Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

О. Г. Ровенська, С. О. Колесников

АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Частина 1

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 2 від 24.09.2020

Краматорськ
ДДМА
2020

УДК 517
Р 58

Рецензенти:

Власенко К. В., д-рка пед. наук, проф. завідувачка кафедри математики та моделювання Донбаської державної машинобудівної академії;

Чумак О. О., канд. пед. наук, доц. кафедри інженерної підготовки Донбаської національної академії будівництва і архітектури.

Ровенська, О. Г.

Р 58 Алгебра : навчальний посібник / О. Г. Ровенська, С. О. Колесников. – Краматорськ : ДДМА, 2020. – Частина 1. – 48 с.

ISBN 978-966-379-941-4

Навчальний посібник містить у стислому вигляді огляд таких розділів алгебри, як системи лінійних рівнянь, визначники, матриці. Указана тематика, наведено зразки розв’язання практичних завдань і завдань дослідницького характеру.

УДК 517

ISBN 978-966-379-941-4

ЗМІСТ

ВСТУП

У посібнику розглянуто деякі основні питання курсу лінійної алгебри, а саме: питання дослідження та розв'язання систем лінійних рівнянь, обчислення визначників другого й третього порядків і методи зведення до них визначника довільного порядку, перестановки й підстановки, основні властивості. Також розглянуто деякі питання розділу матричної алгебри, а саме: основні поняття, дії над матрицями й застосування до розв'язання систем лінійних рівнянь. Подано теоретичний матеріал із вказаної тематики, розглянуто задачі практичного змісту. Істотну увагу приділено підбору індивідуальних завдань і завдань дослідницького характеру.

Курс спирається на загальновідомі факти елементарної математики й стандартні відомості з комбінаторики. Опанування розглянутих тем надає можливість вивчення і розуміння подальшого курсу алгебри та теорії функції комплексної змінної.

Мета вивчення дисципліни – формування у студентів фундаментальних понять алгебраїчного характеру, а також умінь застосування цих понять під час розв'язання практичних задач. Курс суттєво розширює знання студентів про методи вивчення геометричних об'єктів саме завдяки опануванню аналітичного методу, що полягає у послідовному застосуванні алгебри до вивчення різних геометричних образів. З іншого боку, цей курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами теорії скінченновимірних просторів, лінійних операторів, функціоналів, які дістануть подальшого розвитку і продовження в функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь та інших загальних і спеціальних курсах.

1 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Основні поняття

Система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається системою лінійних рівнянь, де $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$ – числа, x_i – невідомі, b_j – вільні числа.

Набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який при підстановці перетворює кожне рівняння на тотожність, називається *розв'язком системи*.

Система, яка має єдиний розв'язок, називається *визначеною*, якщо безліч розв'язків – *невизначеною*.

Геометричною інтерпретацією розв'язку системи з двома невідомими є перетин прямих (які можуть перетинатися в одній точці, не мати перетину – бути паралельними, або співпадати); з трьома невідомими – перетин площин.

З огляду на геометричний зміст, система лінійних рівнянь може мати єдиний розв'язок, безліч розв'язків або не мати жодного розв'язку.

Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, у протилежному випадку – *несумісною*.

1.2 Метод Гауса

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо їхні множини розв'язків співпадають. Перетворення системи, які не змінюють множини її розв'язків, називаються *елементарними*.

До елементарних перетворень відносять таке:

1) заміна місцями рівнянь системи;
2) помноження рівняння на число, відмінне від нуля;
3) помноження рівнянь на число, відмінне від нуля, і додавання до іншого рівняння.

За допомогою елементарних перетворень систему можна привести до *східчастого вигляду*. При цьому можливі такі ситуації:

1) Отримаємо рівняння вигляду:

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b',\ b' \neq 0.$$

У цьому випадку система не має розв'язків.

2) Отримаємо східчасту систему, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Система має єдиний розв'язок.

3) Отримаємо східчасту систему, де кількість рівнянь k дорівнює кількості невідомих n. Система має безліч розв'язків. При цьому невідомі $x_1, x_2, \dots, x_k$ вважаються базовими, а $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ – вільними.

1.3 Загальний розв’язок системи лінійних рівнянь

Невідому x_n називають *допустимою*, якщо рівняння системи містить x_n з коефіцієнтом одиниця, а в усіх інших рівняннях системи невідомої x_n немає, тобто рівняння містять x_n з коефіцієнтом нуль.

Система рівнянь називається *допустимою*, якщо кожне її рівняння містить допустиму невідому. Наприклад, система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

є допустимою, бо невідомі x_1, x_2 і x_5 – допустимі.

