

**Васильева Л.В., Медведева О.А., Гетьман И.А.**  
*Донбасская государственная машиностроительная академия,  
Краматорск.*

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**Постановка проблемы.** Сегодня методами компьютерного моделирования пользуются специалисты практически всех отраслей и областей науки и техники, поскольку с их помощью можно прогнозировать и даже имитировать явления, события или проектируемые предметы в заранее заданных параметрах.

Под компьютерной моделью изучаемого явления следует понимать совокупность численных методов решения основных уравнений, алгоритмов их реализации и компьютерных программ. Результативность компьютерной модели в значительной степени определяется качеством используемого программного обеспечения. Сегодня имеются мощные специализированные системы программирования (Maple, MathCAD и др.), в которых реализуется удобные графические пользовательские возможности.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Большую работу в построении и исследовании компьютерных моделей проводит Р.В. Майер. В его работах [1, 2, 3] рассмотрены принципы компьютерного моделирования физических явлений, представлены программы, позволяющие рассчитать одномерное и двумерное движение системы материальных точек в силовом поле, показаны методы расчета электрических цепей постоянного тока, однофазных и трехфазных цепей переменного тока, колебательных систем, переходных процессов, способы проведения спектрального анализа. Однако к недостаткам данных исследований можно отнести тот факт, что для имитации динамики модели автором (кроме работы [3]) используется язык программирования Pascal. Подобный подход порождает ряд проблем. Главной из них является трудоемкость и в этой связи недостаточная гибкость. В работе [3] Р.В. Майер использует для решения физических задач пакет MathCAD. Однако при этом не использует такой важный встроенный в MathCAD инструмент как анимация, что обедняет иллюстрацию компьютерной модели.

Что касается применения Maple для моделирования процессов и явлений, то, анализируя литературу, складывается впечатление, что этому пакету, который обладает широчайшими возможностями аналитического решения математических задач и

создания анимационных эффектов, еще не уделяется должное внимание.

В работах профессора Л.М. Куценко и его учеников (Г.В. Ревя, О.В. Шоман, В.М. Попова, А.В. Ромина и др.) для системы компьютерной математики Maple созданы алгоритмы покадрового синтеза изображений объектов разной природы. Однако эффективные обобщающие алгоритмы компьютерной анимации, которые демонстрировали бы проявления того или другого процесса с целью определения рациональных значений параметров его протекания еще не разработаны.

**Цель статьи.** Целью данной статьи является исследование явления резонанса с помощью систем компьютерной математики Maple и MathCAD с использованием анимационных возможностей этих пакетов.

**Основной материал исследований.** Рассмотрим процесс исследования явления резонанса с помощью пакета Maple.

Постановка задачи.

Вынужденные колебания механической системы описываются уравнением

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_v \frac{dx(t)}{dt} + k_u x(t) = F,$$

где  $m$  - масса груза,  $k_v$  - коэффициент вязкости,  $k_u$  - коэффициент упругости,  $F$  - вынуждающая сила,  $x$  - отклонение груза от положения равновесия,  $t$  - время.

Если вынуждающая сила является синусоидальной  $F = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , то при приближении  $\omega$  к резонансной частоте  $\omega_{rez} = \sqrt{k_u - 0.5k_v^2}$  резко возрастает амплитуда вынужденных колебаний. Требуется:

1. Для  $m=1$ ,  $k_v=3$ ,  $k_u=73$ ,  $A=1$ ,  $\varphi_0=3$ ,  $t_k=100$ ,  $x_0=0.015$ ,  $x'_0=0$  исследовать изменение амплитуды вынужденных колебаний при возрастании отношения  $\omega/\omega_{rez}=k$  в такой последовательности: 0.1, 0.5, 1, 2, 3. Для этого построить графики вынужденных колебаний для заданного промежутка времени  $0 < t < t_k$ . По графикам измерить амплитуду колебаний (по установившейся части кривой).

2. С помощью анимации исследовать характер изменения вынужденных колебаний при возрастании  $k$  от 0.01 до 3. Взять следующие параметры анимации: frames=150, numpoints=200.

