будь-який з векторів напруг, потокозчеплень та струмів статора, ротора та намагнічування відповідно (тобто  $\tilde{U}_s, \tilde{U}_m, \tilde{U}_r, \tilde{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_m, \tilde{\Psi}_r, \tilde{I}_s, \tilde{I}_m$  або  $\tilde{I}_r$ ).

Так, швидкість обертання системи координат може, між іншим, дорівнювати:

- $\omega_k = 0$  – система координат  $\alpha, \beta$ , нерухома відносно статора;
- $\omega_k = \omega_r$  – система координат  $u, v$ , нерухома відносно ротора;
- $\omega_k = \omega_s$  – синхронна система координат  $x, y$ , що обертається зі швидкістю узагальненого вектора величини статора, що визначає живлення машини.

Стаціонарна система координат статора  $\alpha, \beta$  і ротора  $u, v$  є найбільш близькими до моделі АД у фазних координатах, тому використовуються як альтернатива моделі у фазних координатах, маючи таку основну перевагу, як більша простота, при аналізі миттєвих значень електромагнітних величин відповідно статора і ротора.

Синхронна система координат  $x, y$  більше спрямована на аналіз амплітудних (або ефективних) значень електромагнітних величин статора і

ротора в системах скалярного (параметричного, частотного) управління АД.

Орієнтовані системи координат використовуються, як правило, за необхідності організації векторного управління за певною електромагнітною відповідною величиною АД.

Сучасні засоби математичного моделювання, зокрема MATLAB, в принципі, дозволяють виконати безпосереднє математичне моделювання за рівняннями Парка-Горєва. Проте використання таких математичних моделей АД має рацію лише при дослідженні режимів роботи власно двигуна (в окремих випадках – простіших систем управління), але при проектуванні, синтезі і аналізі САК асинхронним ЕП не є доцільним, тому що не узгоджується із сучасними алгоритмами управління.

Тому найчастіше використовується перетворення рівнянь Парка-Горєва до вигляду, зручного при моделюванні, при якому усі вектори представляються у вигляді сум їхніх дійсних і уявних складових. Наприклад, вектор напруги статора слід представити у вигляді:

$$\tilde{U}_s = u_{s1} + ju_{s2},$$

Аналогічні вирази для струмів і потокозчеплень мають бути підставлені у (6.20) – (6.22), які після відокремлення рівнянь для дійсних і уявних складових векторів набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= R_s i_{s1} + p\psi_{s1} - \omega_k \psi_{s2}; \\ u_{s2} &= R_s i_{s2} + p\psi_{s2} + \omega_k \psi_{s1}; \\ u_{r1} &= R_r i_{r1} + p\psi_{r1} - (\omega_k - \omega_r) \psi_{r2}; \\ u_{r2} &= R_r i_{r2} + p\psi_{r2} + (\omega_k - \omega_r) \psi_{r1}; \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{s1} &= L_s i_{s1} + L_m i_{r1}; & \psi_{s2} &= L_s i_{s2} + L_m i_{r2}; \\ \psi_{r1} &= L_m i_{s1} + L_r i_{r1}; & \psi_{r2} &= L_m i_{s2} + L_r i_{r2}; \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{s1} &= \psi_{m1} + L_{s\sigma} i_{s1}; & \psi_{s2} &= \psi_{m2} + L_{s\sigma} i_{s2}; \\ \psi_{r1} &= \psi_{m1} + L_{r\sigma} i_{r1}; & \psi_{r2} &= \psi_{m2} + L_{r\sigma} i_{r2}; \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

де  $p = d/dt$  – символ диференціювання.

Із (6.23), з урахуванням (6.25), (6.26) можуть бути отримані декілька рівнянь електромагнітного моменту (табл. 6.3), де позначено:

$$k_s = \frac{L_m}{L_s} = \frac{1}{1 + \sigma_s}, \quad k_r = \frac{L_m}{L_r} = \frac{1}{1 + \sigma_r} \quad \text{– коефіцієнти електромагнітного зв'язку}$$



відповідно статора і ротора;  $\sigma_s = \frac{L_{s\sigma}}{L_m} = \frac{2 L_{s\sigma}}{3 L_h}$ ,  $\sigma_r = \frac{L_{r\sigma}}{L_m} = \frac{2 L_{r\sigma}}{3 L_h}$  –

коефіцієнти розсіяння статора і ротора відповідно.

Рівняння руху АД може бути представлено у вигляді:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{Z_p}{J} (M - M_C). \quad (6.27)$$

Рівняння (6.24) – (6.27) та будь-яке з рівнянь табл. 6.1 представляють собою узагальнений математичний опис асинхронної машини, записаний через складові узагальнених векторів, і дозволяють досліджувати режими роботи АД від ідеалізованого джерела напруги. Тому відповідна структурна модель має назву напругової, оскільки у склад керуючих сигналів входять складові напруг статора (і ротора).

Рівняння (6.24) – (6.27) можуть бути використані безпосередньо для побудовання структурної схеми АД. Вона може бути використана при дослідженні режимів роботи власно АД.

В загальному випадку для завдання сигналів напруги статора слід скористатися формулами перетворення координат.

Рівняння табл. 6.3 свідчать про те, що сигнал електромагнітного моменту є функцією лише двох змінних. Таким чином, рівняння (6.24) після послідовного виключення змінних за допомогою (6.25), (6.26) можуть бути приведені до вигляду, в якому будуть фігурувати складові двох векторів. Ці вектори визначають структуру моделі двигуна, і їх складові беруть участь у формуванні електромагнітного моменту. Обрання векторів, що визначають структуру моделі, слід виконувати, виходячи з необхідності регулювання та (або) дослідження відповідних величин.

Слід відзначити, що, в принципі, модель АД може бути складена так, що там будуть фігурувати складові лише одного вектора, і навіть так, що сигнал електромагнітного моменту буде визначатись лише за відомим вхідними сигналами складових напруги статора, але з оглядом на суттєву не лінійність АД така структура не зможе бути використана для синтезу високодинамічних систем асинхронного ЕП і вирішення задачі сукупного управління електромагнітним моментом і швидкістю АД.

Виходячи з цього, структура моделі може бути визначена будь-якою з комбінацій векторів струмів і потокозчеплень, крім комбінації  $\tilde{I}_m$ ,  $\tilde{\Psi}_m$ , оскільки ці змінні є лінійно залежними (табл. 6.3).