Якщо з кожного рівняння допустимої системи рівнянь обрати одне допустиме невідоме, то отримаємо *набір допустимих невідомих*. Усі невідомі, що не входять до складу допустимих невідомих, називаються *вільними*. У наведеній вище допустимій системі x_2 та x_4 – вільні невідомі.

Загальним розв’язком сумісної системи рівнянь називається рівнозначна їй допустима система, в якій допустимі невідомі виражені за допомогою вільних елементів. Якщо в загальному розв’язку вільним невідомим надати якісь числові значення, то отримаємо розв’язок даної системи, так зване *часткове*. Коли ми надаємо вільним невідомим всілякі числові значення, то можемо отримати всі розв’язки даної системи лінійних рівнянь.

Побудова загального розв’язка методом Гауса:

1) Перевірити, чи має система суперечливе рівняння. Якщо система має таке рівняння, то вона несумісна та не має загального розв’язку.

2) Викреслити усі тривіальні рівняння в системі, якщо вони присутні.

3) З'ясувати, чи є система рівнянь допустимою. Якщо вона допустима, то побудувати загальний розв’язок так, щоб допустимі невідомі були виражені за допомогою вільних.

4) Знайти рівняння у системі, яке не містить допустиме невідоме. За допомогою елементарних перетворень отримати у цьому рівнянні невідоме з коефіцієнтом одиниця. Потім виключити це невідоме з інших рівнянь системи.

5) Виконати наступний крок, тобто перейти до виконання пункту 1. Через скінченну кількість кроків процес зупиниться і буде встановлена несумісність системи або отримано загальний розв’язок системи лінійних рівнянь.

Приклад 1.3.1. Розв’язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв’язання

Домножимо перше рівняння на (-3) і додамо до другого; потім додаємо перше і третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -4x_2 - 4x_3 = -8 \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розділимо друге рівняння на 4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Помножимо друге рівняння на 3 і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ -x_3 = -1 \end{cases}.$$

З третього рівняння знаходимо $x_3 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_2 = -1. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

З другого рівняння $x_2 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Відповідь: $(1;\ 1;\ 1)$.

Приклад 1.3.2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання

Помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до другого; потім помножимо перше рівняння на (-2) і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Віднімаючи від другого рівняння третє, отримаємо систему, в якій кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай x_3 – вільна змінна:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ 2x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Знаходимо x_1 і x_1:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - \dfrac{x_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{x_3}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}.$$

Відповідь: система має безліч розв'язків – $\left(1 - \frac{3}{2}x_3; \quad \frac{1}{2}x_3; \quad x_3\right)$, $x_3 \in R$.

1.4 Однорідні системи

Система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

називається *однорідною системою лінійних рівнянь*.

Теорема: Однорідна система завжди сумісна.

Окрім нульового розв’язку, однорідна система може мати ще розв’язки. У цьому випадку вона є невизначеною.

2 ВИЗНАЧНИКИ

2.1 Визначники 2-го та 3-го порядків

Розглянемо систему з двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{12}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Розв’язуючи її, маємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 + a_{12}x_2}{a_{11}} \\ a_{21} \cdot (b_1 - a_{12}x_2) + a_{22} \cdot a_{11}x_2 = b_2 \cdot a_{11} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{cases}.$$

Вираз $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ зручно записувати у вигляді таблиці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Крім того, вирази $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ і $a_{11} b_2 - a_{21} b_1$ також зручно подати у вигляді таблиць:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.1.1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1a \end{vmatrix}$,

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Подібним чином можна представити розв'язок системи з трьох рівнянь з трьома невідомими і більш загальних випадків.

Визначником другого порядку називається число, записане у вигляді прямокутної таблиці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix},$$

яке обчислюється за правилом:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Визначником третього порядку називається число, записане у вигляді прямокутної таблиці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix},$$

яке обчислюється за правилом:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}a_{11}$$

2.2 Перестановки та підстановки

Розглянемо множину з n натуральних чисел $\{1,2,\ldots n\}$.

Перестановкою з n чисел називається розташування цих чисел в будь-якому порядку.

Теорема. Кількість різних перестановок дорівнює $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Приклад 2.1.1. Скласти всі можливі перестановки з чисел $\{1,2,3\}$.

Розв'язання. $\{1,2,3\}$, $\{1,3,2\}$, $\{3,1,2\}$, $\{3,2,1\}$, $\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\}$

Транспозицією називається заміна місцями двох елементів перестановки.

Інверсією називається розташування елементів i та j в перестановці, якщо $i < j$, але стоїть після нього.

Якщо кількість інверсій парна, перестановка називається *парною*, якщо кількість інверсій непарна, – *непарною*.

Теорема. Кількість парних і непарних перестановок з n чисел однакова і дорівнює $\frac{n!}{2}$.

