Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Підручник

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 10 від 29.04.2021

Краматорськ
ДДМА
2021

УДК 372.851
П75

Автори:
О. Г. Ровенська, О. А. Костіков, О. О. Чумак,
К. В Власенко, О. М. Данільчук

Рецензенти:

Лов'янова І. В., д-р пед. наук, професор, професор кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету;

Дзюба М. В., канд. фіз.-мат. наук, викладач територіально відокремленого структурного підрозділу Національного авіаційного університету «Слов'янський фаховий коледж Національного авіаційного університету»;

Калініна І. М., канд. пед. наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Приазовський державний технічний університету.

Прикладна математика : підручник /О. Г. Ровенська, О. А. Костіков, О. О. Чумак, К. В Власенко, О. М. Данільчук – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 250 с.
ISBN 978-966-379-983-4

Підручник призначено для студентів, що навчаються за освітньо-професійними програмами з галузей «Управління й адміністрування», «Соціальні та поведінкові науки», «Природничі науки», «Сфера публічного управління й адміністрування», «Освіта (Педагогіка)» й інших нематематичних спеціальностей. Використання підручника дозволяє сформувати у майбутніх фахівців систему спеціальних знань і навичок оволодіння сучасними математичними технологіями та їхнім практичним використанням для побудови моделей, спрямованих на використання в технологічному, економічному й керівному процесах.

УДК 372.851

ISBN 978-966-379-983-4

ЗМІСТ

ВСТУП

У підручнику показано шляхи організації навчального курсу «Прикладна математика». Цілеспрямоване формування математичного стилю мислення у процесі вивчення математичних дисциплін сприяє формуванню у майбутнього фахівця здатності використовувати свої математичні знання для розв’язання різного роду практичних і теоретичних задач, які зустрічаються у професійній діяльності.

У зв'язку з реформуванням вищої школи, пов'язаної з орієнтацією України на європейську систему вищої освіти, значної актуальності набувають курси, що дозволяють розглядати взаємозв’язки вивчених наук, взаємне використання їхніх визначень і методів. Математика відіграє важливу роль у природничо-наукових дослідженнях. Прикладна математика для багатьох галузей знань є не тільки знаряддям кількісних розрахунків, а й методом моделювання.

Прикладні задачі лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу – це універсальний засіб теоретичного вивчення навколишнього світу через моделювання процесів, що відбуваються в ньому. Вивчення цих розділів дозволяє сформувати у майбутніх фахівців систему спеціальних знань і навичок оволодіння сучасними мережевими технологіями й їхнім практичним використанням для пошуку, оброблення й аналізування даних, спрямованих на використання в технологічному або економічному процесі.

Посібник надає можливість викладачам покращити організацію навчальної діяльності студентів із розділів «Матриці», «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь», «Вектори», «Аналітична геометрія на площині», «Аналітична геометрія у просторі», «Границі», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Функції двох змінних», «Первісна і невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Диференціальні рівняння», а студентам – вдосконалювати навички самооцінювання й самоконтролю. Кожен розділ містить розгорнутий лекційний матеріал, завдання для самостійної роботи, багато уваги приділяється методам розв’язання завдань практичного змісту.

Підручник призначено для студентів, що навчаються за освітньо-професійними програмами з галузей «Управління й адміністрування», «Соціальні та поведінкові науки», «Природничі науки», «Сфера публічного управління й адміністрування», «Освіта (Педагогіка)» й інших нематематичних спеціальностей.

1 ВИЗНАЧНИКИ

1.1 Визначники. Основні поняття. Правила обчислення визначників другого, третього порядків

У математиці при розв'язанні багатьох задач дуже часто використовують вираз, який називають *визначником* або *детермінантом.* Позначається $|A|$ або $\det A$, або $\Delta(A)$.

Означення 1.1. *Визначником 2-го порядку* називається таблиця, яка містить 4 елементи.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – елементи визначника;

a_{11}, a_{22} – елементи *головної діагоналі*;

a_{12}, a_{21}– елементи *неголовної діагоналі* або *допоміжної діагоналі*;

a_{ij}– де i – номер рядочка, j – номер стовпчика.

Правило обчислення визначника 2-го порядку

Визначник 2-го порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{1.1}$$

Приклад 1.1. Обчислити визначник:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 5 = 16 - 30 = -14;$

б) $\begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ a & a+3 \end{vmatrix} = (a+4)(a+3) - 3a = a^2 + 4a + 3a + 12 - 3a = a^2 + 4a + 12;$

в) $\begin{vmatrix} tg\alpha & 1 \\ -1 & tg\alpha \end{vmatrix} = tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Зауваження 1.1. Якщо припустити, що елементи визначника 2-го порядку є координатами векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, де $\overline{a} = (a_{11}; a_{12})$, $\overline{b} = (b_{21}; b_{22})$, то визначник чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 1.1).

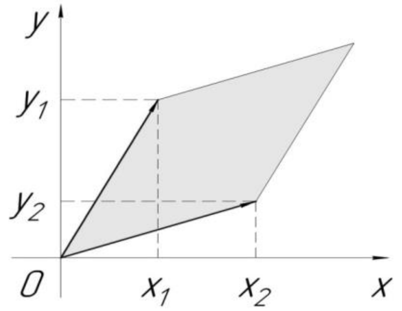

Рисунок 1.1

Означення 1.2. *Визначником 3-го порядку* називається таблиця, яка містить 9 елементів.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (1.2)$$

де a_{11}, a_{22}, a_{33} – елементи *головної діагоналі.*

Правило обчислення визначника 3-го порядку

I спосіб. Правило трикутника

Перші три доданки є добутками елементів головної діагоналі й елементів вершин трикутників з основами, паралельними головній діагоналі. Три останні доданки в правій частині мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів допоміжної діагоналі й елементів вершин трикутників з основами, паралельними допоміжній діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} \qquad (1.3)$$

Схеми обчислення визначника наведено на рисунку 1.2.

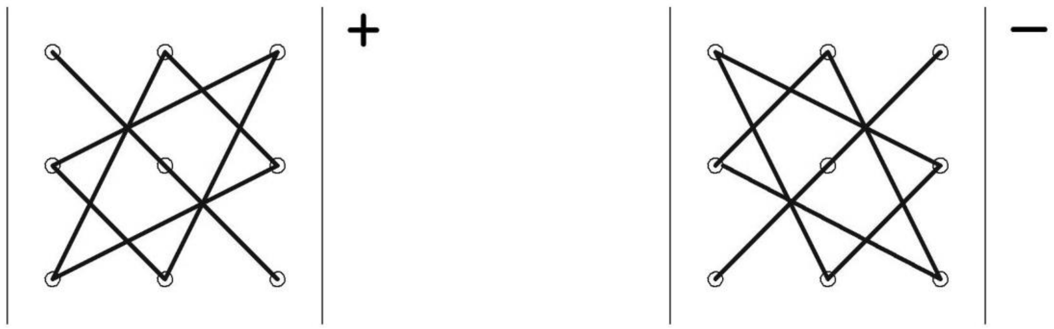

Рисунок 1.2

ІІ спосіб. Правило Саррюса

Визначник 3-го порядку можна обчислити за правилом Саррюса, тобто, приписавши знизу або праворуч два рядочки (стовпчики), знаходять добуток елементів, які знаходяться на головній діагоналі й на лініях, їй протилежних. Добутки беруться з їхніми знаками.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right| =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}. \qquad (1.4)$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\right| =$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}. \qquad (1.5)$$

Приклад 1.2. Обчислити визначник за правилом трикутника.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + (-16) - 20 - (-6) - 0 = 9 - 16 - 20 + 6 = -21.$$

Зауваження 1.2. Якщо припустити, що елементи визначника 3-го порядку є координатами векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, де $\overline{a} = (a_{11}; a_{12}; a_{13})$, $\overline{b} = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$, $\overline{c} = (c_{31}; c_{32}; c_{33})$, то визначник 3-го порядку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (рис. 1.3).

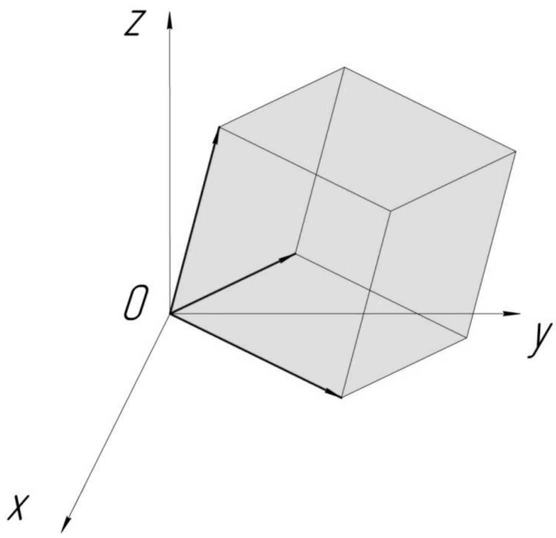

Рисунок 1.3

Властивості визначників

1. Величина визначника не змінюється при заміні кожного його рядка стовпчиком із тим же елементом.

Зауваження 1.3. Заміна кожного рядка визначника його стовпчиком із тим же номером називається *транспонуванням* визначника.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядочки (стовпчики), то визначник змінить знак на протилежний.

Наслідок 1.1. Визначник із двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.

3. Якщо всі елементи рядка (стовпчика) містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Наслідок 1.2. Визначник із двома пропорційними рядочками (стовпчиками) дорівнює нулеві.

4. Якщо визначник має рядок (стовпчик), який складається з нулів, то він дорівнює нулеві.

5. Якщо у визначнику елементи i-го рядка (j-го стовпчика) є сумою двох доданків, тоді він дорівнює сумі двох відповідних визначників.

6. Визначник матриці не зміниться якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.

7. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) матриці на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику матриці, а сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, \textit{ якщо } i = j, \\ 0, \textit{ якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{1.6}$$

8. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

1.2 Мінори й алгебраїчні доповнення

Означення 1.3. *Мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* n*-го порядку* називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержуємо з визначника $|A|$ шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Означення 1.4. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* називають, мінор цього елемента, взятий зі знаком «$+$» якщо сума індексів $(i+j)$ парна, і зі знаком «$-$», якщо $(i+j)$– непарна, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{1.7}$$

Приклад 1.3. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} *і* a_{32} визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot(-2\cdot 5-2\cdot 1)=-2\cdot(-10-2)=-2\cdot(-12)=24,$$

$$A_{32}=(-1)^{2+3}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot(3\cdot 5+3\cdot 1)=-2\cdot(15+3)=-2\cdot 18=-36.$$

Приклад 1.4. Використовуючи співвідношення (1.6), обчислити визначник

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Розв’язання

Маємо $a_{11}=1, a_{12}=2$, $a_{13}=-3$. Знайдемо A_{11}, A_{12}, A_{13}. Алгебраїчне доповнення $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} – мінор, який відповідає елементові a_{ij}. Тому

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=\left(-1\right)\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5.$$

Отже, визначник

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}A_{1k}=1\cdot 1+2\left(-2\right)+\left(-3\right)\left(-5\right)=12.$$

Правило обчислення визначника довільного порядку

Для обчислення визначників порядку $n<3$ використовують теорему Лапласа.

Теорема (Лапласа). Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхнє алгебраїчне доповнення.

$$\Delta_n=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\ldots+a_{in}\cdot A_{in}\qquad 1\le i\le n. \qquad (1.8)$$

Формула (1.8) називається *розкладом визначника за* i *-му рядочком.*

Зауваження 1.4. Обчислення визначника *n-го* порядку зводиться до обчислення визначника $(n-1)$-го порядку. Для скорочення обчислень визначник доцільно зводити до нулів і тоді не потрібно знаходити алгебраїчних доповнень тому, що добуток 0 на його алгебраїчне доповнення дорівнює 0. Властивості визначника дозволяють робити еквівалентні перетворення визначника й одержувати якомога більше нулів в деякому рядку або стовпці.

Приклад 1.5. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Зробимо перетворення над елементами цього визначника, користуючись властивістю 7. Помножимо елементи першого стовпця на (-1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = |A|.$$

В отриманому визначнику всі елементи третього рядка, крім одного, a_{31}, дорівнюють нулю. Тому, розкладаючи за елементами третього рядка, отримаємо:

$$|A| = \sum a_{3k} A_{3k} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -9 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 12.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.1 Виписати мінори й алгебраїчні доповнення для всіх елементів другого рядка визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Завдання 1.2 Обчислити визначник.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

2 МАТРИЦІ

2.1 Матриця. Основні поняття. Види матриць

Означення 2.1. *Матрицею розмірів* $m \times n$ називається сукупність $m \times n$ чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.

Ми будемо записувати матрицю у вигляді

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

або скорочено

$$A = \left| a_{ij} \right| \quad (i = (\overline{1,m}; j = \overline{1,n}). \qquad (2.2)$$

Позначаються матриці великими буквами латинського алфавіту.

Числа a_{ij}, які утворюють цю матрицю, називається її **елементами**. Перший індекс елемента вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

За допомогою матриць зручно записувати деякі економічні залежності (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Ресурси	**Галузі економіки**	
	Промисловість	**Сільське господарство**
Електроенергетичні	5,3	4,1
Трудові	2,8	2,1
Водні	4,8	5,1

Наприклад, таблиця розподілу ресурсів за окремими галузями економіки може бути записана в компактній формі у вигляді матриці розміром *3 × 2*:

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}.$$

У цьому записі, наприклад, матричний елемент $a_{11}=5{,}3$ показує, споживану промисловістю електроенергію, а елемент $a_{22}=2{,}1$ – скільки трудових ресурсів потрібно для сільського господарства.

Види матриць

Означення 2.2. *Числовою матрицею*, або просто *матрицею,* називається прямокутна таблиця чисел, елементами якої є числа.

Матриця, що складається із одного рядочка, називається матрицею (вектором)-рядочком, або просто рядочком, а із одного стовпчика – матрицею (вектором)-стовпчиком, або просто стовпчиком. Так

$$\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{11},\mathrm{a}_{12},\ldots,\mathrm{a}_{1\mathrm{n}})$$

– це матриця-рядочок,

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

– це матриця-стовпчик.

Нехай дано систему рівнянь

$$\begin{cases} \mathrm{a}_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ \mathrm{a}_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\cdots+a_{mn}\cdot x_n=b_m. \end{cases} \tag{2.3}$$

Запишемо цю систему рівнянь у вигляді матриці:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Матриця *B*, яка містить усі елементи основної матриці й стовпчик, що складається з вільних членів системи (2.4), називається *розширеною матрицею системи*.

Означення 2.3. Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою*, і позначають 0.

Наприклад,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 2.4. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається *квадратною* і позначається $A = \left|a_{ij}\right|_1^n$. Квадратну матрицю, яка складається з n рядків n стовпців, називають матрицею n-го порядку. Елементи $a_{ij}, (i = \overline{1, n})$ матриці утворюють її головну діагональ.

Наприклад,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

– це квадратна матриця третього порядку.

Означення 2.5. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

– це діагональна матриця другого порядку.

Означення 2.6. Діагональна матриця з елементами a_{ij}=1(i=$\overline{1, n}$) називається *одиничною* й позначається E.

Наприклад,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– це одинична матриця третього порядку.

Означення 2.7. Матриця $A^T = \left|a_{ij}^T\right|$ називається *транспонованою* щодо матриці A=$\left|a_{ij}\right|$, якщо її елементи $a_{ij}^T = a_{ij}$, тобто рядок стає стовпцем.

Означення 2.8. Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, що знаходяться вище (або нижче) від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Зокрема матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

називається *правою*, або *верхньою трикутною*, а матриця

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

називається *лівою*, або *нижньою трикутною*.

Означення 2.9. Дві матриці A і B називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий розмір й їхні відповідні елементи рівні.

Якщо всі діагональні елементи діагональної матриці однакові, то така матриця називається *скалярною*.

2.2 Лінійні операції над матрицями. Транспонування матриць

Над матрицями, як і над числами, можна виконувати ряд операцій, причому деякі з них аналогічні операціям над числами, а деякі специфічні.

Множення матриці на число

Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, елементи якої $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для i=1,2, …, m, j=1, 2, …, n.

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

то

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 15 & 30 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 2.1. Спільний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак матриці.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

У випадку добутку матриці A на число 0 є нульова матриця, тобто $0 \cdot A = 0$.

Додавання матриць

Сумою двох матриць A та B однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C = A + B$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ i=1,2, …, m, j = 1, 2, …, n. (тобто матриці додаються поелементно). Тобто

$$\mathrm{A} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{n1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ D = A + C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & -1 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Віднімання матриць

Різниця двох матриць однакового розміру визначається через такі операції: $A - B = A + (-1) \cdot B$

Багато властивостей, що властиві операціям над числами, справедливі й для операцій над матрицями (що слідує із означень цих операцій). Нехай A, B і C – матриці, що мають однаковий розмір, а α і β – деякі дійсні числа. Тоді:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5) $(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$;
6) $A + 0 = A$, де 0 – нульова матриця;
7) $0 \cdot A = 0$.

Наслідок 2.2. Додавати й віднімати можна матриці лише однакового розміру.

Множення матриць

Операція множення матриці A на матрицю $B,$ тобто добуток $A{\cdot}B$ матриці A на матрицю B визначений лише за умови, що кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядочків матриці В.

Нехай $A=\left|a_{ij}\right|$, $B=\left|b_{jk}\right|$, де $i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,p}.$

Тоді *добутком* $A\cdot B$ матриць $A=\left|a_{ij}\right|$ і $B=\left|b_{jk}\right|$ (матриця A розміру $m \times n,$ а матриця B розміру $n \times p$) називається матриця C = $\left|c_{ik}\right|$ розміру $m \times p$ де

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}\,. \qquad (2.7)$$

Добуток $A{\cdot}B$ матриць A та B існує лише при виконанні умови узгодженості: кількість стовпців матриці A (першого множника) повинна дорівнювати кількості рядків матриці B (другого множника) (в цьому випадку матриця A називається узгодженою з матрицею B).

Правило 2.1. Добутком $A\cdot B$ матриці A розміру $m \times n$ і матриці B розміру $n \times p$ називається матриця C розміру $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Тобто, кожен елемент матриці C знаходиться за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{ij}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj}\,. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.1. Знайти добуток матриць $A{\cdot}B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

1. Знайдемо розмір матриць A та B (обов’язково перевірити умову узгодженості) розмір матриці A 2×3, а розмір матриці B 3×3, тому отримаємо матрицю C розміром 2×3.

2. Виконуємо множення матриць за правилом

$$C=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1\\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}.$$

Отримаємо

$$C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Властивості

1) $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
2) $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$;
3) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$;
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)\cdot B = A(\alpha B)$.

Ми знаємо про поняття одиничної матриці. Неважко переконатись, що в алгебрі матриць вона відіграє роль одиниці, тобто можна відмітити ще дві властивості, що пов'язані з множенням матриць:

5) $AE = A$;
6) $EA = A$.

Іншими словами, добуток будь-якої матриці на одиничну матрицю, якщо це має сенс, не змінює дану матрицю.

Зауваження 2.1. *Добуток матриць не має властивості комутативності,* тобто $A\cdot B \neq B\cdot A$. Якщо добуток двох матриць не залежить від порядку множників, тобто $A\cdot B = B\cdot A$, тоді говорять, що ці матриці комутують. Тобто якщо A – квадратна матриця порядку n, тоді $A\cdot E = E\cdot A = A$.

Однак є і специфічні властивості матриць. Так, операція множення матриць має деякі відмінності від множення чисел:

а) якщо добуток матриць AB існує, то після перестановки множників місцями добуток матриць BA може й не існувати. Дійсно, у прикладі 1 ми отримали добуток матриць A розміру 2×3, а розмір матриці B 3×3, а добуток матриць B розміру 3×3 на матрицю A розміру 2×3 не існує, оскільки кількість стовпчиків матриці B не співпадає з кількістю рядочків матриці A;

б) якщо навіть добутки AB і BA існують, то вони можуть бути матрицями різних розмірів;

в) якщо обидва добутки AB і BA існують й обидві матриці одного розміру (це можливо тільки при множенні квадратних матриць A і B одного порядку), *комутативний (переставний) закон множення, взагалі не виконується,* тобто $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Особливі властивості операції множення

1. Якщо добуток AB існує, то після перестановки множників BA його може не існувати.

2. Якщо добутки AB та BA існують, то вони можуть бути матрицями різних розмірів.

3. Якщо AB і BA існує й обидві матриці одного розміру (що можливо при множенні квадратних матриць A і B одного порядку), комутативний закон множення матриць у загальному випадку не виконується, тобто $AB \neq BA$.