Таблиця 6.3 – Вирази електромагнітних моментів АД

$M = \frac{3}{2} Z p \times$	$\tilde{I}_s$	$\tilde{I}_m$	$\tilde{I}_r$	$\tilde{\Psi}_s$	$\tilde{\Psi}_m$	$\tilde{\Psi}_r$
$\tilde{I}_s$	—	$L_m(i_{m1}i_{s2} - i_{m2}i_{s1})$	$L_m(i_{s2}i_{r1} - i_{s1}i_{r2})$	$\psi_{s1}i_{s2} - \psi_{s2}i_{s1}$	$\psi_{m1}i_{s2} - \psi_{m2}i_{s1}$	$k_r(\psi_{r1}i_{s2} - \psi_{r2}i_{s1})$
$\tilde{I}_m$	—	—	$L_m(i_{m2}i_{r1} - i_{m1}i_{r2})$	$\frac{1}{\sigma_s}(\psi_{s2}i_{m1} - \psi_{s1}i_{m2})$	—	$\frac{1}{\sigma_r}(\psi_{r1}i_{m2} - \psi_{r2}i_{m1})$
$\tilde{I}_r$	—	—	—	$k_s(\psi_{s2}i_{r1} - \psi_{s1}i_{r2})$	$\psi_{m2}i_{r1} - \psi_{m1}i_{r2}$	$\psi_{r2}i_{r1} - \psi_{r1}i_{r2}$
$\tilde{\Psi}_s$	—	—	—	—	$\frac{1}{L_{s\sigma}}(\psi_{s2}\psi_{m1} - \psi_{s1}\psi_{m2})$	$\frac{k_r}{\sigma L_s}(\psi_{s2}\psi_{r1} - \psi_{s1}\psi_{r2})$
$\tilde{\Psi}_m$	—	—	—	—	—	$\frac{1}{L_{r\sigma}}(\psi_{r1}\psi_{m2} - \psi_{r2}\psi_{m1})$
$\tilde{\Psi}_r$	—	—	—	—	—	—

Серед інших найбільш поширеними є такі структури моделей (комбінації векторів у кожному випадку перераховані в порядку зменшення розповсюженості використання), які використовуються при проектуванні і дослідженні певних систем управління:

- $\tilde{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_r$  або  $\tilde{I}_s, \tilde{I}_r$  – використовується при дослідженні власно АД, можливо, з простою системою керування; перший варіант структури дозволяє побудувати найефективнішу (з позиції відсутності алгебраїчних петель і малої тривалості чисельних обчислень) модель АД;

- $\tilde{I}_s, \tilde{\Psi}_s$ , або  $\tilde{I}_s, \tilde{\Psi}_r$ , або  $\tilde{I}_s, \tilde{\Psi}_m$ , або  $\tilde{I}_s, \tilde{I}_m$  – використовуються в системах скалярного і векторного управління АД з боку статора;

- $\tilde{I}_r, \tilde{\Psi}_s$ , або  $\tilde{I}_r, \tilde{\Psi}_r$ , або  $\tilde{I}_r, \tilde{\Psi}_m$ , або  $\tilde{I}_r, \tilde{I}_m$  – використовуються в системах скалярного і векторного управління АД з боку ротора.

- Структури  $\tilde{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_m; \tilde{\Psi}_r, \tilde{\Psi}_m; \tilde{I}_m, \tilde{\Psi}_r; \tilde{I}_m, \tilde{\Psi}_s$  використовуються в дуже обмеженому числі випадків.

Отримані кінцеві рівняння електромагнітних кіл доповнюються одним з рівнянь обчислення електромагнітного моменту (з урахуванням умови обертання) та рівнянням руху, і на основі усіх рівнянь складається структурна схема АД.

### 6.3.2 Завдання

1 Складіть структурну схему та промодельуйте асинхронний двигун з короткозамкненим ротором в довільній ортогональній системі координат, що обертається із заданою частотою  $\omega_k$ , в умовах живлення від ідеального джерела номінальної синусоїдної напруги. Параметри двигунів візьміть з розділу 1.

Отримайте графіки перехідних процесів при прямому пуску АД, накиді та скиді номінального навантаження. Моделювання виконайте для трьох випадків:  $\omega_k = 0$ ;  $\omega_k = \omega_s$ ;  $\omega_k = \omega_r$ .

2 Розробіть структурну схему АД за певною структурою (табл. 6.4). Повторіть моделювання вказаних режимів роботи за допомогою розробленої моделі для вказаних трьох значень частоти обертання системи координат (з пункту 1).

В усіх випадках отримуйте:

- залежності амплітудних (або ефективних) значень електромагнітних величин, що можуть бути отримані із моделі безпосередньо, а також електромагнітного моменту та частоти обертання ротора АД в функції часу;

- залежності миттєвих значень складових електромагнітних величин в функції часу;

- залежності амплітудних (ефективних) значень струмів, потокозчеплень, залежності електромагнітного моменту в функції частоти обертання (динамічні характеристики).

Таблиця 6.4 – Структура для розробки моделі АД

№ вар.	Структура моделі
01–17	$\tilde{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_r$
18–34	$\tilde{I}_s, \tilde{\Psi}_s$
35–52	$\tilde{I}_s, \tilde{\Psi}_r$

### 6.3.3 Методичні вказівки та рекомендації до виконання роботи

Структурна схема АД, яка може бути побудована за рівняннями (6.24) – (6.27), наведена на рис. 6.8. Завдання сигналів напруг статора слід задавати за допомогою координатного перетворювача. При цьому сигнали напруг статора у системі координат  $\alpha, \beta$  слід задати у відповідності до залежностей:

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= U_{sfm.H} \sin(\omega_s.Ht + \phi_s); \\ u_{s\beta} &= U_{sfm.H} \sin(\omega_s.Ht - \pi/2 + \phi_s), \end{aligned} \right\}$$

де значення фазового кута  $\phi_s$  напруги статора обирається довільно.

Розглянемо найбільш розповсюджені структури моделей АД.

Структура  $\tilde{\Psi}_s, \tilde{\Psi}_r$  отримується шляхом розв'язання (6.8) відносно складових струмів статора і ротора:

$$\left. \begin{aligned} i_{s1} &= (\sigma L_s)^{-1}(\psi_{s1} - k_r \psi_{r1}); & i_{s2} &= (\sigma L_s)^{-1}(\psi_{s2} - k_r \psi_{r2}); \\ i_{r1} &= (\sigma L_r)^{-1}(\psi_{r1} - k_s \psi_{s1}); & i_{r2} &= (\sigma L_r)^{-1}(\psi_{r2} - k_s \psi_{s2}), \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

де  $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} = 1 - k_s k_r = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_s)(1 + \sigma_r)}$  – коефіцієнт розсіяння за

Блонделем, який є надзвичайно важливим параметром, котрий характеризує електромагнітні властивості двигуна. При проектуванні машини величина цього параметра визначається перш за все вибором форми клітки та повітряного зазору. Нормальні значення  $\sigma$  сягають від 0,05 до 0,2. Коефіцієнти магнітних зв'язків статора  $k_s$  і ротора  $k_r$  для більшості машин мають значення  $0,9 \div 0,97$ .