Якщо записати дві перестановки в таблицю, то отримаємо підстановку. Наприклад, запис

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

означає, що число 1 переходить у 2, число 4 переходить у 3 і т.д. Отже підстановка задає взаємооднозначне відображення множини з n чисел в себе.

Теорема. Кількість підстановок n-го ступеня дорівнює $n!$

Перестановка називається *парною*, якщо парність верхнього і нижнього рядків співпадають, і *непарною* в протилежному випадку.

2.3 Визначники n-го порядку

Подібно до визначників другого та третього порядків можна ввести поняття визначника n-го порядку.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником n-го порядку називається сума $n!$ доданків, де кожен доданок – це добуток n елементів, що вибираються по одному з кожного рядка і з кожного стовпчика; доданок має знак «+», якщо його індекси складають парну підстановку, і «–» – якщо непарну.

Властивості визначників:

1. Визначник не зміниться, якщо рядки і стовпчики замінити місцями.
2. Якщо визначник має нульовий рядок, то він дорівнює 0.
3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то значення визначника зміниться на протилежне.
4. Визначник, що має однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи рядка визначника помножити на число K, то визначник помножиться на це число.

6. Визначник, що має пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати елементи іншого рядка.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати елементи іншого рядка, помноженого на число, відмінне від нуля.

Зауваження. Властивості 2–8 мають місце і для стовпчиків.

2.4 Обчислення визначників

Мінором M_{ij} називається визначник, який утворюється із заданого шляхом викреслення i-го рядку і j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} до елемента визначника a_{ij} називається добуток $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема. (Розкладання визначника за i-му рядком.) Визначник дорівнює сумі добутків усіх елементів рядку на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Таким чином можна звести обчислення визначника n-го порядку для декількох визначників $(n-1)$-го порядку. Доцільно зводити обчислення визначника n-го порядку до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, використовуючи властивості 7 і 8.

Приклад 2.4.1. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладаємо за третім рядком:

$$\Delta = (-1)^4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^7\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=2\cdot16-40+48=40.$$

Приклад 2.4.2. Обчислити визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1 & -4\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 5\end{vmatrix}.$$

Помножимо перший рядок на (–1) і додамо до другого; на (–2) і додамо до третього:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & -6\\ 3 & -1 & -4 & -6\\ 1 & 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & -4 & -6\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=108.$$

Теорема. Сума добутків усіх елементів деякого рядка визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка дорівнює 0.

Приклад 2.4.3. Виписати мінори й алгебраїчні доповнення для всіх елементів другого рядка визначника:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Приклад 2.4.4. Визначити визначник за правилом Саррюса і за допомогою розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

2.5 Правило Крамера

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Головний визначник Δ складається з коефіцієнтів при невідомих.

Допоміжні визначники Δx_i утворюються із головного шляхом заміни i -го стовпчика на праві частині рівнянь системи.

Можливі випадки:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}$, $i = 1,2,\ldots n$.
2. Якщо $\Delta = 0$, $\Delta x_i = 0$, $i = 1,2,\ldots n$, то система має безліч розв'язків.
3. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з визначників не дорівнює нулю, система не має розв'язків.

Приклад 2.5.1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}.$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0.$$

Приклад 2.5.2. Розв’язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв’язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\,(2-3) = 4.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4\,(4-5) = 4$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4(-4+3) = 4$$

Таким чином,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{4}{4} = 1.$$

Приклад 2.5.3. При яких a та b система має: а) єдиний розв’язок; б) не має розв’язків; в) безліч розв’язків:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ ax + y + 3z = 10 \\ 5x - 2y + 4z = b \end{cases}.$$

Розв'язання. Випишемо для даної системи головний визначник та всі допоміжні:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 10a - 30; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ b & -2 & 4 \end{vmatrix} = 120 - 10b;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 10 & 3 \\ 5 & b & 4 \end{vmatrix} = 60 + ab - 6b - 8a;$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & 1 & 10 \\ 5 & -2 & b \end{vmatrix} = 120 + 3ab + 2b - 4a$$

Запишемо формули Крамера.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Для того щоб система лінійних рівнянь мала єдиний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб головний визначник системи Δ не дорівнював нулю, тобто $10a - 30 \neq 0$, $a \neq 3$.

Система не має розв'язків, якщо $\Delta = 0$, і хоча б один із допоміжних визначників $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ не дорівнював нулю, тобто $10a - 30 = 0$, а наприклад, $120 - 10b \neq 0$. Значить, при $a = 3$ і $b \neq 12$ дана система не має розв'язків. Система має безліч розв'язків, якщо $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

Ми вже знаємо, що $\Delta = 0$ при $a = 3$, $\Delta x = 0$ при $b = 12$. Підставимо в Δy та Δz значення та, прирівнявши до нуля, визначимо b.

$$\Delta y = 60 + 3b - 6b - 24 = 0, \quad 36 = 3b, \quad b = 12;$$

$$\Delta z = -120 + 9b + 2b - 12 = 0, \quad 11b = 132, \quad b = 12.$$

Отже, система буде мати безліч розв'язків при $a = 3$, $b = 12$.