Проте існують такі матриці A та B, за яких $AB = BA$. Вони мають назву переставних (комутативних).

В окремому випадку комутативний закон поширюється на добуток будь-якої квадратної матриці A n-го порядку на одиничну матрицю E того самого порядку, при цьому $AE = EA = A$.

4. Добуток двох ненульових матриць може бути рівним нуль-матриці, тобто з того, що $A \times B = \Theta$ зовсім не впливає, що $A = \Theta$ або $B = \Theta$.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \Theta, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq \Theta,$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta.$$

Піднесення до степеня

Цілим додатнім степенем A^m $(m > 1)$ квадратної матриці A називається добуток m матриць, що дорівнюють A, тобто

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ разів}}.$$

Зазначимо, що операція піднесення до степеня виконується тільки для квадратних матриць.

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$. Неважко показати, що $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

Однак рівність $(A \cdot B)^m = A^m \cdot B^m$ справедлива тільки для переставних матриць.

Транспонування матриці

Під операцією *транспонування* розуміють перехід від матриці A до матриці A^T або A', в якій рядочки й стовпчики міняються місцями із збереженням порядку. Матриця A^T називається *транспонованою* відносно матриці A. Тобто, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Із визначення слідує, що якщо матриця *A* має розмір *m* × *n,* то транспонована матриця A^T має розмір *n* × *m*.

Властивості операцій транспонування

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3) $(\alpha A)^t = \alpha A^T$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Очевидно, що при транспонуванні матриці її діагональні елементи залишаються на своїх місцях.

Слід матриці

Слідом квадратної матриці A називається сума її діагональних елементів.

Слід позначається *trA* (від англ. trace – слід) (у технічній літературі зустрічається також позначення сліду матриці *spA* від німец. spur – слід). Він відіграє важливу роль в дослідженні матриць і в їх застосуванні (наприклад, в економетрії).

Основні властивості сліду матриці

1. При транспонуванні матриці її слід не змінюється (оскільки операція транспонування не змінює діагональні елементи), тобто $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^T$.

2. Якщо матриця *D* діагональна з елементами $d_{ii} (i = 1, 2, ..., n)$, то для будь-якого натурального *m* $tr(D^m) = \sum_{i=1}^{m} d_{ii}^m$.

3. Якщо *A* і *B* – квадратні матриці *n*-го порядку, то tr(AB) = tr(BA) (хоча в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$).

4. Якщо *C* невироджена матриця (будемо розглядати пізніше) n-го порядку, то для будь-якої матриці *A* *n*-го порядку виконується рівність: tr (C^{-1} AC) = trA.

Приклад 2.2. Перевірити властивості сліду матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ m=4.$$

Розв'язання

$$trA=1+4=5;\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix};\ trA^T=1+4=5.$$

$$D^4=\begin{pmatrix}2^4 & 0\\ 0 & 3^4\end{pmatrix};\ trD^4=2^4+3^4=16+81=97.$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 11 & 4\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 8\end{pmatrix};$$

$$tr(AB)=tr(BA)=9.$$

$$|C|=-1\neq 0.$$

Легко знайти

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

тоді

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix};\ tr(C^{-1}AC)=5=trA.$$

2.3 Обернена матриця. Розв'язування матричних рівнянь

Для кожного числа $a\neq 0$ існує обернене число a^{-1} таке, що добуток $a\cdot a^{-1}=a$. Для квадратних також вводиться аналогічне поняття.

Означення 2.10. Матриця A^{-1} називається *оберненою відносно квадратної матриці A,* якщо при множенні цієї матриці на дану як справа, так і зліва отримаємо одиничну матрицю:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E. \qquad (2.10)$$

Із означення випливає, що тільки квадратна матриця має обернену; у цьому випадку й обернена матриця є квадратною того ж порядку.

Однак не кожна квадратна матриця має обернену. Якщо $a \neq 0$ є необхідною й достатньою умовою існування числа a^{-1}, то для існування матриці A^{-1} такою умовою є потреба $|A| \neq 0$.

Якщо визначник матриці відмінний від нуля ($|A| \neq 0$), то така квадратна матриця називається *невиродженою,* або *неособливою;* у противному випадку (при $|A| = 0$) *виродженою,* або *особливою.*

Теорема 2.1. *(Необхідна й достатня умова існування оберненої матриці).* Обернена матриця A^{-1} існує (і єдина) тоді і тільки тоді, коли вихідна матриця невироджена.

Доведення:

Необхідність. Нехай матриця A має обернену A^{-1} тобто $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. За властивостями визначників отримаємо $|A^{-1} \cdot A| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, тобто $|A| \neq 0$ і $|A^{-1}| \neq 0$.

Достатність. Нехай $|A| \neq 0$. Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку $\bar{A}$, яку будемо називати *приєднаною* (у літературі приєднану матрицю називають також *взаємною* або *союзною*). Її елементи являються алгебраїчними доповненнями елементів матриці A^T, транспонованої до A: $\tilde{a}_{ij} = A_{ij}^T = A_{ij} (i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n)$. Тоді елементи добутку матриць $\tilde{A} \cdot A = B$ визначається за правилом множення матриць:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \tilde{a}_{is} a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} a_{sj} = \begin{cases} |A| & при \quad i = j, \\ 0 & при \quad i \neq j. \end{cases}$$

Тому матриця B є діагональною, елементи її головної діагоналі дорівнюють визначнику вихідної матриці:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & |A| \end{pmatrix}.$$

Аналогічно доводиться, що добуток A на $\tilde{A}$ дорівнює тій же матриці B: $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$. Звідси слідує, що якщо в якості оберненої матриці взяти матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}, \quad . \qquad (|A| \neq 0), \qquad (2.11)$$

то добутки $A^{-1}\cdot A$і $A^{-1}\cdot A$дорівнюють одиничній матриці *E* *n*-го порядку:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot B = E\,.$$

Доведемо єдиність оберненої матриці. Припустимо, що існують ще матриці *X* і *У* такі, що $X \neq A^{-1} i \quad Y \neq A^{-1}$, (де матриця A^{-1}отримана з формули (11)), і виконується рівності: $AX = E$ і $YA = E$. Тоді, помноживши на A^{-1} зліва обидві частини першої з цих рівностей, отримаємо $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot E$, звідки $EX = A^{-1}\cdot E$, тобто $X = A^{-1}$. Аналогічно, помноживши обидві частини другої рівності на A^{-1} справа, отримаємо $Y = A^{-1}$. Єдиність доведена.

Алгоритм обчислення оберненої матриці

1. Знаходимо визначник вихідної матриці. Якщо $|A| = 0$, то матриця *A* вироджена й обернена матриця A^{-1} не існує. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця *A* невироджена й обернена матриця існує.
2. Знаходимо матрицю A^T, транспоновану до *A*.
3. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці $A_{ij}^T = A_{ij}\,(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$ і складаємо з них приєднану матрицю *A*: $\tilde{a}_{ij} = A_{ij}^T = A_{ij}\,(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$.
4. Знаходимо обернену матрицю за формулою (2.11).
5. Перевіряємо правильність знаходження оберненої матриці A^{-1}, виходячи із її означення: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Приклад 2.3. Знайти матрицю обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

Розв’язання.

Визначник $|A| = -4 \neq 0$ (знаходили раніше), тому існує обернена матриця A^{-1}.

Знаходимо транспоновану до *A* матрицю. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*. Використовуючи формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}\,,$$

де M_{ij} – мінор, який відповідає елементові a_{ij};

M_{ij} – визначник матриці порядку n – 1, утвореної з матриці A викреслюванням (умовно) i-го рядка й j-го стовпця.

$$A^T = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записуємо формулу, щоб знайти обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

де $\tilde{A}$– матриця, яка складається з елементів, що є алгебраїчними доповненнями, і рядки замінені на стовпці, тобто транспоновані.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці за формулою $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Зауваження 2.2. Перевірку можна здійснити так: якщо добуток $A^{-1} \cdot A = E$, то матриця A^{-1} знайдена вірно.

Зауваження 2.3. Якщо матриця А квадратна другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, визначник якої $|A| \neq 0$, то обернену до неї матрицю A^{-1} обчислюють за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (2.12)$$

Тобто елементи головної діагоналі матриці А потрібно поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (– 1) й одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|A|}$

Можна показати, що будь-яку невироджену квадратну матрицю A за допомогою елементарних перетворень *тільки рядочків* або *тільки стовпчиків* можна привести до одиничної матриці E того ж порядку. При цьому ті ж перетворення, здійснені над матрицею E в тому ж порядку, приводять її до оберненої матриці A^{-1} На цьому оснований ще один спосіб знаходження оберненої матриці. Зручно здійснювати елементарні перетворення над матрицями A й E одночасно, записуючи їх поруч через риску.

Властивості невироджених матриць

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $\left(A^{m}\right)^{-1} = (A^{-1})^{m}$.
4. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
5. $\left(A^{T}\right)^{-1} = (A^{-1})^{T}$.
6. $\left(\alpha A\right)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}, \alpha \neq 0$.

Матричні рівняння й їх розв'язання

Означення 2.11. Рівняння виду $A \cdot X = B$, де A, X і B – матриці, називається *матричним рівнянням.*

Розглянемо три види матричних рівнянь

$$A \cdot X = B, \tag{2.13}$$
$$X \cdot A = B, \tag{2.14}$$
$$A \cdot X \cdot B = C. \tag{2.15}$$

Розв'язання кожного виду матричного рівняння полягає в такому: потрібно помножити це рівняння на обернену матрицю.

Тому, щоб розв'язати рівняння (2.13), потрібно помножити це рівняння на обернену матрицю зліва одночасно

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Згідно з означення оберненої матриці, добуток A^{-1}, A дорівнює одиничній матриці E, тобто

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

При множенні на одиничну матрицю матриця X не зміниться, тому отримаємо розв'язок матричного рівняння першого типу:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.16}$$

Аналогічно можна знайти й розв’язок матричного рівняння другого типу. Але в цьому випадку ми будемо домножати на обернену матрицю, але уже справа, тому отримаємо такий розв’язок:

$$X = B \cdot A^{-1}. \qquad (2.17)$$

Щоб розв’язати рівняння третього типу, потрібно одночасно помножити на обернену матрицю до матриць *A* зліва, а до матриці *B* справа:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}. \qquad (2.18)$$

2.4 Власні числа й власні вектори матриць

Нехай *A* – квадратна матриця порядку *n*.