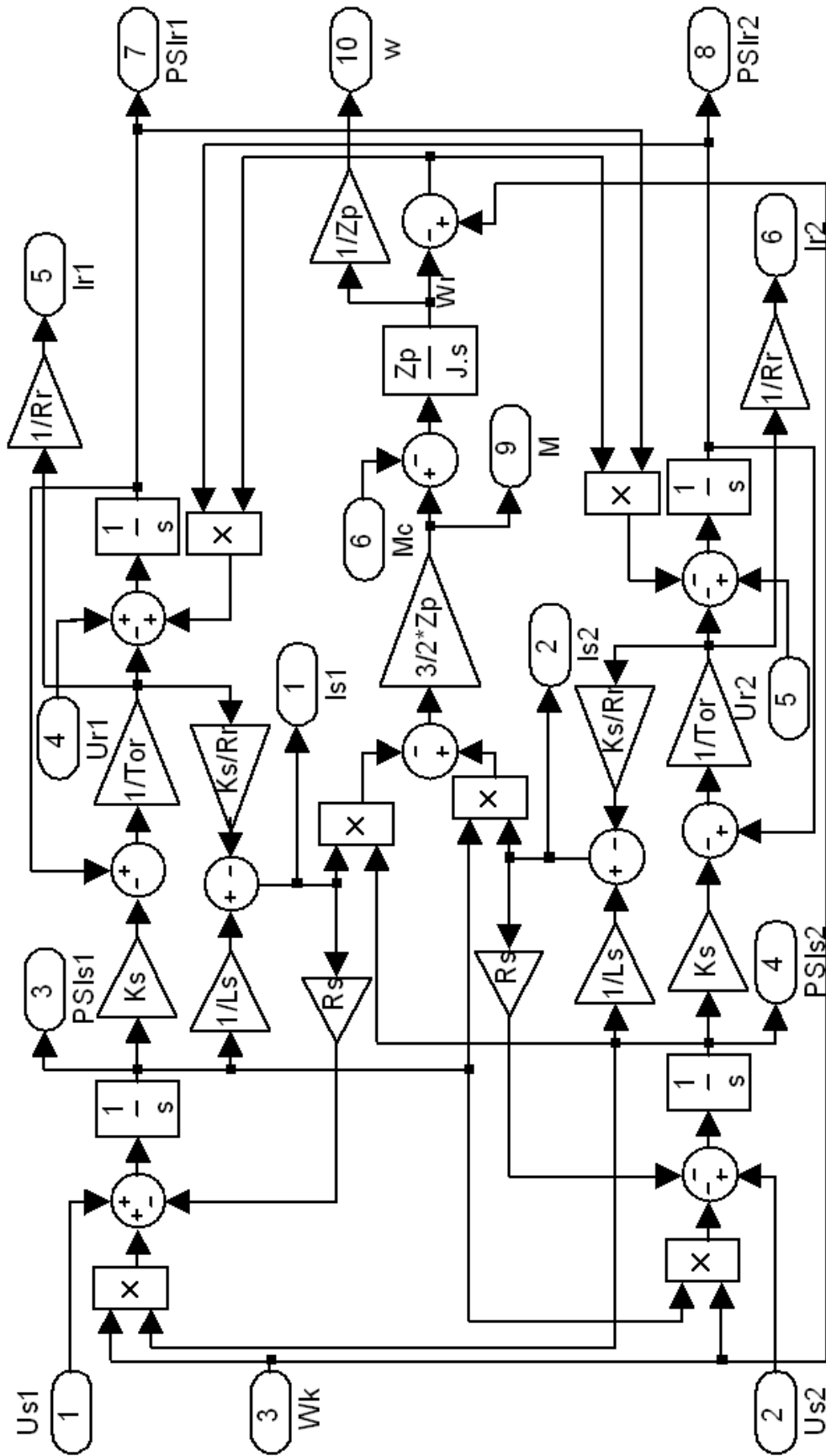


Рисунок 6.8 – Повна структурна схема АД у довільній системі координат

Після підстановки (6.28) у (6.24) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= T_{\sigma s}^{-1} \psi_{s1} - k_r T_{\sigma s}^{-1} \psi_{r1} + p \psi_{s1} - \omega_k \psi_{s2}; \\ u_{s2} &= T_{\sigma s}^{-1} \psi_{s2} - k_r T_{\sigma s}^{-1} \psi_{r2} + p \psi_{s2} + \omega_k \psi_{s1}; \\ u_{r1} &= T_{\sigma r}^{-1} \psi_{r1} - k_s T_{\sigma r}^{-1} \psi_{s1} + p \psi_{r1} - (\omega_k - \omega_r) \psi_{r2}; \\ u_{r2} &= T_{\sigma r}^{-1} \psi_{r2} - k_s T_{\sigma r}^{-1} \psi_{s2} + p \psi_{r2} + (\omega_k - \omega_r) \psi_{r1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

де  $T_{\sigma s} = \sigma L_s / R_s$ ,  $T_{\sigma r} = \sigma L_r / R_r$  – електромагнітні сталі часу відповідно статора і ротора з урахуванням розсіяння.

Доповнивши (6.29) рівняннями моменту (табл. 6.3) та руху (6.27), можна побудувати структурну схему АД (рис. 6.2).

Якщо існує необхідність дослідження струмів статора і (або) ротора, то модель (рис. 6.9) можна доповнити блоком, складеним за рівняннями (6.28) (рис. 6.10). Оскільки рівняння (6.25), що виражають взаємозв'язок між потокозчепленнями та струмами, не залежать від швидкості обертання системи координат, то блок рис. 6.10 може бути використаний для обчислення сигналів струмів у будь-якій ортогональній системі координат.