Зауваження.

На відміну від методу Гауса, правило Крамера надає формули для розв'язання системи через коефіцієнти. Проте використовувати його можна, тільки якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь.

3 МАТРИЦІ

3.1 Основні поняття. Типи матриць

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – елемент матриці, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, m – кількість рядків, n – кількість стовпчиків.

Матриці позначаються великими латинськими літерами: A, B, C.

Основні типи матриць:

1) якщо $m \neq n$, матриця називається *прямокутною*;

2) якщо $m = n$, – матриця *квадратна*;

3) якщо всі елементи під головною діагоналлю квадратної матриці дорівнюють нулю, то матриця називається *трикутною*;

4) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – *одинична* матриця;

5) матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи є нулі.

Розмірність матриці позначають $m \times n$.

3.2 Дії над матрицями

1) *Транспонування* – заміна місцями рядків і стовпчиків. Транспонована матриця позначається A^T.

2) *Додавання* матриць. Щоб додати дві матриці, потрібно додати відповідні елементи. Додавати можна матриці тільки однакової розмірності.

3) *Множення матриці на число*. Щоб помножити матрицю на число, потрібно помножити на це число кожний елемент матриці.

Приклад 3.2.1. Задано матриці:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $M = -2C_1 + 3C_2$.

Розв'язання. Знайдемо:

$$-2C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad 3C_2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$M = -2C_1 + 3C_2 = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -14 & -3 \end{pmatrix}.$$

Множення на число і додавання – це операції комутативні, асоціативні й дистрибутивні.

4) *Множення матриць*

Нехай задано дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (m \times n),$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (k \times r).$$

Множити можна матриці, у яких $n = k$. У результаті множення отримаємо матриці розмірності $(m \times r)$.

Множення матриць відбувається за правилом «рядок на стовпчик». Добуток матриці не є комутативним.

Приклад 3.2.2 Обчислити добуток $A \cdot B$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо:

$$C_{11} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3,$$
$$C_{12} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3),$$
$$C_{13} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 1,$$

$$C_{21} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3,$$
$$C_{22} = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3),$$
$$C_{23} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 1,$$
$$C_{31} = 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3,$$
$$C_{32} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3),$$
$$C_{33} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1.$$

Отже,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 11 \\ -9 & 18 & -2 \\ 19 & -7 & 29 \end{pmatrix}.$$

3.3 Ранг матриці

Ранг матриці – це кількість ненульових рядків у матриці, приведеної до східчастого вигляду. Перетворення матриць, які не змінюють ранг матриці, називаються *елементарними*. До них відносяться заміна місцями двох рядків, множення рядка на число, множення рядка на число і додавання до іншого рядка.

Поняття рангу матриці використовується при дослідженні систем лінійних рівнянь на сумісність.

Система лінійних рівнянь може бути записана у матричному вигляді таким чином: $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матриця системи,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

– розширена матриця, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – матриця невідомих,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капеллі

1. $rangA = rang\overline{A}$, система сумісна:

a) якщо при цьому $rangA = n$ (n – кількість невідомих), то система має єдиний розв'язок;

b) $rangA < n$ – система має безліч розв'язків (є невизначеною), тоді кількість базових змінних дорівнює $rangA$, а кількість вільних змінних $n - rangA$.

2. $rangA \neq rang\overline{A}$ – система не сумісна (не має розв'язків).

3.4 Обернена матриця

Нехай задана квадратна матриця A. Матриця A^{-1} називається *оберненою до матриці* A, якщо $A \cdot A^{-1} = E$, $A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема. Матриця має обернену матрицю, якщо визначник матриці не дорівнює 0.

Формула знаходження оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij}, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

4 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

4.1 Індивідуальні завдання до теми «Системи лінійних рівнянь»

Завдання 4.1.1. Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь.