Означення 2.12. Ненульовий вектор *X* називається *власним вектором* матриці А, якщо існує таке число λ, що виконується рівність

$$AX = \lambda X . \qquad (2.19)$$

Число λ називається *власним числом* матриці А.

Використовуючи одиничну матрицю *E*, рівність (2.19) можна записати у вигляді однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda E)X = 0. \qquad (2.20)$$

Для того щоб система (2.20) мала нетривіальний розв’язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулеві:

$$|A - \lambda E| = 0. \qquad (2.21)$$

Рівність (2.21) називають *характеристичним рівнянням* матриці *A*, а його корені λ – *власними числами* матриці *A*.

Властивості власних векторів і власних чисел

1. У дійсному просторі власними числами будуть лише дійсні корені характеристичного рівняння (2.21), а в комплексному просторі – усі корені рівняння (2.21).
2. Якщо всі власні числа матриці різні, то всі її власні вектори лінійно незалежні й взаємно ортогональні.
3. Якщо квадратна матриця *A* порядку *n* має різні власні числа, то матриця $B = (X_1, X_2, ..., X_n)$, стовпчиками якої є власні вектори $X_1, X_2, ..., X_n$, має обернену матрицю B^{-1}.

4. Якщо квадратна матриця A порядку n має різні власні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то матрицю A можна звести до діагонального вигляду

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (2.22)$$

який називають *канонічною формою Жордано* матриці A.

Зауваження 2.4. Якщо квадратна матриця A порядку n має кратні власні числа, то кількість власних векторів може бути меншою від n. У цьому випадку форма Жордано (2.22) замінюється складнішою матрицею.

Приклад 2.4. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Характеристичним рівнянням заданої матриці A буде рівняння

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Знаходимо визначник лівої частини рівняння

$$-(15-\lambda)(7+\lambda) + 8 \cdot 15 = 0,$$

$$-105 + 7\lambda - 15\lambda + \lambda^2 + 120 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0.$$

За теоремою Вієта знаходимо розв’язки рівняння, тобто $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$.

Згідно з властивістю 1 ці корені є власними числами заданої матриці A, а згідно з властивістю 2 їм відповідають лінійно незалежні вектори, які знайдемо шляхом розв’язування системи (2.20) для кожного власного числа.

Якщо $\lambda = 5$, отримаємо:

$$\begin{cases} (15-5)x_1 + 15x_2 = 0 \\ -8x_1 + (-7-5)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_1 + 15x_2 = 0 \\ -8x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}C \\ x_2 = C \end{cases}.$$

Власний вектор матриці А, що відповідає власному числу $\lambda = 5$, має вигляд

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C \\ C \end{pmatrix},$$

де C – довільне число.

Якщо $\lambda = 3$, отримаємо

$$\begin{cases} (15-3)x_1 + 15x_2 = 0 \\ -8x_1 + (-7-3)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x_1 + 15x_2 = 0 \\ -8x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{4}C_1 \\ x_2 = C_1 \end{cases}.$$

Тому власний вектор матриці A, що відповідає власному числу $\lambda = 3$, має вигляд вектора-стовпчика

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}C_1 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

де C_1 – довільна стала.

При $C = 2$ та $C_1 = -4$ отримаємо власні вектори у вигляді

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2.5 Ранг матриці

Для розв'язання й дослідження ряду математичних і прикладних задач важливе значення має поняття рангу матриці.

У матриці A розміру $m \times n$ викреслюванням будь-яких рядочків або стовпчиків можна обчислити квадратні *підматриці k-го порядку*, де $k \le \min(m;n)$. Визначники таких підматриць називаються *мінорами k-го порядку матриці A*. Наприклад, із матриці $A_{3\times 4}$ можна отримати підматрицю першого, другого й третього порядків.

Означення 2.13. *Мінором порядку s* матриці A називають визначник матриці порядку s, що утворюється елементами довільно обраних s рядків і s стовпчиків матриці A.

Кожна матриця має стільки мінорів порядку s, скільки існує способів вибору s рядків і s стовпчиків матриці A.

Означення 2.14. *Рангом* матриці А називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці A позначають $rang\ A$ або $r(A)$, або r.

Із означення слідує:

1. Ранг матриці $A_{m\times n}$ не перевищує меншого з її розмірів, тобто $r(A)\le \min(m;n)$;
2. Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці;
3. $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нульові, тобто $A = 0$;
4. Для квадратної матриці n-го порядку $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A невироджена.

Приклад 2.5. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Для матриці $A_{3\times 4}$ $r(A)\le \min(3;4)=3$. Перевіримо, чи дорівнює ранг трьом. Для цього обчислимо всі мінори третього порядку, тобто визначники всіх підматриць третього порядку (їх всього чотири, вони отримуються при викреслюванні одного із стовпчиків матриці):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Оскільки всі мінори третього порядку дорівнюють нулеві, $r(A)\le 2$. Оскільки існує ненульовий мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7\ne 0$, то $r(A)=2$.

Відповідь: $r(A)=2$.

Але визначення рангу матриці перебором всіх мінорів достатньо громіздке. Для полегшення цієї задачі використовують перетворення, що зберігають ранг матриці. Найбільш ефективним методом знаходження рангу матриці є метод елементарних перетворень.

Означення 2.15. *Елементарними перетвореннями* матриці називають такі перетворення:

1. Відкидання нульового рядочка (стовпчика).

2. Множення всіх елементів рядочка (стовпчика) на число, що не дорівнює нулеві.

3. Змінювання порядку стовпчиків (рядочків).

4. Додавання до кожного елемента одного рядочка (стовпчика) відповідних елементів іншого рядочка (стовпчика), помноженого на будь-яке число.

5. Транспонування.

Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, але дозволяють звести матрицю до матриці іншого виду, коли нижче головної діагоналі усі елементи матриці – нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Означення 2.16. Дві матриці називаються *еквівалентними*, якщо одна отримується із іншої за допомогою кінцевого числа елементарних перетворень. Із теореми слідує, що еквівалентні матриці мають однакові ранги.

Якщо матриці A та B еквівалентні, то це записують у вигляді: $A \sim B$.

Канонічною матрицею називається матриця, у якої на початку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць (кількість яких може дорівнювати нулю), а всі інші елементи дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

За допомогою елементарних перетворень кожну матрицю можна звести до канонічної.

За допомогою елементарних перетворень можна привести матрицю до так званого східчастого вигляду, тоді обчислення її рангу доволі просте.

Матриця A називається *східчастою*, якщо вона має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1r} & \vdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2r} & \vdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{rr} & \vdots & a_{rk} \end{pmatrix}, \qquad (2.23)$$

де $a_{ii} \neq 0;\ i = 1, 2, ..., r;\ r \leq k$.

Зауваження 2.5. Умова $r \leq K$ завжди може бути досягнута транспонуванням матриці.

Очевидно, що ранг східчастої матриці дорівнює ***r***, оскільки маємо мінор *r*-го порядку, що не дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \vdots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Теорема 2.2. Ранг матриці не змінюється при лінійних операціях з її рядками.

Доведення.

Дійсно, лінійні операції з рядками якої-небудь матриці приводять до тих самих лінійних операцій з рядками будь-якої субматриці. Проте, як указано вище, при лінійних операціях із рядками квадратних матриць визначники цих матриць отримуються один з одного множенням на число, відмінне від нуля. Звідси нульовий визначник залишається нульовим, а відмінний від нуля – відмінним від нуля, тобто не може змінитися найвищий порядок відмінного від нуля визначника субматриць. Не впливає, очевидно, на ранг матриці і перестановка стовпців, оскільки така перестановка може впливати лише на знак відповідних визначників.

Із доведеної теореми випливає, що при перетворенні матриці мають той самий ранг, що і вихідні. Тому ранг основної матриці системи рівнянь першого степеня дорівнює числу одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці.

Теорема 2.3. Ранг матриці не змінюється, якщо:

1) відкинути нульовий рядок (стовпчик);

2) помножити всі елементи рядка (стовпчика) матриці на число, яке не дорівнює нулю;

3) поміняти рядки (стовпчики) місцями;

4) додати до кожного елемента одного рядка (стовпчика)відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на деяке число;

5) транспонувати матрицю.

Перетворення 1–5 називають *елементарними.* Якщо одну матрицю одержують з іншої за допомогою цих перетворень, то ці матриці називають *еквівалентними*.

Означення 2.15. *Базовим мінором* матриці називають будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого збігається з рангом цієї матриці.

Існують такі способи обчислення рангу матриці:

1) метод зведення до східчастої матриці (за допомогою елементарних перетворень);

2) метод обвідних мінорів.

Алгоритм обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень покажемо на такому прикладі.

Приклад 2.6. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

1. Якщо $a_{11} = 0$, то при перестановці рядочків або стовпчиків добиваємось того, що $a_{11} \neq 0$. У даному випадку поміняємо місцями перший і другий рядочки.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Якщо $a_{11} \neq 0$, то, помноживши перший рядочок на 2, а потім отримані числа додавши до третього рядочка, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. До першого рядочка додаємо числа четвертого рядочка

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Помножимо другий рядочок на – 3, а потім отримані числа додамо до третього рядочка й четвертого, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Якщо в процесі перетворень отримуються рядочки або стовпчики, що цілком складаються з нулів, то ми відкидаємо ці рядочки, або стовпчики

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має ступінчатий вигляд і містить мінори другого порядку, що не дорівнюють нулеві, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Тому ранг отриманої східчастої, а отже, і заданої матриці дорівнює $rang\ A = 2$.

Метод обвідних мінорів

Мінор M_{k+1} порядку *к* + 1, який містить у собі мінор M_k порядку *к*, називається *обвідним мінором* мінора M_k. Якщо у матриці *A* є мінор $M_k \neq 0$, а всі обвідні його мінори M_{k+1} = 0, то *rangA* = *k*.

Алгоритм знаходження рангу матриці методом обвідних мінорів

1. Вибирають у матриці *A* мінор 1-го порядку, відмінного від нуля. (часто це елемент a_{11}).
2. Будують мінор 2-го порядку, який містить у собі попередній відмінний від нуля 1-го порядку.
3. Перевіряють, чи дорівнює нулю мінор 2-го порядку, побудований на другому етапі.