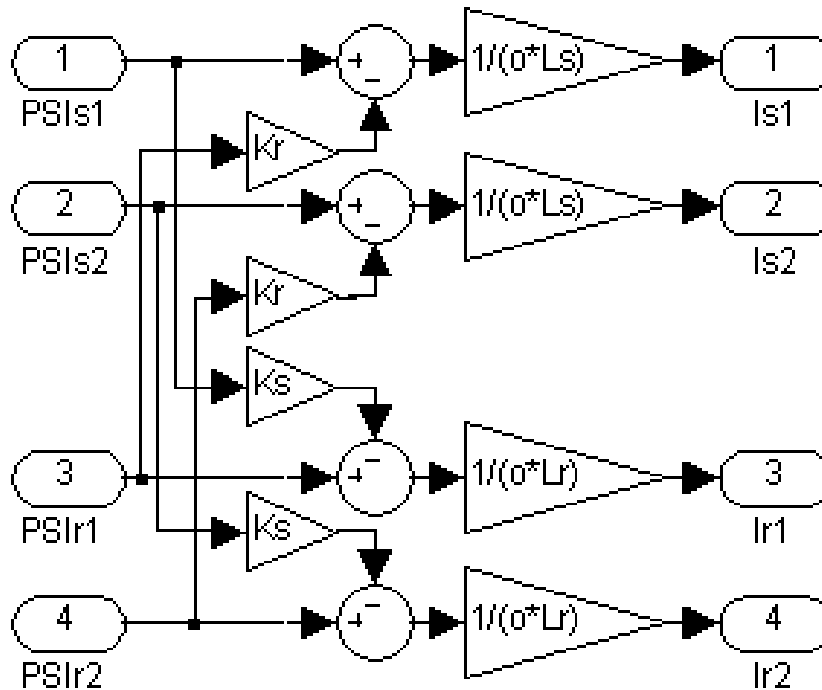


Рисунок 6.10 – Блок визначення струмів

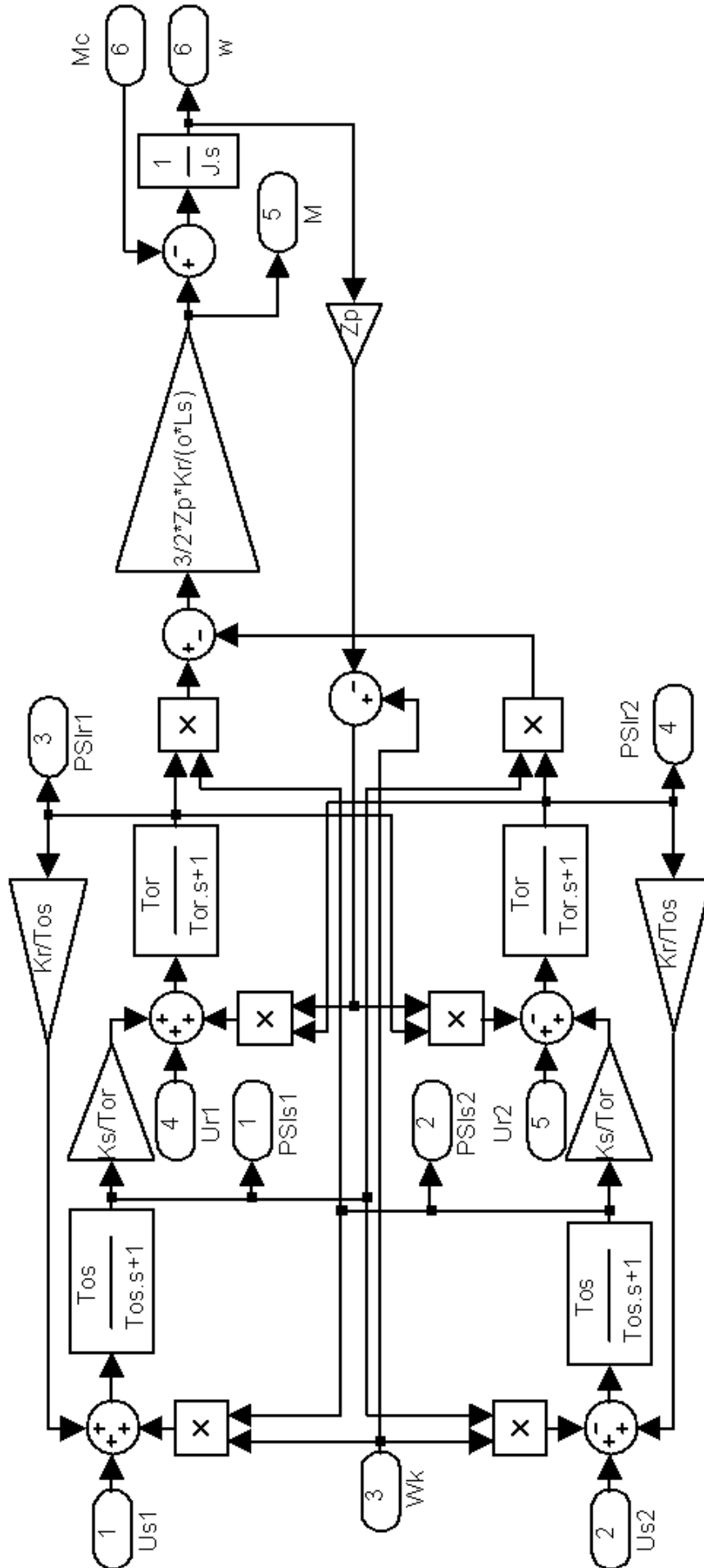


Рисунок 6.9 – Структурна схема АД у відповідності до структури  $\Psi_s, \Psi_r$

Структура  $\tilde{I}_s$ ,  $\tilde{\Psi}_s$  отримується шляхом вираження з рівнянь (6.16) сигналів складових струму та потокозчеплення ротора:

$$\left. \begin{aligned} i_{r1} &= L_m^{-1} \psi_{s1} - k_s^{-1} i_{s1}; & i_{r2} &= L_m^{-1} \psi_{s2} - k_s^{-1} i_{s2}; \\ \psi_{r1} &= k_r^{-1} (\psi_{s1} - \sigma L_s i_{s1}); & \psi_{r2} &= k_r^{-1} (\psi_{s2} - \sigma L_s i_{s2}). \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

з подальшою підстановкою (6.30) у (6.24). В результаті можна отримати

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= R_s i_{s1} + p \psi_{s1} - \omega_k \psi_{s2}; \\ u_{s2} &= R_s i_{s2} + p \psi_{s2} + \omega_k \psi_{s1}; \\ u_{r1} &= R_r L_m^{-1} \psi_{s1} - R_r k_s^{-1} i_{s1} + k_r^{-1} p \psi_{s1} - \sigma L_s k_r^{-1} p i_{s1} - \\ &\quad k_r^{-1} (\omega_k - \omega_r) (\psi_{s2} - \sigma L_s i_{s2}); \\ u_{r2} &= R_r L_m^{-1} \psi_{s2} - R_r k_s^{-1} i_{s2} + k_r^{-1} p \psi_{s2} - \sigma L_s k_r^{-1} p i_{s2} + \\ &\quad k_r^{-1} (\omega_k - \omega_r) (\psi_{s1} - \sigma L_s i_{s1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