1. $\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ 3x+y+z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=2\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y=\frac{2}{5} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+y+z=3 \\ x-4y+3z=-6 \\ 2x-z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{1}{3}y=\frac{7}{15} \\ \frac{4}{5}x-\frac{1}{4}y=1\frac{17}{20} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+3y=8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{4}{7}x+\frac{1}{7}y=1 \\ \frac{1}{5}x-\frac{3}{10}y=\frac{7}{10} \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x+3y-6z=17 \\ x+y-z=3 \\ -4-y+3z=-8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{5}{6}x+\frac{3}{5}y=2 \\ \frac{7}{8}x-\frac{1}{4}y=\frac{13}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x-y-z=3 \\ x-3y+z=-3 \\ x-7z=8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y=-2\frac{1}{12} \\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{2}y=\frac{2}{5} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{2}{5}x-\frac{1}{3}y=4 \\ \frac{7}{10}x+\frac{5}{6}y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 3x-2y+4z=-3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-1 \\ 2x+5y-3z=10 \\ 5x+6y-2z=13 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{1}{7}x+\frac{4}{7}y=1 \\ \frac{3}{10}x+\frac{1}{5}y=\frac{7}{10} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+y-z=4 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x + y - z = 7 \\ x + 2y + 4z = -1 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{5}{6}y = 2 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}y = \frac{13}{2} \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + 5y + z = 5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{5}{6}x + \frac{3}{10}y = \frac{7}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 4y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 3 \\ -3x + 5y + 6z = -4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y = 4 \\ \frac{7}{10}x + \frac{5}{6}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 4x - 4y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ x + 5y + z = 5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{7}{15} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{4}{5}y = 1\frac{17}{20} \end{cases}$

Завдання 4.1.2. Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь.

1. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$

2. . $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \\ 3x - y = z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 8y + 5z = 0 \\ 3x + 9y + 4z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x + 6y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \\ 3x + 6y + 4z = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 6x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ -x - 5y + z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ 5x + 7y - 4z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ 4x + 6y - z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 3z = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \\ x + 4y - 9z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ x + 5y - 7z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 9y + 4z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 4x + 10y + 3z = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 6y + 4z = 0 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

4.2 Індивідуальні завдання до теми «Визначники. Метод Крамера»

Завдання 4.2.1. Розв’язати нерівності або рівняння.

1. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & x & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} < 3$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x > 3$

5. $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 2x = 10$

6. $\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ x & x \end{vmatrix} + 6 \le 5x$

7. $\begin{vmatrix} 2+x & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} > 1$

8. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 = 6$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & x \end{vmatrix} - 4x\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 5 > 0$

10. $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 4 & 1 \end{vmatrix} + x = 0$

11. $\begin{vmatrix} 4x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x-3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3x = 2$

13. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - x^2 > 2$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 7x \geq 0$

15. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & 5 \\ x & 2 \end{vmatrix} \leq 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \leq x\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} - 2x\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \geq x + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 2x & -4 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 + \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 4$

22. $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3x\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 3x\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 4x = 3\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Завдання 4.2.2. Обчислити визначник четвертого порядку, перетворивши його так, щоб три елементи деякого ряду дорівнювали нулю

.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Завдання 4.2.3. Розв’язати за формулами Крамера систему лінійних рівнянь.

Варіант 1

1. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Варіант 2

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -9 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

Варіант 3

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Варіант 4

1. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = -10 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 5

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Варіант 6

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

Варіант 7

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

Варіант 8

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -10 \\ 5x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

Варіант 9

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -6 \\ -3x_1 + 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 10

1. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = 28 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

Варіант 11

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

Варіант 12

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

Варіант 13

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ -7x_1 - 5x_2 = -6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

Варіант 14

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 29 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Варіант 15

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

Варіант 16

1. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

Варіант 17

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -9 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Варіант 18

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

Варіант 19

1. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = -10 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Варіант 20

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 21

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Варіант 22

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

Варіант 23

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -10 \\ 5x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

Варіант 24

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -6 \\ -3x_1 + 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

Завдання 4.2.4. Проаналізувати, при яких a і b система має:
а) єдиний розв'язок;
б) не має розв'язку;
в) безліч розв'язків.

1. $\begin{cases} ax+4y+3z=6 \\ 2x+3y-z=-3 \\ 2x+y+4z=b \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-y+2z=9 \\ 3x+ay-z=-3 \\ x-5y+3z=b \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+4y-z=-3 \\ 2x-y+az=11 \\ 5x+3y+3z=b \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y-3z=b \\ 4x+4y-z=0 \\ ax+3y-4z=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-4y+5z=b \\ x+y-z=4 \\ ax-3y+4z=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-y+az=4 \\ x+y+2z=1 \\ 3x-y-4z=b \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y+3z=8 \\ ax-y-z=4 \\ -x+2y+4z=b \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ ax-y+z=2 \\ 3x+y+2z=b \end{cases}$

9. $\begin{cases} ax-y-z=2 \\ 3x+y-z=6 \\ x+2y+2z=b \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax+3y-z=6 \\ x+y+z=2 \\ 2x+4y=b \end{cases}$