Якщо побудований мінор 2-го порядку дорівнює нулю, будують інший мінор 2-го порядку і перевіряють його на рівність нулю. Якщо всі можливі обвідні мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, роблять висновок, що ранг матриці дорівнює одиниці (*rangA = 1*). Якщо знайдено відмінний від нуля мінор 2-го порядку, переходять до наступного етапу.

4. Будують мінор 3-го порядку, який містить у собі попередній відмінний від нуля мінор 2-го порядку.

5. Перевіряють, чи дорівнює нулеві мінор 3-го порядку, побудований на 4 етапі.

Якщо побудований мінор 3-го порядку дорівнює нулеві, будують інший мінор 3-го порядку і перевіряють його на рівність нулю. Якщо всі можливі обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, то можна зробити висновок, що ранг матриці дорівнює *rang A = 2*. Якщо знайдено мінор 3-го порядку, відмінний від нуля, переходять до 6 етапу.

6. Повторюють дії етапів 3–5 до тих пір, поки можна будувати обвідні мінори вищого порядку.

Якщо знайдено мінор найвищого порядку, відмінний від нуля, записують , що ранг матриці дорівнює порядку цього мінора.

Приклад 2.7. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & 3 & 2 \\ -9 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Виберемо мінор 1-го порядку, відмінний від нуля. $M_1=-3\neq 0$ $r(A)\geq 0$. Будуємо мінор 2-го порядку, який містить у собі знайдений мінор M_1.

$$M_2=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}=18\neq 0.$$

Для M_2 обвідними будуть тільки два мінори:

$$M_3^*=\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,\ M_3^{**}=\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ -9 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Оскільки вони обидва дорівнюють нулеві, то ранг матриці *rang A* = 2, а мінор $M_2=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$ можна взяти за базовий.

Відповідь: $r(A)$ = 2.

Властивості рангу

1) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;
2) $r(A-B)\geq |r(A)-r(B)|$

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$;

4) $r(A^T \cdot A) = r(A)$;

5) $r(A^T) = r(A)$;

6) $r(AB) = r(A)$, якщо B – квадратна матриця і $|B| \neq 0$;

7) $r(ABC) = r(B)$, якщо A і C – квадратні матриці й $|A| \neq 0$; і $|C| \neq 0$;

8) $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$, де n – кількість стовпчиків матриці A або рядочків матриці B.

Теорема про ранг матриці має важливе значення в матричному аналізі, зокрема при дослідженні систем лінійних рівнянь.

Приклад 2.8. Визначити максимальну кількість лінійно незалежних рядочків (стовпчиків) даної матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1p\cdot(-2) \\ 1p+2p \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1p\cdot(-3) \\ 1p+3p \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 3p\cdot(-1) \\ 2p+3p \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали східчасту матрицю, у якої існує ненульовий мінор третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці дорівнює трьом, і вихідна матриця має три лінійно незалежних рядочки (або стовпчики).

2.7 Теорема Кронекера – Капеллі (існування розв’язку системи лінійних рівнянь)

Розглянемо теорему про сумісність систем рівнянь першого степеня, а саме теорему Кронекера – Капеллі.

Теорема 2.4. (Кронекера – Капеллі). Для того щоб система рівнянь першого степеня була сумісна, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці збігався з рангом основної матриці.

Доведення.

Нехай ранг основної матриці системи дорівнює k. Якщо ранг розширеної матриці системи також дорівнює k, то або система містить тільки k рівнянь, або всі числа $b_i^{(n)} (i = k+1,...,n)$ у перетвореній матриці дорівнюють нулю (у противному випадку ранг розширеної матриці перетвореної, а тому і вихідної системи був би $k + 1$).

Припустимо, що ранг перетвореної (а тому вихідної) розширеної матриці системи більше $\boldsymbol{k}$, тобто більше ніж кількість одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці. Тоді існує хоча б одна субматриця (k + 1)-го порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Така субматриця може бути одержана тільки додаванням до одиничної матриці порядку k (що знаходиться в лівому верхньому куту перетвореної матриці) якого-небудь одного рядка і стовпця, що складається з перших k вільних членів рівнянь перетвореної системи і будь-якого одного вільного члена з наступних $n – k$ рівнянь. Щоб визначник указаної субматриці був відмінний від нуля, відмінним від нуля має бути і цей останній доданий елемент, тобто число $b_i^{(n)} (i = k+1,...,n)$. Однак, як було доведено раніше, у цьому випадку (при $b_i^{(n)} \neq 0$) система несумісна. Отже, система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці збігається з рангом розширеної матриці. Теорему доведено.

Наслідок 2.3. Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.

Наслідок 2.4. Якщо ранг системи менший від кількості невідомих n, то система має безліч розв’язків.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1. Задано матриці

$$C_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $M=-2C_1+3C_2$.

Завдання 2.2 Обчислити добуток $A\cdot B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 6\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Розв'язання системи рівнянь за допомогою формул Крамера

Нехай $A=(a_{ij})_1^n$. Позначимо через Δ – визначник матриці А. Замінимо i-й стовпчик матриці A стовпчиком вільних членів. Визначник такої матриці позначимо Δ_i. Якщо визначник $\Delta \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \text{ де } i = \overline{1,n} \tag{3.2}$$

Формули (3.2) називаються *формулами Крамера.*

Теорема (Крамера). Якщо визначник основної матриці системи n рівнянь першого степеня з n невідомими відмінний від нуля, тоді система має єдиний розв'язок. При цьому значення кожного з невідомих дорівнює відношенню визначників двох матриць: у чисельнику – визначник, матриці, одержаної з основної матриці системи заміною стовпця, що відповідає вибраному невідомому, стовпцем вільних членів, а в знаменнику – визначник основної матриці системи.

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, і тоді справедливі формули Крамера.

2. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв'язків.

3. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків, або може бути несумісною (якщо ранг матриці A не дорівнює рангу її розширеної матриці).

Приклад 3.1. Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Розв’язання

Обчислюємо головний визначник системи Δ, елементами якого є коефіцієнти, які знаходяться при невідомих. Обчислювати визначник можна будь-яким із способів, який вам відомий.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$3\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot(-3) + 4\cdot(-6)\cdot 2 - 5\cdot(-5)\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot(-3) - 2\cdot 3\cdot(-6) =$$

$$= -60 - 30 - 48 + 50 + 48 + 36 = -4 \neq 0.$$

Тому розв’язки даної системи шукаємо за формулами (3.2).

Обчислюємо визначник Δ_x, утворений з головного визначника заміною першого стовпця стовпцем вільних членів. Отримаємо

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot(-3) + 1\cdot(-6)\cdot 2 - 3\cdot(-5)\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot(-6) =$$

$$= -40 - 18 - 12 + 30 + 12 + 24 = -4.$$

Аналогічно знаходимо Δ_y і Δ_z.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 2 - 5\cdot 1\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 3 =$$

$$= 12 + 20 + 24 - 10 - 32 - 18 = -4.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3\cdot(-5)\cdot 3 + 1\cdot 5\cdot(-3) + 4\cdot(-6)\cdot 2 - 5\cdot(-5)\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 3\cdot(-6) =$$

$$= -45 - 15 - 48 + 50 + 18 + 36 = -4.$$

Отже, розв’язками системи будуть:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Відповідь: (1;1;1).

3.2 Розв'язування системи рівнянь матричним способом або за допомогою оберненої матриці

Нехай у системі (3.1) $m = n$. Тоді A – квадратна матриця порядку n. Якщо $|A| \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} до матриці A. Систему (3.1) можна записати:

$$AX = B. \tag{3.3}$$

Цей запис називають *матричною формою* запису системи (3.1).

Помножимо співвідношення (3.3) зліва на A^{-1}. Тоді отримаємо $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot B$. Ураховуючи, що $A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця, тобто це матриця, у якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші – нулі. Тоді

$$X = A^{-1}B \cdot \tag{3.4}$$

Отже, якщо $|A| \neq 0$, то система (3.3) має єдиний розв'язок, який визначається співвідношенням (3.4). Знаходження розв'язку системи (3.3) за формулою (3.4) називається *матричним способом* розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклад 3.2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці):

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Визначник $|A| = -4 \neq 0$, тому існує обернена матриця A^{-1}. Записуємо формулу, щоб знайти обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

де $\tilde{A}$– матриця, яка складається з елементів, що є алгебраїчними доповненнями, і рядки замінені на стовпці, тобто транспоновані.

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*, використовуючи формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

де M_{ij} – мінор, який відповідає елементові a_{ij}, тобто M_{ij} – визначник матриці порядку *n*-1, утвореної з матриці *A* викреслюванням (умовно) *i*-го рядка й *j*-го стовпця.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (3.4) отримаємо:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто, x = 1, y = 1, z = 1.

Суттєвим недоліком розв’язання системи *n* лінійних рівнянь із *n* змінними за формулами Крамера і методом оберненої матриці займає багато часу, що пов’язано з обчисленням визначників і знаходженням оберненої матриці. Тому розглянуті методи представляють скоріше теоретичний інтерес і на практиці можуть бути використані для розв’язання реальних економічних задач, що зводяться до систем із найбільшою кількістю рівнянь і змінних.

3.3 Розв’язання системи рівнянь методом Гаусса

Метод Гаусса (Гаусс Фрідріх Карл 1777–1855 – німецький математик) – *метод послідовного виключення змінних*; полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи ступінчастого або до трикутного вигляду, із якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних знаходять всі інші змінні.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} & b_1 & b_1 \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{mn} & b_n & b_n \end{array}\right) \tag{3.5}$$

Матриця (3.5) називається *розширеною* матрицею, тому що вона складається з елементів основної і вільних коефіцієнтів.

У цьому методі використовуються елементарні перетворення матриць, тобто перестановка рядків (стовпчиків), додавання до елементів будь-якого рядка (стовпчика) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпчика), помножених на одне і те ж число.