Рівняння балансу напруги ротора у (6.31) містять по дві похідних від сигналів складових, і тому не можуть бути використанні для побудовання структурної схеми моделі. Тому слід провести такі перетворення, щоб у третьому і четвертому рівняннях зникли похідні від складових потокозчеплення статора. Це можна виконати, якщо від першого та другого рівнянь (6.31) відняти відповідно третє і четверте рівняння (6.32), помножені на  $k_r$ . В результаті рівняння рівноваги напруг статора та ротора можна привести до вигляду:

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= R_s i_{s1} + p \psi_{s1} - \omega_k \psi_{s2}; \\ u_{s2} &= R_s i_{s2} + p \psi_{s2} + \omega_k \psi_{s1}; \\ u_{s1} - k_r u_{r1} &= (R_s + L_s T_r^{-1}) i_{s1} - T_r^{-1} \psi_{s1} + \sigma L_s p i_{s1} - \omega_r \psi_{s2} - \\ &\quad (\omega_k - \omega_r) \sigma L_s i_{s2}; \\ u_{s2} - k_r u_{r2} &= (R_s + L_s T_r^{-1}) i_{s2} - T_r^{-1} \psi_{s2} + \sigma L_s p i_{s2} + \omega_r \psi_{s1} + \\ &\quad (\omega_k - \omega_r) \sigma L_s i_{s1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

де  $T_r = L_r / R_r$  – електромагнітна стала часу ротора.

Доповнюючи (6.32) відповідним рівнянням електромагнітного моменту (табл. 6.3) та рівнянням руху (6.27), можна побудувати структурну схему АД (рис. 6.11). На схемі позначено:  $T_{s1} = \frac{\sigma L_s}{R_s + L_s T_r^{-1}}$  – еквівалентна електромагнітна стала часу статора АД. Аналогічно до



попереднього випадку, у моделі за необхідності може бути передбачений блок обчислення складових струму та потокозчеплення ротора, складений за (6.30).

Структура  $\tilde{I}_s$ ,  $\tilde{\Psi}_r$  отримується шляхом вираження із (6.25) струму ротора і потокозчеплення статора

$$\left. \begin{aligned} i_{r1} &= L_r^{-1} \psi_{r1} - k_r i_{s1}; & i_{r2} &= L_r^{-1} \psi_{r2} - k_r i_{s2}; \\ \psi_{s1} &= k_r \psi_{r1} + \sigma L_s i_{s1}; & \psi_{s2} &= k_r \psi_{r2} + \sigma L_s i_{s2} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

і підставлення (6.33) у (6.24):

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} &= R_s i_{s1} + k_r p \psi_{r1} + \sigma L_s p i_{s1} - k_r \omega_k \psi_{r2} + \sigma L_s \omega_k i_{s2}; \\ u_{s2} &= R_s i_{s2} + k_r p \psi_{r2} + \sigma L_s p i_{s2} + k_r \omega_k \psi_{r1} + \sigma L_s \omega_k i_{s1}; \\ u_{r1} &= T_r^{-1} \psi_{r1} - k_r R_r i_{s1} + p \psi_{r1} - (\omega_k - \omega_r) \psi_{r2}; \\ u_{r2} &= T_r^{-1} \psi_{r2} - k_r R_r i_{s2} + p \psi_{r2} + (\omega_k - \omega_r) \psi_{r1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Рівняння балансу напруги статора у (6.34) містять по дві похідних від сигналів складових. Виконаємо перетворення, віднявши від першого та другого рівнянь (6.34) відповідно третє і четверте, помножені на  $k_r$ . В результаті рівняння рівноваги напруг статора та ротора можна привести до вигляду:

$$\left. \begin{aligned} u_{s1} - k_r u_{r1} &= R_1 i_{s1} + \sigma L_s p i_{s1} + \sigma L_s \omega_k i_{s2} - k_r T_r^{-1} \psi_{r1} - k_r \omega_r \psi_{r2}; \\ u_{s2} - k_r u_{r2} &= R_1 i_{s2} + \sigma L_s p i_{s2} + \sigma L_s \omega_k i_{s1} - k_r T_r^{-1} \psi_{r2} + k_r \omega_r \psi_{r1}; \\ u_{r1} &= T_r^{-1} \psi_{r1} - k_r R_r i_{s1} + p \psi_{r1} - (\omega_k - \omega_r) \psi_{r2}; \\ u_{r2} &= T_r^{-1} \psi_{r2} - k_r R_r i_{s2} + p \psi_{r2} + (\omega_k - \omega_r) \psi_{r1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

де  $R_1 = R_s + k_r^2 R_r$  – еквівалентний активний опір двигуна.