11. $\begin{cases} ax+2y-z=5 \\ x+y+z=2 \\ 2x+3y=b \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x+y+2z=2 \\ ax+2y-z=3 \\ x+3y+z=b \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ ax+y-z=3 \\ -x-2y+3z=b \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x+2y+z=b \\ ax+y+z=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+ay+3z=1 \\ 2x+4y-3z=11 \\ x+2y-6z=b \end{cases}$

16. $\begin{cases} ax-3y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ 3x-2y=b \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x+4y+5z=5 \\ ax+3y-z=10 \\ y+6z=b \end{cases}$

18. $\begin{cases} ax-3y-2z=0 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+4y+3z=b \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-3 \\ x+y-5z=b \\ 3x+ay-z=5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+3y+z=b \\ 2x+2y-z=7 \\ x-y+az=3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} ax+4y+3z=6 \\ 2x+3y-z=-3 \\ 2x+y+4z=b \end{cases}$

22. $\begin{cases} ax+4y+5z=3 \\ x+3y+2z=b \\ x+y+3z=0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+4y-2z=8 \\ 3x+2y-z=b \\ 4x+ay-3z=17 \end{cases}$

24. $\begin{cases} ax+4y+5z=1 \\ x-3y+2z=-3 \\ 2x+y+7z=b \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+2y+3z=b \\ 3x-y+z=4 \\ ax+3y+2z=-3 \end{cases}$

4.3 Індивідуальні завдання до теми «Матриці»

Завдання 4.3.1. Задано матриці A й B. Знайти $A\times B$, $B\times A$, A^{-1}, $A^{-1}\times A$.

1. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

3. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

4. а) $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

5. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

6. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

7. а) $A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}5&4\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-7&1\\2&2\end{pmatrix}$

8. а) $A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\1&9&2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}3&1\\4&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1\\-6&1\end{pmatrix}$

9. а) $A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}8&-1\\5&-5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

10. а) $A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}3&-7\\1&-8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&1\\1&-5\end{pmatrix}$

11. а) $A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}3&-1\\3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-8&5\\0&2\end{pmatrix}$

12. а) $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1&0\\-9&6\end{pmatrix}$

13. а) $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}8&5\\1&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$м

14. а) $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$

15. а) $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&0&6\\4&3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}5&-8\\7&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-3\end{pmatrix}$

16. а) $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&3\end{pmatrix}$

17. а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

18. а) $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

19. а) $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

20. а) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

21. а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

22. а) $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & -7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

23. а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

24. а) $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

25. а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

26. а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}$

Завдання 4.3.2. Знайти власні числа і власні вектори матриці.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{14} \\ -2\sqrt{14} & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{21} \\ -\sqrt{21} & 5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 13 & -24 \\ -24 & 27 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Завдання 4.3.3. Знайти розв'язок системи за допомогою оберненої матриці.

Варіант 1

1. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Варіант 2

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -9 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

Варіант 3

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Варіант 4

1. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = -10 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 5

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Варіант 6

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

Варіант 7

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

Варіант 8

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -10 \\ 5x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

Варіант 9

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -6 \\ -3x_1 + 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 10

1. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = 28 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

Варіант 11

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

Варіант 12

1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 17 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

Варіант 13

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ -7x_1 - 5x_2 = -6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

Варіант 14

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 29 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Варіант 15

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

Варіант 16

1. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

Варіант 17

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -9 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Варіант 18

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

Варіант 19

1. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = -10 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Варіант 20

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Варіант 21

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 13 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Варіант 22

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

Варіант 23

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -10 \\ 5x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

Варіант 24

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -6 \\ -3x_1 + 5x_2 = 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

Завдання 4.3.4. Обчислити ранг матриці.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ -9 & -4 & -1 & -7 \\ -5 & -1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & -5 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & -15 \\ 3 & -7 & -10 \\ 6 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -10 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 9 & -4 & -1 & -7 \\ -7 & 2 & 3 & 11 \\ -16 & 6 & 4 & 18 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -5 \\ -7 & -5 & -12 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -9 & -7 & 2 \\ -5 & -4 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -5 & -8 & -13 \\ -3 & -7 & -10 \\ -1 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ -9 & -4 & -1 & -7 \\ -5 & -1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & -5 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & -15 \\ 3 & -7 & -10 \\ 6 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -10 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 9 & -4 & -1 & -7 \\ -7 & 2 & 3 & 11 \\ -16 & 6 & 4 & 18 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 11 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

5 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Розділ 1.1

Тема 1.1.1

Лінійні системи та їхні матриці. Визначені, невизначені й несумісні системи. Елементарні перетворення систем і матриць, зведення їх до ступінчатого вигляду. Метод Гауса.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.3], [3, Розділ 1, п. 1.4], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Тема 1.1.2

Однорідні системи. Застосування лінійних систем до розв'язання геометричних та алгебраїчних задач.