Приклад 3.3. Розв'язати систему рівнянь, використовуючи метод Гаусса

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Записуємо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Множимо перший рядок на 4, а другий на – 3 і другий рядок додаємо до першого при цьому перший залишається без зміни, а другий змінюється.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Перший рядок множимо на 5, а третій на – 3 і третій рядок додаємо до першого.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Третій рядок множимо на – 1 і додаємо до другого.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)\sim$$

Перший стовпчик – це коефіцієнти при змінній *x*, другий – це коефіцієнти при змінній *y*, третій – це коефіцієнти при змінній *z*. Отже, отримали таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ \quad\quad 3y + 2z = 5, \\ \quad\quad\quad\quad 4z = 4. \end{cases}$$

Починаємо знаходити розв'язок системи рівнянь з останнього рівняння, тобто з рівняння $4z = 4$, $z = 1$. Підставляємо знайдене значення z у друге рівняння $3y + 2\cdot 1 = 5$, $3y + 2 = 5$, $3y = 3$, $y = 1$. Маючи значення змінних y та z підставляємо їх у перше рівняння і знаходимо x: $3x - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2$, $3x - 3 + 2 = 2$, $3x - 3 = 0$, $3x = 3$, $x = 1$.

3.4 Застосування елементів лінійної алгебри в економіці

Використання алгебри матриць

Використання елементів алгебри матриць є одним із основних методів розв'язання багатьох економічних задач. Це питання стало особливо актуальним при розробленні й використанні баз даних: при роботі з ними майже вся інформація зберігається й обробляється в матричній формі.

Розглянемо задачі з використанням поняття матриці.

Приклад 3.4. Підприємство випускає щодобово чотири види виробів, основні виробничо-економічні показники, яких приведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Вид виробу, п/п	Кількість виробів, од.	Витрати сировини, кг/вир.	Норма часу виготовлення, год/вир.	Вартість виробу, грош. од./вир.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	40

Потрібно визначити такі щодобові показники: витрати сировини S, витрати робочого часу T і вартість P продукції підприємства.

Розв’язання

За даними таблиці 3.1 складемо чотири вектори, які характеризують весь виробничий цикл:

$\overline{q} = (20,50,30,40)$ – вектор асортименту;

$\overline{s} = (5,2,7,4)$ – вектор витрат сировини;

$\overline{t} = (10,5,15,8)$ – вектор затрат робочого часу;

$\overline{p} = (30,15,45,20)$ – вектор вартості.

Тоді шукані величини будуть представляти собою відповідні скалярні добутки вектора асортименту $\overline{q}$ на три інших вектори, тобто

$$S = \overline{q} \cdot \overline{s} = 20 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 4 = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 \text{ кг}$$

$$T = \overline{q} \cdot \overline{t} = 20 \cdot 10 + 50 \cdot 5 + 30 \cdot 15 + 40 \cdot 8 = 200 + 250 + 450 + 320 = 1220 \text{ год}$$

$$P = \overline{q} \cdot \overline{p} = 20 \cdot 30 + 50 \cdot 15 + 30 \cdot 45 + 40 \cdot 20 = 600 + 750 + 1350 + 800 = 3500 \text{ (ум. од.)}$$

Приклад 3.5. У таблиці 3.2 приведені дані про денне виробництво п’яти підприємств холдингу, що випускають чотири види продукції з використанням трьох видів сировини, а також продуктивність роботи кожного підприємства за рік і ціна кожного виду сировини.

Таблиця 3.2

Вид виробу, №	Продуктивність підприємств, вир./день					Затрати видів сировини, од. ваги/вир.		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Кількість робочих днів за годину					Ціни видів сировини, грош. од./од.ваги		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Потрібно визначити :

1) річну продуктивність кожного підприємства за кожним видом виробу;

2) річну потребу кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річну суму фінансування кожного підприємства для закупівлі сировини, яка необхідна для випуску продукції вказаних видів і кількості.

Розв'язання.

Потрібно скласти матрицю, яка характеризує весь економічний спектр виробництва, що цікавить нас, а потім із допомогою відповідних операцій над ними отримати розв'язок цієї задачі. Насамперед приведемо матрицю продуктивності за всіма видами продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Кожний стовпчик цієї матриці відповідає денній продуктивності окремого підприємства за кожним видом продукції. Тому річна продуктивність J – го підприємства за кожним видом продукції отримується множенням J – го стовпчика матриці A на кількість робочих днів у році для цього підприємства $(j = 1,2,3,4,5)$. Таким чином, річна продуктивність кожного підприємства за кожним із виробів описується матрицею

$$A_{річн} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 380 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Матриця витрат сировини на одиницю виробу (ці показники за умовою однакові для всіх підприємств) має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Денні витрати за типами сировини на підприємствах описуються добутком матриці B на матрицю A:

$$BA = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix}.$$

де i-й рядочок відповідає номеру типу сировини, а j-й стовпчик – номеру підприємства згідно з таблицею 3.2. Але нас цікавить відповідь на друге питання задачі – ми отримаємо її за аналогією з матрицею $A_{річн}$, множенням стовпчиків матриці BA на відповідну кількість робочих днів у році для підприємств – це річна потреба кожного підприємства в кожному виді сировини:

$$BA_{річн} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9019 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Введемо вектор вартості сировини

$$\overline{p} = (40, 50, 60).$$

Тоді вартість загального річного запасу сировини для кожного підприємства отримується множенням вектора $\overline{p}$ на матрицю $BA_{річн}$.

$$\overline{P} = \overline{p} \cdot BA_{річн} = (2008000, 3496500, 1878500, 1494000, 1552600).$$

Тому суми фінансування підприємств для закупівлі сировини визначаються відповідними компонентами вектора $\overline{P}$.

Поняття матриці часто використовується в практичній діяльності. Наприклад, дані про випуск продукції декількох видів у кожному кварталі року або норми витрат декількох видів ресурсів на виробництво продукції кількох типів тощо зручно записувати у вигляді матриць.

Приклад 3.6. У деякій галузі m заводів випускають n видів продукції. Матриця $A_{m\times n}$ є матрицею, що задає об'єми продукції на кожному заводі в першому кварталі, матриця $B_{m\times n}$ – у другому; $(a_{ij}; b_{ij})$ – об'єми продукції J-го типу на i-му заводі в першому і другому кварталах відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) об'єм продукції;

б) приріст об'ємів продукції в другому кварталі в порівнянні за видами продукції і заводами;

в) вартісне вираження випущеної продукції за півроку (у доларах), якщо λ - курс долара по відношенню до гривни.

Розв'язання

а) об'єм продукції за півроку визначається сумою матриць A і B, тобто

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ – об’єм продукції J-го типу, виготовлений за півріччя i-м заводом;

б) приріст у другому кварталі в порівнянні з першим визначається різницею матриць

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Від’ємні елементи d_{ij} матриці D показують, що на даному i-му заводі об’єм виробництва j-го продукту зменшився; додатні d_{ij} – збільшився; нульові d_{ij} – не змінилися.

в) добуток $\lambda C = \lambda\left(A + B\right)$задає вираження вартості об’ємів виробництва за квартал у доларах за кожним заводом і кожним підприємством.

Приклад 3.7. Підприємство виготовляє n видів продукції, задані матрицею $A_{i\times n}$. Ціна від реалізації одиниці i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею $B_{n\times k}$, де k – кількість регіонів, в яких реалізується продукція. Знайти матрицю прибутку C за регіонами. Нехай

$$A_{1x3} = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \end{pmatrix}; B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Прибуток визначається матрицею $C_{1\times k} = A_{1\times n} \times B_{n\times k}$, причому $c_{ij} = \sum_{i=0}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}$ – це прибуток підприємства в j-му регіоні

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 1300 & 700 & 1300 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.8. Підприємство виготовляє n типів продукції, використовуючи m видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i-го виду на виробництво одиниці продукції j-го типу задано матрицею затрат $A_{m\times n}$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство випустило кількість продукції кожного типу x_{ij}, що записано матрицею $X_{n\times 1}$. Визначити S – матрицю повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за період часу. Задано

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Матриця повних витрат ресурсів S визначається як добуток матриць A та X, тобто $S = AX$. Згідно з умовою даної задачі отримаємо:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}$$

Тобто за даний період часу буде використано 930 од. ресурсу першого виду, 960 од. ресурсу другого виду, 450 од. ресурсу третього виду, 690 од. четвертого виду.

Приклад 3.9. Доповнимо умову попередньої задачі значеннями вартості кожного виду ресурсу з розрахунку на одиницю. Вони задаються матрицею $P_{1\times m}$. Знайти повну вартість всіх витрачених за даний відрізок часу ресурсу, якщо $P = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Вартість усіх витрачених ресурсів C визначається, як добуток матриць P і S, тобто С = PS або $C = PAX$.

У даному випадку отримаємо

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix} = 39900 \text{ (ум. од.)}$$

Приклад 3.10. Завод виробляє двигуни, які відразу або потребують додаткового регулювання (у 40 % випадках), або можуть бути використані (у 60 % випадках). Як показують статистичні дослідження, ті двигуни, які в першу чергу потребують регулювання через місяць мають потребу додаткового регулювання в 65 % випадках, а в 35 % будуть працювати добре. Ті двигуни, які не мали потреби першочергового регулювання через місяць мають потребу у 20 % випадках, а в 80 % будуть продовжувати добре працювати. Яка доля двигунів, які будуть працювати добре, або будуть мати потребу регулювання через два і три місяці після випуску відповідно?

Розв'язання

У момент після випуску доля хороших двигунів складає 0,6, а двигунів, що потребують регулювання, – 0,4. Через місяць доля хороших двигунів складає:

$$0,6\cdot 0,8+0,4\cdot 0,35=0,62,$$

а двигунів, що потребують регулювання:

$$0,6\cdot 0,2+0,4\cdot 0,65=0,38.$$

Введемо рядочок становища X_t у момент *t*; $X_t=(x_{1t};x_{2t})$, де x_{1t} і x_{2t} – доля двигунів у момент *t* відповідно хороших двигунів і тих, які потребують регулювання.

Матриця переходу $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, де a_{ij} – доля двигунів, які на теперішній час знаходяться в стані *i* (1 – «хороший», 2 – «потребує регулювання»), а через місяць – у стані *j*.

Очевидно, що для матриці переходу сума елементів кожного рядочка дорівнює одиниці, усі елементи її невід'ємні.

Очевидно, що

$$X_{0_{1\times 2}}=(0.6\quad 0.4),\ A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

Тоді через місяць

$$X_{1_{1\times 2}}\cdot A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.62 & 0.38 \end{pmatrix};$$

через два місяці $X_2=X_1\cdot A=X_0AA=X_0A^2$

через три місяці $X_3=X_2\cdot A=X_0AAA=X_0A^3$.