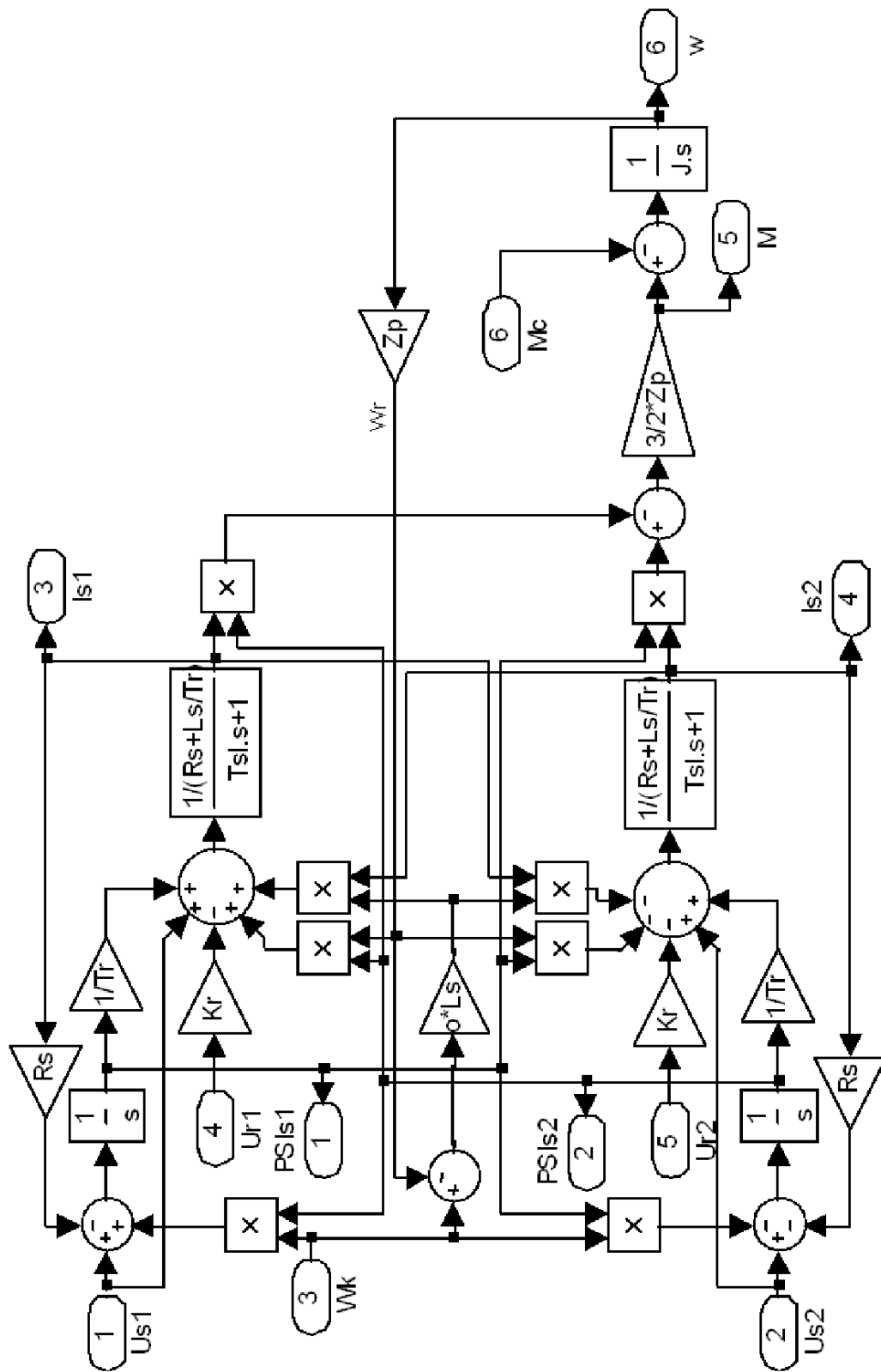


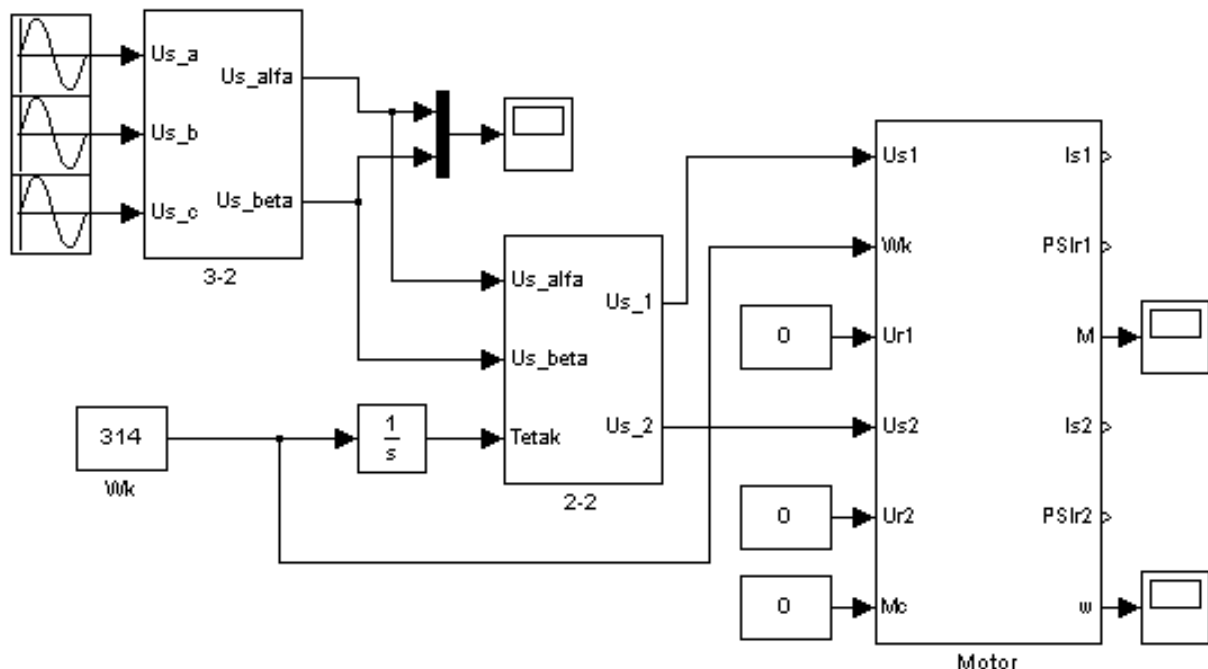
Рисунок 6.11 – Структурна схема АД у відповідності до структури  $I_s, \Psi_s$

Доповнюючи (6.35) відповідним рівнянням електромагнітного моменту (табл. 6.3) і рівнянням руху (6.27), можна побудувати структурну схему АД (рис.6.12). На схемі позначено:  $T_1 = \sigma L_s / R_1$  – еквівалентна електромагнітна стала часу статора АД.

В цьому випадку також за необхідності може бути передбачений блок обчислення сигналів складових струму ротора і потокозчеплення статора, складений за (6.33).

Виведення рівнянь і побудування структурних схем моделей, що відповідають іншим структурам, виконується аналогічним чином. Будь-яка з таких моделей можуть бути застосовані, якщо частота обертання  $\omega_k$  системи координат задана явно. Звичайно, якщо задана певна швидкість обертання (наприклад,  $\omega_k = 0$ ) або відомо, що роторні обмотки АД замкнені накоротко ( $u_{r1} = u_{r2} = 0$ ;) розглянуті моделі можуть бути дещо спрощені відкиданням зайвих зв'язків. Бажано у таких випадках використовувати традиційні позначення систем координат.

Схема, яку необхідно збирати щоразу, повинна мати вигляд такий, як наведено на рис. 6.13. Значення  $\omega_k$  обирається за завданням, а підсистема Motor включає в себе одну зі структурних схем асинхронного двигуна у двофазній системі координат. Статичний момент такої системи потрібно прийняти рівним нулю.