Література до теми: [2, Розділ 1, 1.1.4], [3, Розділ 1, п. 1.4, 1.5], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Розділ 1.2

Тема 1.2.1

Визначники II і III порядків. Перестановки та підстановки.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1, 1.1.2], [3, Розділ 1, п. 1.1], [4, Гл. 1, п. 2, 3].

Тема 1.2.2

Визначники n-го порядку, властивості. Мінори й алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. Методи обчислення визначників. *Визначник Вандермонда. Правило Лапласа.* Правило Крамера.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1], [3, Розділ 1, п. 1.1, 1.5, 1.6], [4, Гл. 1, п. 4–7].

Розділ 1.3

Тема 1.3.1

Матриці та дії над ними. Лінійні перетворення. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.5], [3, Розділ 1, п. 1.2, 1.3], [4, Гл. 2 п. 10, Гл. 3, п. 13, 15].

Тема 1.3.2

Обернена матриця, умови існування. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом. *Матриця оберненого перетворення.*

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.7–1.1.9], [3, Розділ 1, п. 1.3], [4, Гл. 3, п. 14].

6 ЗМІСТ КУРСУ

6.1 Лекції

Лекція 1

Лінійні системи та їхні матриці. Визначені, невизначені й несумісні системи. Елементарні перетворення систем і матриць, зведення їх до ступінчатого вигляду. Метод Гауса.

Література: [2, Розділ 1, п. 1.1.3], [3, Розділ 1, п. 1.4], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Дод.: [3]: §1, [4]: §10, [11]: п. 1.1.

Лекція 2

Однорідні системи. Застосування лінійних систем до розв’язання геометричних та алгебраїчних задач.

Література: [2, Розділ 1, 1.1.4], [3, Розділ 1, п. 1.4, 1.5], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Дод.: [3] §1, [4] §10, [11] п. 1.1.

Лекція 3

Визначники II і III порядків. Перестановки та підстановки.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1, 1.1.2], [3, Розділ 1, п. 1.1], [4, Гл. 1, п. 2, 3].

Дод.: [3] §1, [4] §10, [11] п. 1.1.

Лекція 4

Визначники *n*-го порядку, властивості. Мінори й алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. Методи обчислення визначників. *Визначник Вандермонда. Правило Лапласа.* Правило Крамера.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1], [3, Розділ 1, п. 1.1, 1.5], 1.6, [4, Гл. 1, п. 4–7].

Дод.: [3] §1,[4] §10, [11] п.1.1.

Лекція 5

Матриці та дії над ними. Лінійні перетворення. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.5], [3, Розділ 1, п. 1.2, 1.3], [4, Гл. 2 п. 10, Гл. 3, п. 13, 15].

Дод.: [1] §14, [3] §4 (п. 1–3), [4] §13, [11] п. 1.1

Лекція 6

Обернена матриця, умови існування. Розв’язання систем лінійних рівнянь матричним методом. *Матриця оберненого перетворення.*

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.7–1.1.9], [3, Розділ 1, п. 1.3], [4, Гл. 3, п. 14].

Дод.: [1] §14, [3] §4 (п. 1–3), [4] §13, [11] п. 1.1

Лекція 7

Огляд матеріалу модуля. Контроль модуля.

6.2 Практичні заняття

Заняття 1

Лінійні системи та їхні матриці. Елементарні перетворення систем і матриць, зведення їх до ступінчатого вигляду. Метод Гауса.

Література: [2, Розділ 1, п. 1.1.3], [3, Розділ 1, п. 1.4], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Дод.: [3]: §1, [4]: §10, [11]: п. 1.1.

Заняття 2

Фундаментальна система розв'язків. Вільні змінні. Однорідні системи. *Застосування лінійних систем до розв'язання геометричних та алгебраїчних задач.*

Література: [2, Розділ 1, 1.1.4], [3, Розділ 1, п. 1.4, 1.5], [4, Гл. 1, п. 1, Гл. 2 п. 11].

Дод.: [3] §1, [4] §10, [11] п. 1.1.

Заняття 3

Визначники ІІ і ІІІ порядків. Перестановки та підстановки. Інверсія. Парність, непарність.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1, 1.1.2], [3, Розділ 1, п. 1.1], [4, Гл. 1, п. 2, 3].

Дод.: [3] §1, [4] §10, [11] п. 1.1.

Заняття 4

Визначники *n*-го порядку, властивості. Мінори й алгебраїчні доповнення. Методи обчислення визначників. Правило Крамера.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.1], [3, Розділ 1, п. 1.1, 1.5, 1.6], [4, Гл. 1, п. 4–7].

Дод.: [3] §1,[4] §10, [11] п.1.1.

Заняття 5

Матриці та дії над ними. Лінійні перетворення. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.5], [3, Розділ 1, п. 1.2, 1.3], [4, Гл. 2 п. 10, Гл. 3, п. 13, 15].