Знайдемо матриці A^2 і A^3:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.71 & 0.29 \\ 0.5075 & 0.4925 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.29 \\ 0.5075 & 0.4925 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6695 & 0.3305 \\ 0.578375 & 0.421625 \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що якщо A – матриця переходу, то A^t – також матриця переходу при будь-якому натуральному t. Тепер знайдемо

$$X_2 = (0.6 \quad 0.4) \cdot \begin{pmatrix} 0.71 & 0.29 \\ 0.5075 & 0.4925 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.629 & 0.371 \end{pmatrix};$$

$$X_3 = (0.6 \quad 0.4) \cdot \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.5 & 0.42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.634 & 0.366 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $X_t = X_0 A^t$.

Задачі для самостійної роботи

Задача № 3.11. Три заводи випускають чотири види продукції. Необхідно знайти:

а) матрицю випуску продукції за квартал, якщо задані матриці щомісячних випусків A_1, A_2, A_3;

б) матриці приростів випуску продукції за кожний місяць B_1, B_2 і проаналізувати результати.

Якщо,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача № 3.12. Знайти C – матрицю прибутку по регіонам за умовами прикладу 3.7, якщо

$$A = (10 \quad 40 \quad 10 \quad 20);\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити, в якому із трьох регіонів найбільш вигідна реалізація товару.

Задача № 3.13. Підприємство виробляє меблі трьох видів і продає їх у чотири регіони. Матриця $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 8 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ задає ціну реалізації одиниці меблі *i*-го типу в *j*-му регіоні. Знайти прибуток підприємства в кожному регіоні, якщо реалізація меблів за місяць (за видами) задана матрицею $A=\begin{pmatrix}200\\ 80\\ 100\end{pmatrix}$.

Задача № 3.14. Підприємство виробляє продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми затрат сировини на одиницю продукції кожного виду задані матрицею $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Вартість одиниці сировини кожного типу задані матрицею $B=\begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix}$. Які загальні витрати підприємства на виробництво 100, 200, 150 од. продукції відповідно першого, другого й третього виду?

Задача № 3.15. Використовуючи умови прикладів 3.13 і 3.14 визначити:

1) повні затрати ресурсів трьох видів на виробництво місячної продукції, якщо задані норми затрат матрицею $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ й об’єм випуску кожного із двох типів продукції $X=\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}$;

2) вартість усіх затрачених ресурсів, якщо задана вартість одиниці кожного ресурсу $P=\begin{pmatrix}50 & 10 & 20\end{pmatrix}$.

Задача № 3.16. Продавець може закупити від одного до п’яти білетів на спектакль за ціною 100 грн. і продати перед його початком по 200 грн. кожний. Скласти матрицю прибутку продавця в залежності від кількості куплених ним білетів (рядочок матриці) і результатів продажі (стовпчик матриці).

Задача № 3.17. У ремонтну майстерню поступають телефонні апарати, із яких 70 % потребують малого ремонту, 20 % – середнього, 10 % – важкого. Статистично встановлено, що через рік із апаратів, що пройшли малий ремонт, 10 % будуть потребувати малого ремонту, 60% – середнього, 30 % – важкого; із апаратів, що пройшли середній ремонт 20 % – малого ремонту, 50 % – середнього, 30 % важкого; із апаратів, що пройшли важкий ремонт буде потреба 60 % малого, 40 % – середнього. Знайти долю із відремонтованих на початку року апаратів, в яких буде потреба ремонту того чи іншого виду через один, два, три роки.

3.5 Використання систем лінійних рівнянь

У цьому питанні розглянемо задачі, які приводять до складання й розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь на основі прогнозу випуску продукції за заданими запасами сировини.

Приклад 3.18. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва задані в таблиці 3.3. Потрібно визначити об'єм випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини. Задачі такого роду типові при прогнозах й оцінках функціонування підприємства, експертних оцінках проєктів освоєння родовищ корисних копалин, а також у плануванні мікроекономіки підприємств.

Таблиця 3.3.

Види сировини	Витрати сировини за видами продукції, вага од./ вир.			Запаси сировини, вага, од
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Розв'язання

Позначимо невідомі об'єми випуску продукції через x_1, x_2, x_3. Тоді при умові повного розходу запасів для кожного виду сировини можна записати балансові відношення, які утворюють систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь будь-яким способом, знаходимо, що при заданих запасах сировини об'єми випуску продукції складають за кожним видом, відповідно (в умовних одиницях),

$$x_1 = 150,\ x_2 = 250,\ x_3 = 100.$$

Загальна постановка задачі прогнозу випуску продукції. Нехай

$$C = \left\| c_{ij} \right\|;\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n; \tag{3.6}$$

– матриця затрат сировини m видів при випуску продукції n видів. Тоді, при невідомих об'ємах запасу кожного виду сировини, які утворюють відповідний вектор

$$\overline{q} = \left(q_1, q_2, ..., q_m \right) \tag{3.7}$$

Вектор-план $\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_m \right)$ випуску продукції визначається із розв'язання системи m рівнянь з n невідомими:

$$C\overline{x}^T = \overline{q}^T, \tag{3.8}$$

де індекс «Т» означає транспонування вектора-рядочка в вектор-стовпчик.

3.6 Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Макроекономіка функціонування багатогалузевого господарства потребує балансу між окремими галузями. Кожна галузь, з одного боку, є виробником, а з іншого – споживачем продукції, яка випускається іншими галузями. Виникає доволі непроста задача розрахунку зв'язку між галузями через випуск і споживання продукції різного виду. Вперше ця проблема була сформована в 1936 р. у вигляді *математичної моделі* в працях відомого американського економіста В. Леонтьєва, який спробував проаналізувати причини економічної депресії в США 1929–1932 рр. Ця модель основана на алгебрі матриць і використовує апарат матричного аналізу.

Балансові відношення

Для простоти будемо вважати, що виробнича сфера господарства представляє собою n галузей, кожна з яких виробляє свій однорідний продукт. Для забезпечення свого виробництва кожна галузь має потребу в продукції інших галузей (виробнича потреба). Зазвичай процес виробництва розглядається за деякий період часу; у ряді випадків такою одиницею є рік.

Введемо такі позначення:

x_i – загальний об'єм продукції i-ої галузі (її валовий випуск);

x_{ij} – об'єм продукції i-ої галузі, яка споживається j-ою галуззю при виробництві об'єму продукції x_j;

y_i – об'єм продукції i-ої галузі, який призначений для реалізації (споживання) у невиробничій сфері, або так званий продукт кінцевого споживання. До нього відносять особисте споживання громадян, задоволення загальних потреб, перелік державних інститутів тощо.

Балансовий принцип зв'язку різних галузей промисловості міститься в тому, що валовий випуск i-ої галузі повинен дорівнювати сумі об'ємів споживання у виробничій і невиробничій сферах. У найпростішій формі (гіпотеза лінійності або просто додавання) балансові відношення мають вигляд:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, i = 1, 2, ..., n. \qquad (3.9)$$

Рівняння (3.9) називається *відношеннями балансу*.

Оскільки продукція різних галузей має різні виміри, будемо надалі мати на увазі вартісний баланс.

Лінійна модель багатогалузевої економіки

В. Леонтьєвим на основі аналізу економіки США в період перед другою світовою війною був встановлений важливий факт: протягом довготривалого часу величини $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ змінюється дуже мало і може розглядатися як постійне число. Це явище стає зрозумілим у світлі того, що технологія виробництва залишається на одному і тому ж рівні доволі тривалий час і тому об'єм споживання j-ою галуззю продукції i-ої галузі при виробництві своєї продукції об'ємом x_j є технологічна константа.

У силу вказаного факту можна зробити таке припущення: для виробництва продукції j-ої галузі об'ємом x_j потрібно використовувати продукцію i-ої галузі об'ємом $a_{ij}x_i$, де a_{ij} – постійне число.

При такому допущенні технологія виробництва приймається лінійною, а само це допущення називається гіпотезою лінійності. При цьому числа називаються коефіцієнтами прямих затрат. Згідно з гіпотезою лінійності маємо

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; x_{ij} = a_{ij}x_i; i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (3.10)$$

Тоді рівняння (3.10) можна переписати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_{1,} \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Введемо в розгляд вектори-стовпчики об’ємів виробничої продукції (вектор валового випуску), об’ємів продукції кінцевого споживання (вектор кінцевого споживання) і матрицю коефіцієнтів прямих затрат:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{array}\right). \tag{3.12}$$

Тоді система (3.11) рівнянь у матричній формі має вигляд:

$$\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}. \tag{3.13}$$

Інколи це співвідношення називають рівнянням лінійного міжгалузевого балансу. Разом з описом матричного представлення (3.13) це рівняння має назву моделі Леонтьєва.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох цілях. У першому, найбільш простому випадку. Коли відомий вектор валового випуску, потрібно розрахувати вектор кінцевого споживання.

У другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовується для цілей планування з наступним формулюванням задачі: для періоду часу T (наприклад, рік) відомий вектор кінцевого споживання і потрібно визначити вектор валового випуску. Тут необхідно розв’язувати систему лінійних рівнянь (3.13) із відомою матрицею A і заданим вектором. У подальшому ми будемо мати справу з такою задачею.

Між тим система (3.13) має ряд особливостей, які випливають із прикладного характеру даної задачі; по-перше – усі елементи матриці A і векторів повинні бути невід’ємними.

Продуктивні моделі Леонтьєва

Матриця A, усі елементи якої невід’ємні, називається продуктивною, якщо для будь-якого вектора з невід’ємними компонентами існує розв’язок рівняння (3.13) – вектор, всі елементи якого невід’ємні. В такому випадку і модель Леонтьєва називається продуктивною.

Для рівняння типу (3.13) розроблена відповідна математична теорія дослідження розв’язання й її особливостей. Укажемо деякі основні її моменти.

Перепишемо систему (3.13), використовуючи одиничну матрицю E у вигляді

$$(E - A)\overline{x} = \overline{y}. \tag{3.14}$$

Якщо існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, то існує й єдиний розв’язок рівняння (3.14):

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y} \qquad (3.15)$$

Матриця $(E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних затрат.*

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці *A*. Приведемо два з них.

1. Матриця *A* продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $(E - A)^{-1}$ існує й її елементи невід'ємні.

2. Матриця *A* з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів в будь-якому стовпчику (рядочку) не перевищує одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \qquad (3.16)$$

причому хоча б для одного стовпчика (рядочка) ця сума строго менша одиниці.

Розглянемо застосування моделі Леонтьєва на нескладних прикладах.