*Рисунок 6.12 – Структурна схема АД у середовищі MATLAB Simulink*

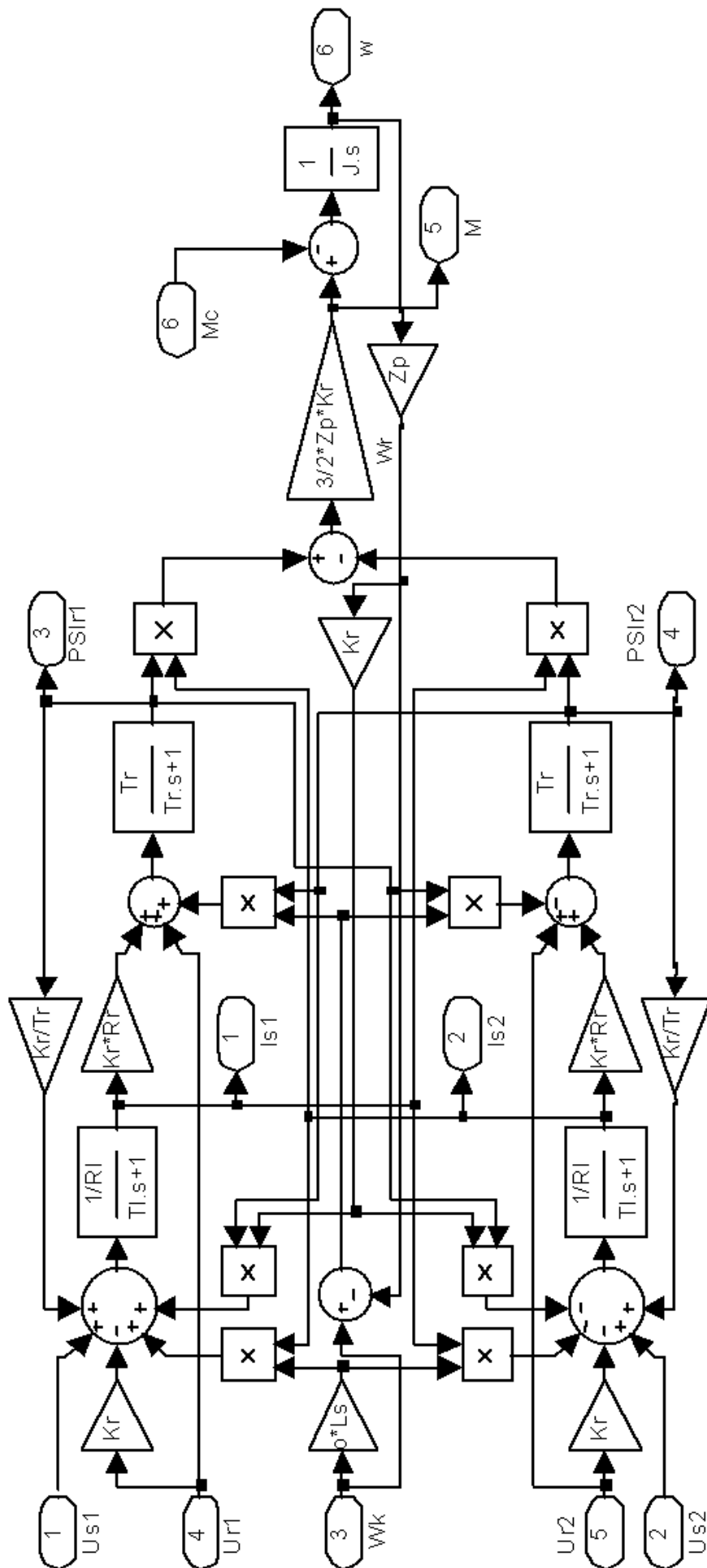


Рисунок 6.13 – Структурна схема АД у відповідності до структури  $I_s, \Psi_r$

## ВИСНОВКИ

Застосування нових технологій проектування, заснованих на використанні методів математичного моделювання та обчислювальної техніки, дозволяє забезпечити високу якість і швидкі терміни виконання проектно-конструкторських робіт. Математичне моделювання при проектуванні в більшості випадків дозволяє відмовитися від фізичного моделювання, значно скоротити обсяги випробувань і доводочних робіт, забезпечити створення технічних об'єктів з високими показниками ефективності і якості. Одним з основних компонентів системи проектування в цьому випадку стає математична модель.

У природі і техніці зустрічається багато прикладів нелінійних осциляторів, що рухаються під дією сил різної фізичної природи (фізичної, біологічної, хімічної та іншої). З ними пов'язані такі поняття, як атрактори, хаос, біфуркації та ін. Вивчення динаміки нелінійних осциляторів здавна знаходиться в центрі уваги багатьох вчених механіків. І зокрема це стосується розгляду електромеханічних систем, таких як електричні прилади, деякі типи магнітоелектричних гасителів, гіроскопи, магнітні підвіси і підшипники, пристрої транспортування і орієнтування деталей, а також деякі види електричних машин, наприклад, уніполярні і ін. В даний час динамічно розвивається мехатроніка, в якій спостерігається тенденція мініатюризації розроблюваних мехатронних пристроїв на базі мікросистемних технологій (мікро- і наноелектромеханічних). Це дає можливість створювати мініатюрні резонансні чутливі елементи і прилади - гіроскопи, акселерометри, турбінні генератори і ряд інших. Більшість резонансних систем має один, два або більше ступеня свободи. Рівняннями руху нелінійних осциляторів описують досить широкий клас різноманітних об'єктів – від макро- до мікрорівня. Нелінійні системи мають ряд особливостей. При певних умовах можлива хаотична поведінка системи, а також можливі стани нетривіальної рівноваги.

Динаміка складних систем різної природи і їх еволюція є одним із центральних напрямків досліджень в нелінійній динаміці і пов'язаних міждисциплінарних областях науки. Наведені в роботі моделі і результати їх дослідження показують, що чисельне моделювання різних технічних пристроїв у вигляді пов'язаних нелінійних осциляторів демонструє складну динаміку процесів. Моделі можна використовувати на етапі проектування технічних систем. Зокрема, можна рекомендувати використання розглянутих схем в комп'ютерних практикумах, а також при постановці експериментальних лабораторних робіт. Питання, пов'язані з виявленням різних типів синхронізації в різноманітних системах пов'язаних нелінійних осциляторів, знаходження особливих точок, умов переходу в різні режими, нелінійний резонанс, збудження квазіперіодичних коливань і інші можуть скласти предмет окремого дослідження.