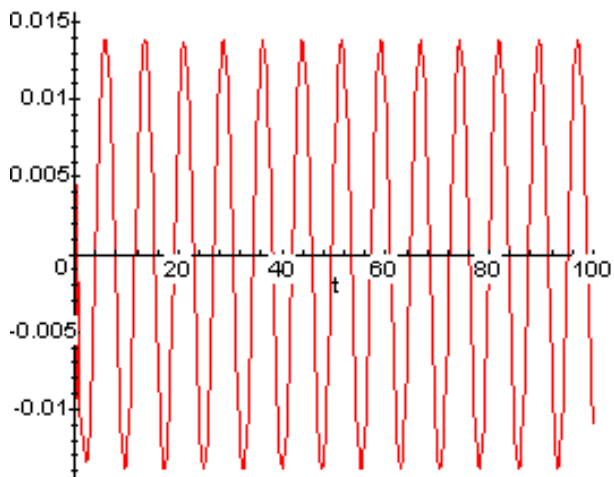
Листинг программы:

> restart: with(plots):

```

> A:=1:fio:=3:tk:=100:kv:=3:ku:=73:
> w_rez:=sqrt(ku-0.5*kv^2):
> w:=k*w_rez:
> F:=A*sin(w*t+fio):
> ur:=-diff(x(t),t$2)+kv*diff(x(t),t)+ku*x(t)=F:
> r1:=dsolve({ur,x(0)=0.015,D(x)(0)=0},x(t)):
> assign(r1):r1:=x(t):
> k:=0.1:plot(r1,t=0..100); *

```



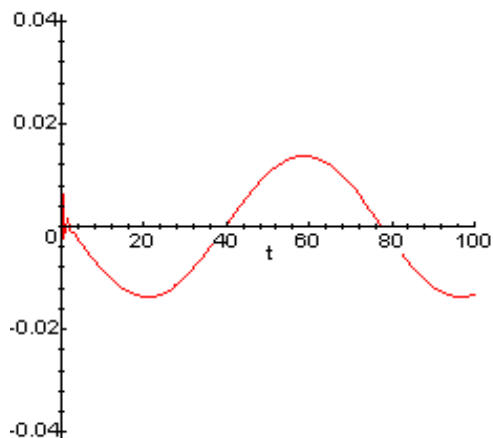
```

> k:=0.5:plot(r1,t=0..100);
> k:=1:plot(r1,t=0..100);
> k:=2:plot(r1,t=0..100);
> k:=3:plot(r1,t=0..100);
> k='k':
> animate(r1,t=0..100,k=0.01..3,frames=150,numpoints=200,color=red);

```

---

\* График вынужденных колебаний приводится только для  $k=0.1$ .



Сведем результаты измерений в таблицу.

$k=\omega/\omega_{rez}$	0.1	0.5	1	2	3
амплитуда	0.014	0.017	0.041	0.005	0.002

Сделаем вывод о характере изменения амплитуды. При возрастании  $k=\omega/\omega_{rez}$  от 0.1 до 1 амплитуда возрастает в 2.9 раза, в момент резонанса (при  $k=1$ ) амплитуда достигает максимального значения – 0.041, при возрастании  $k$  от 1 до 3 амплитуда уменьшается в 20.5 раз.

В пакете MathCAD этот расчет выполняется следующим образом.

Листинг документа:

$$m := 1 \quad kv := 3 \quad ku := 73 \quad A := 1$$

$$w := 0.1 \cdot \sqrt{ku - 0.5 \cdot kv^2}$$

$$F(t) := A \cdot \sin(w \cdot t + 3)$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.015 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t0 := 0      tk := 30      n := 100

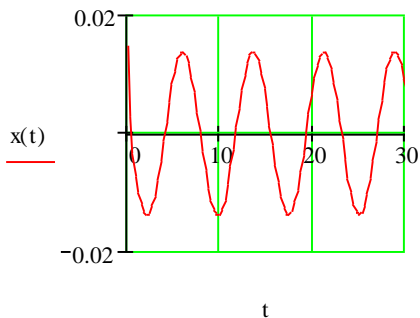
$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ F(t) - kv \cdot x_1 - ku \cdot x_0 \end{pmatrix}$$

Z := rkfixed(x, t0, tk, n, D)