Дод.: [1] §14, [3] §4 (п. 1–3), [4] §13, [11] п. 1.1

Заняття 6

Побудова оберненої матриці. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом.

Література до теми: [2, Розділ 1, п. 1.1.7–1.1.9], [3, Розділ 1, п. 1.3], [4, Гл. 3, п. 14].

Дод.: [1] §14, [3] §4 (п. 1–3), [4] §13, [11] п. 1.1

Заняття 7

Огляд матеріалу модуля. Контроль модуля.

7 КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ

7.1 Види контролю

Передбачено виконання трьох контрольних точок. Терміни складання контрольних точок визначаються графіком складання модулів.

Форма і зміст контрольних точок

1. Контрольна робота 1:
   Визначники
   Матриці
   Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера
   Теорема Кронекера-Капеллі
2. Контрольна робота 2:
   Рівняння з визначниками
   Дії над матрицями
   Дослідження систем з дівох рівнянь.
3. Контрольна робота 3:
   Обчислення визначників вищих порядків
   Дослідження систем лінійних рівнянь

7.2 Теоретичні питання

1. Еквівалентні системи лінійних рівнянь (СЛР). Елементарні перетворення СЛР.
2. Метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих).
3. Перестановки. Загальна кількість перестановок з *n* елементів. Інверсії. Парність (непарність) перестановки.
4. Підстановки. Загальна кількість підстановок степеня *n*. Парність (непарність) підстановок. Тотожні підстановки. Добуток підстановок. Обернена підстановка.
5. Визначник *n*-го порядку. Визначники 2-го та 3-го порядків. Властивості визначників. Верхня й нижня трикутні матриці та їхні визначники.
6. Мінори й алгебраїчні доповнення. Лема про добуток мінора на його алгебраїчне доповнення.
7. Теорема Лапласа та висновки з неї (про розкладання визначника за елементами рядка або стовпця).

8. Лінійні операції над матрицями. Протилежна матриця. Властивості лінійних операцій над матрицями.

9. Узгоджені матриці. Добуток матриць та його властивості.

10. Операція транспонування матриць та її властивості.

11. Обернена матриця, її властивості та правило знаходження.

12. Елементарні матриці. Елементарні перетворення рядків і стовпців матриць.

13. Метод Жордана-Гаусса знаходження оберненої матриці.

14. n-вимірний векторний простір, лінійний підпростір R^n.

15. Лінійна залежність векторів та її властивості. Базис простору R^n. Базис лінійного підпростору.

16. Ранг системи векторів, ранг матриці.

17. Сумісність СЛР. Теорема Кронекера-Капеллі.

18. Системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / Курош А. Г. – М. : Наука, 1971. – 431 с.
2. Ильин В. А. Линейная алгебра / Ильин В. А., Поздняк В. Г. – М. : Наука, 1978.
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / Гельфанд И. М. – М., 1978.
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. підручник / Рудавський Ю .К., Костробій П. П., Луник Х. П., Уханська Д. В. – Львів : Бескид Біт, 2002.
5. Дураков Б. К. Краткий курс высшей алгебры / Дураков Б. К. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И. В. – М. : Наука, 1978.
7. Фадеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Фадеев Д. К., Соминский И. С. – М. : Наука, 1972.

11. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П. С. – М. : Наука, 1979.
12. Марченко И. Ф. Методические указания к изучению курса «Линейная алгебра. Линейные пространства и преобразования» / Марченко И. Ф. – Мариуполь : ПГТУ, 2002.
13. Головина Л. И. Линейная алгебра и ее некоторые приложения / Головина Л. И. – М. : Наука, 1975.
14. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии / Рублев А. Н. – М. : Высшая школа, 1972.
15. Крутицкая Н. Ч. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А. – М. : Высшая школа, 1985.
16. Алгебра и геометрия (высшая алгебра и аналитическая геометрия) : методическое пособие для студентов специальности «Прикладная математика» дневной и заочной формы обучения / А. В. Зыза, А. М. Кизименко, В. В. Лиманский, В. И. Хаджинов. – Донецк : ДонНУ, 2006.
17. Алгебра и геометрия (линейная алгебра и аналитическая геометрия) : методическое пособие для студентов специальности «Прикладная математика» дневной и заочной формы обучения / В. В. Лиманский, Д. В. Лиманский. – Донецк : ДонНУ, 2008.

Навчальне видання

РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна,

КОЛЕСНИКОВ Сергій Олексійович

АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Частина 1

Редагування, комп’ютерне верстання Я. О. Бершацька

112/2020. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 2,8
Обл.-вид. арк. 2,2. Тираж 30 прим. Зам. № 30.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.