Додатково можна рекомендувати джерела [14-20].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: [підручник] / М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0.
2. Подлесний С. В. Нелінійні коливання осциляторів під дією сил різної фізичної природи / С. В. Подлесний, Ю. О. Ерфорт, О. В. Суботін // Вісник ДДМА. – 2020. - № 1 (48). – С. 58-67.
3. Саранин В. А. Электростатические осцилляторы / В. А. Саранин // Успехи физических наук. Том 182, № 7. 2012. – С. 749-759.
4. Терешин В. Г. Уравнения Лагранжа второго рода, их приложения к механическим и электромеханическим системам: Учеб. пособие / В. Г. Терешин // Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2006. – 153 с. ISBN 5-86911-092-0
5. Подлесный С. В. Моделирование динамики униполярного генератора / С. В. Подлесный // Научный вестник, ДГМА. – № 3 (15Е), 2014. – С. 95-100.
6. Подлесний С. В. Динамічна модель електромеханічної системи електромагнітного гальма / С. В. Подлесний // Вісник ДДМА. – № 1 (40), 2017. – С. 11-17.
7. Подлесный С. В. Моделирование динамики электромеханических систем / С. В. Подлесный, А. Н. Стадник, А. В. Ларичкин // Вісник ДДМА. – № 3 (36), 2015. – С. 171-176.
8. Подлесний С. В. Динаміка електромагнітного і електростатичного підвісів ротора / С. В. Подлесний, Ю. О. Ерфорт, Я. А. Жук // Научный вестник ДГМА. – № 1 (22Е), 2017. – С. 42-48.
9. Подлесний С. В. Дослідження динаміки електровимірювальних приладів в системі MATHCAD / С. В. Подлесний, Я. А. Жук // Научный вестник ДГМА. № 2 (23Е), 2017. – С. 57-63.
10. Подлесний С. В. Динаміка пов'язаних нелінійних осциляторів / С. В. Подлесний, О. А. Костіков, Ю. О. Ерфорт, О. В. Суботін // Вісник ДДМА. – 2020. - № 1 (48). – С. 47-57.
11. Подлесный С. В. Моделирование электромеханической системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока / С. В. Подлесный // Научный вестник ДГМА. – № 1 (19Е), 2016. – С. 87-95.
12. Лопатухина И. Е. Колебания электромеханической системы, возбуждаемые двумя электродвигателями постоянного тока / И. Е. Лопатухина // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3. – С. 465-469.
13. Мякохлеб К. Б. Принципы построения системы электромагнитных вибровозбудителей для воспроизведения трехкоординатной загрузки / К. Б. Мякохлеб // Збірник наукових праць "Вісник НТУ "ХПІ" » № 55 за 2012 рік.
14. Генкин М. Д. Электродинамические вибраторы / М. Д. Генкин, А. М. Русаков, В.В. Яблонский. - М.: Машиностроение, 1975. - 96 с.

15. <https://www.tira-gmbh.de/schwingprueftechnik/schwingpruefanlagen/modal-schwingpruefanlagen/>

16. Сборник задач по теоретической механике / Под ред. К. С. Колесникова. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.

17. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике: Учеб. пособие: Для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 400 с. — ISBN 5-9221-0182-Х.

18. Аналитическая динамика электромеханических систем. Мартыненко Ю.Г. / Под.ред. И.В. Новожилова. – М.: МЭИ, 1984. – 64 с.

19. Каганов В. И. Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов./ В. И. Каганов // - М.: Горячая линия-Телеком, 2008. - 336 с: ил. ISBN 978-5-9912-4Н08-0.

20. Математическое моделирование в электромеханике: учебно-методический комплекс / сост.: О.М. Вальц, А.В. Каган, В.И. Рябуха. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2010. – 176 с.

21. Пятибратов Г. Я. Моделирование электромеханических систем: Учеб. пособие / Г. Я. Пятибратов, Д. В. Барыльник // Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГПУ, 2013. – 103 с.

22. Светлицкий В. А. Задачи и примеры по теории колебаний: Учебное пособие./ В. А. Светлицкий // М.: Изд-во МГТУ, 1994. – Ч 1. – 308 с.

23. Скубов Д. Ю. Нелинейная электромеханика. / Д. Ю. Скубов, К. Ш. Ходжаев // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 360 с. - ISBN 5-9221-0298-2.

24. Методичні рекомендації до практичних занять та самостійного вивчення матеріалу з навчальної дисципліни «Моделювання електромеханічних систем» (для студентів бакалавріату всіх форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М.Бекетова; уклад. К.В. Ягуп. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 42 с.

25. Мягкохлеб К. Б. Принцип построения системы электромагнитных вибровозбудителей для воспроизведения трехкоординатной нагрузки / К. Б. Мягкохлеб // Вестник Нац. техн. ун-та "ХПИ" : сб. науч. тр. Темат. вып. : Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ "ХПИ". – 2012. – № 55 (961). – С. 132-137.

26. Восканьянц А.А. Автоматизированное управление процессами прокатки. Учебное пособие / А.А. Восканьянц. - М.:МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. -85 с.

27. Датчики и методы, повышения их точности: Учеб. пособие // А.В. Буценко, В.В. Яковенко, И.М. Сагайда, Я.Т. Луцик. – К.: Вища шк., 1989г. – 215с.: ил. – (Новое в науке и технике – студентам и учащимся. Вып. 4.).

28. Гольдштейн А.Е. Физические основы получения информации: учебник / А.Е. Гольдштейн. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 292 с.

29. Гольдштейн А.Е. Физические основы измерительных преобразований: учебн. пособие / А.Е. Гольдштейн. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 253 с.
30. Фрайден Дж. Современные датчики. Справочник / Дж. Фрайден. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.
31. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – Москва: Техносфера, 2006. – 856 с.
32. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов / Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. – 2-изд., перераб. и доп.- М.: Радио и связь, 1990г. – 256с.
33. Пенин П.И. Система передачи цифровой информации: учебное пособие для радиотехнических специальностей вузов / П.И. Пенин. – М.: Советское радио, 1976. – 368 с.
34. Мирошников М.М. Теоретические основы ОЭП. – Л.: Машиностроение, 1977г. – 600с.
35. Азимов Р.К., Шипулин Ю.Г. Оптоэлектронные преобразователи больших перемещений на основе полых световодов. – М.: Энергоатомиздат, 1987г. – 56с.: ил. – (Б-ка по автоматике; Вып. 664.).
36. Бурого А.Н. Вибростенды. – Л.: Ленинградский дом научно-технической пропаганды, 1960. – 191 с.
37. Кузнецов А.А. Вибрационные испытания элементов и устройств автоматики. – М.: Энергия, 1976. – 120 с.
38. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник: В 2 т. / Под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 2 – 439 с.
39. Токарев М.Ф., Талицкий Е.Н., Фролов В.А. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
40. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
41. Иванов-Смоленский, А.В. Электрические машины: Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1980. – 928 с., ил.
42. Шрейнер, Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: УРО РАН, 2000. – 654 с.
43. Ковчин, С.А. Теория электропривода: Учебник для вузов / Ю.А. Сабинин – СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отд-ние, 1994. – 496 с.



*Навчальне видання*

**ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович  
ШЕРЕМЕТ Олексій Іванович  
КОСТІКОВ Олександр Анатолійович  
ЄРФОРТ Юрій Олександрович  
СУБОТІН Олег Володимирович  
СТАДНИК Олександр Миколайович**

**Комп'ютерне моделювання електромеханічних систем**

**Навчальний посібник  
для студентів електромеханічних спеціальностей**

Редактор                    І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка

379/2008. Підп. до друку 20.01.2021. Формат 60x84/16.  
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 9,00 Обл.-вид. арк. 7,02  
Тираж 100 прим.            Зам. № 5

Видавець і виготівник  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру  
серія ДК № 1633 від 24.12.2003