Z =

	0	1	2
0	0	0.015	0
1	0.3	2.681·10 <sup>-3</sup>	-0.023
2	0.6	-3.518·10 <sup>-3</sup>	-0.018
3	0.9	-7.337·10 <sup>-3</sup>	-0.013
4	1.2	-0.01	-9.351·10 <sup>-3</sup>
5	1.5	-0.012	-6.73·10 <sup>-3</sup>
6	1.8	-0.013	-4.131·10 <sup>-3</sup>
7	2.1	-0.014	-1.394·10 <sup>-3</sup>
8	2.4	-0.014	1.406·10 <sup>-3</sup>
9	2.7	-0.012	4.118·10 <sup>-3</sup>
10	3	-0.01	6.578·10 <sup>-3</sup>
11	3.3	-7.733·10 <sup>-3</sup>	8.635·10 <sup>-3</sup>
12	3.6	-4.654·10 <sup>-3</sup>	0.01
13	3.9	-1.29·10 <sup>-3</sup>	0.011
14	4.2	2.153·10 <sup>-3</sup>	0.011
15	4.5	5.464·10 <sup>-3</sup>	0.011

$$x(t) := Z^{(1)} \quad t := Z^{(0)}$$



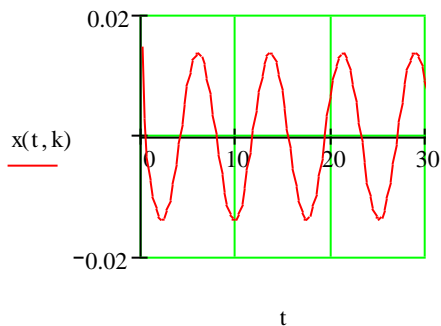
Для получения анимации вводится дополнительная переменная (FRAME), которая будет учитывать изменение отношения  $\omega/\omega_{рез}=k$  в пределах от 0,1 до 3.

Листинг документа при этом изменяется таким образом:

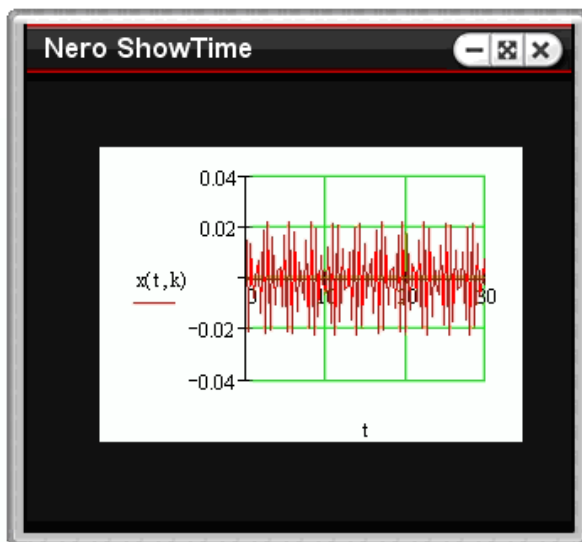
$$k := 0.1 + \frac{\text{FRAME}}{10}$$

$$w := k \cdot \sqrt{ku - 0.5 \cdot kv^2}$$

$$x(t, k) := Z^{(1)} \quad t := Z^{(0)}$$



Анимация может быть запущена как непосредственно из документа MathCad, так и сохранена в виде файла \*.avi (видеофайл):



### **Выводы.**

1. Применение компьютеров в научных исследованиях является необходимым условием изучения сложных систем.

2. Традиционная методология взаимосвязи теории и эксперимента должна быть дополнена принципами компьютерного моделирования. Эта новая эффективная процедура дает возможность целостного изучения поведения наиболее сложных систем как естественных, так и создаваемых для проверки теоретических гипотез.

3. Качество построения и анализа компьютерной модели в значительной степени зависит от используемого программного обеспечения. Для получения результативных компьютерных моделей необходимо использовать системы компьютерной математики (Maple, MathCAD и др.), в которых реализуется удобные графические пользовательские возможности.

### **Литература**

1. Майер, Р. В. Основы компьютерного моделирования: Учебное пособие. / Р.В.Майер. – Глазов: ГГПИ, 2005. – 25 с.

2. Майер, Р. В. Компьютерное моделирование физических явлений – <http://maier-rv.glazov.net>.

3. Майер, Р.В. Решение физических задач с помощью пакета MathCAD/ Р.В.Майер. – Глазов: ГГПИ, 2006. – 37 с.