Приклад 3.19. У таблиці 3.4 приведені дані балансу за деякий період часу між п'ятьма галузями промисловості. Знайти вектор кінцевого споживання й валового випуску, а також матрицю коефіцієнтів прямих затрат і визначити, чи є вона продуктивною у відповідності до наведених вище критеріїв.

Таблиця 3.4

№	Галузь	Споживання					Кінцевий продукт	Валовий випуск, грош. од.
		1	2	3	4	5		
1	Станкобудування	15	12	24	23	16	10	100
2	Енергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машинобудування	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобільна промисловість	10	5	10	5	5	15	50
5	Видобуток і переробка углеводородів	7	15	15	3	3	50	100

Розв'язання

У таблиці 3.4 приведені складові балансу у відповідності з співвідношеннями (3.12) x_{ij} – перші п'ять стовпчиків, y_i – шостий стовпчик, x_i – останній стовпчик. $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$. Згідно з формулами (3.11) і (3.12) отримаємо

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.12 & 0.48 & 0.46 & 0.16 \\ 0.10 & 0.03 & 0.70 & 0.30 & 0.07 \\ 0.10 & 0.05 & 0.20 & 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.20 & 0.10 & 0.05 \\ 0.07 & 0.15 & 0.30 & 0.20 & 0.03 \end{pmatrix}.$$

Усі елементи матриці A додатні, однак неважко помітити, що їхня сума в третьому і четвертому стовпчиках більше одиниці. Тому умова другого критерія продуктивності не виконується, і матриця A не є продуктивною. Економічна причина цієї непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання галузей 3 і 4 загалом велика у відповідності до їхніх валових випусків.

Приклад 3.20. Таблиця 3.5 містить дані балансу трьох галузей промисловості за деякий період часу. Потрібно знайти об’єм валового випуску кожного виду продукції, якщо кінцеве споживання за галузями збільшилось, відповідно, до 60, 70 і 30 умовних грошових одиниць.

Таблиця 3.5

№	Галузь	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск, грош. од.
		1	2	3		
1	Видобуток і перероблення вуглеводнів	5	35	20	40	100
2	Енергетика	10	10	20	60	100
3	Машинобудування	20	10	10	10	50

Розв’язання

Випишемо вектори валового випуску й кінцевого споживання й матрицю коефіцієнтів прямих затрат. Згідно з формулами (3.11) і (3.13) отримаємо:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \ \overline{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

Матриця A задовольняє обом критерія продуктивності. У випадку заданого збільшення кінцевого споживання новий вектор кінцевого продукту буде мати вигляд

$$\overline{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad (3.17)$$

Потрібно знайти новий вектор валового випуску $\overline{x_*}$, який задовольняє відношенню балансу маючи на увазі, що матриця A не зміниться. У такому випадку компоненти x_1, x_2, x_3 невідомого вектора знаходяться із системи рівнянь, яка в матричні формі має такий вигляд:

$$\overline{x}_* = A\overline{x}_* + \overline{y}_* \text{ або } (E - A)\overline{x}_* = \overline{y}_* . \qquad (3.18)$$

Матриця цієї системи

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.35 & -0.40 \\ -0.10 & 0.90 & -0.40 \\ -0.20 & -0.10 & 0.80 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь (3.18) при заданому векторі правої частини (3.17) (наприклад, метод Гауса) дає новий вектор $\overline{x}_*$ як розв'язок рівнянь міжгалузевого балансу:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 152.6 \\ 135.8 \\ 92.5 \end{pmatrix}$$

Таким чином, для того щоб забезпечити збільшення компонент вектора кінцевого продукту, необхідно збільшити відповідні валові випуски: видобуток і перероблення вуглеводнів на 52,2 %, рівень енергетики – на 35,8 і випуск машинобудування на 85 % у порівнянні з вхідними величинами, указаними в таблиці 3.5.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. За даними таблиці 3.5 скласти нову таблицю виробничо-економічних показників за такими умовами:

1. Кількість виробів усіх видів збільшується на 20 %;
2. Норма часу виготовлення за всіма виробами зменшується на 20 %;
3. Ціна всіх видів виробів зменшиться на 10 %.

Знайти щодобові показники, які вказані в задачі, а також їхні відсоткові зміни.

Завдання 3.2. За даними таблиці 3.5 скласти нову таблицю за такими умовами:

1. Добове виробництво всіх підприємств збільшується на 100 %;
2. Кількість робочих днів у році для першого підприємства збільшується на 50 %, а для інших – на 40 %;

3. Ціни на види сировини зменшаться відповідно на 10 %, 20 % і 30 %. Визначити суму фінансування підприємств і їхні відповідні відсоткові зміни.

Завдання 3.3. Галузь складається з чотирьох підприємств; вектор випуску продукції і матриця коефіцієнтів прямих витрат має вигляд:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.10 & 0.24 & 0.25 \\ 0.20 & 0.15 & 0.36 & 0.17 \\ 0.15 & 0.20 & 0.20 & 0.15 \\ 0.30 & 0.15 & 0.20 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор об’ємів кінцевого продукту, який призначений для реалізації поза галуззю.

Завдання 3.4. Підприємство випускає три види продукції з використанням трьох видів сировини, характеристики виробництва вказані в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6.

Вид сировини	Витрати сировини по видам продукції, ваг. од./вир.			Запас сировини, ваг од.
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Знайти об’єм випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

Завдання 3.5. В умові прикладу 3.24 визначити приріст об’ємів валових випусків галузі (у відсотках), якщо кінцеве використання потреб збільшиться за галузями, відповідно, на 30, 10 і 50 %. Розв’язати задачу методом оберненої матриці і методом Гауса.

4 ВЕКТОРИ

4.1 Скалярні й векторні величини. Вектори. Колінеарні й компланарні вектори. Рівність векторів. Додавання векторів. Множення вектора на число

У повсякденній практиці ми маємо справу з величинами двох видів. Одні з цих величин, такі, як температура, час, маса, довжина, площа, робота тощо, можна визначити одним числовим значенням, інші ж величини, такі, як сила, швидкість, прискорення тощо, можна визначити тільки тоді, коли відомо не тільки їхнє числове значення, а й напрям у просторі. Величини першого виду називають *скалярними величинами* або *скалярами.* Величини другого виду називають *векторними величинами.*

Означення 4.1. Кожну векторну величину геометрично можна зобразити напрямленим прямолінійним відрізком – *вектором,* – довжина якого дорівнює числовому значенню векторної величини (у вибраному масштабі) і напрям співпадає з напрямом цієї величини.

Вектор визначають двома точками: перша – це початок його, друга – кінець; додатний напрям вектора – від початку до кінцевої точки, наприклад, вектор $\overline{AB}$ має початок у точці *A* і кінець у точці *B*, стрілка вказує напрям вектора.

Означення 4.2. Якщо початок і кінець вектора співпадають, то вектор називають *нульовим (*нуль-вектор).

Означення 4.3. Два ненульових вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають *колінеарними,* якщо прямі *AB* і *CD* паралельні або співпадають.

Означення 4.4. Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Означення 4.5. Довжина, або *модуль*, вектора $\overline{AB}$ – це відстань між його початком *A* й кінцем (довжина відрізка *AB).* Для модуля вектора $\overline{AB}$ використовують позначення $|AB|$ або *AB,* $|\overline{a}|$ або *a.* Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничний вектор або орт.*

Вектори рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями й рівні модулі.

На рис. 4.1, де *ABCD* є паралелограм, зображено рівні вектори $\overline{AD} = \overline{BC}$. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ не рівні. Хоч ці вектори і колінеарні, і мають рівні модулі, але вони протилежно напрямлені. $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a}$

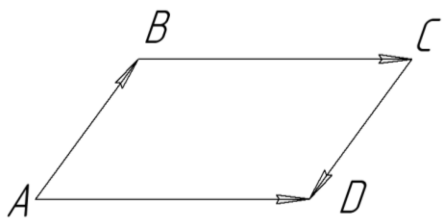

Рисунок 4.1

Дії над векторами

Додавання двох векторів – це операція побудови за двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ третього вектора – вектора суми $\bar{c}$.

Цю побудову виконуємо так:

1) з довільної точки *O* відкладаємо вектор $\overline{OA}=\bar{a}$;

2) з його кінця *A* відкладаємо вектор $\overline{AB}=\bar{b}$;

3) з'єднаємо початок *O* першого вектора з кінцем *B* другого. Знайдений у результаті цієї побудови вектор $\overline{OB}$ = $\bar{c}$ називають вектором-сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 4.2).

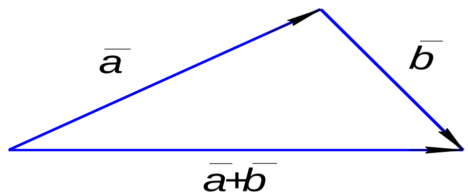

Рисунок 4.2

Означення 4.6. *Сумою векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ є $\bar{c}$ вектор, що сполучає початок вектора $\bar{a}$ з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що вектор $\bar{b}$ відкладено від кінця вектора $\bar{a}$.

Це правило називають *правилом трикутника*.

Для позначення операції додавання векторів вживають звичайні алгебраїчні символи:

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB},\ \bar{a}+\bar{b}=\bar{c}.$$

Іншим способом побудови суми двох векторів є так зване *правило паралелограма:* якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відкласти від спільного початку *O* (рис. 4.3) і на них побудувати паралелограм, то сума $\bar{a}+\bar{b}$ є вектор $\overline{OC}$, що виходить з того ж початку *O* й співпадає з діагоналлю паралелограма.

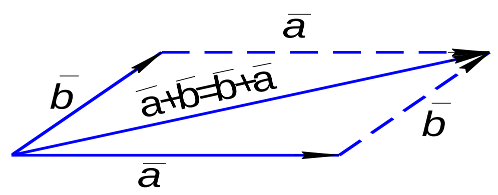

Рисунок 4.3

Із рис. 4.3 видно, що це правило є наслідком правила трикутника.

Розглядаючи фігури *OAC* і *OBC* (рис. 4.3), знайдемо, що $\overline{OC}=\bar a+\bar b=\bar b+\bar a$, тобто сума двох векторів не залежить від порядку доданків: $\bar a+\bar b=\bar b+\bar a$.

Послідовно використовуючи правило трикутника, можемо побудувати суму будь-якої кількості, довільно розміщених у просторі векторів. Сумою цих векторів буде вектор, початком якого є початок першого вектора і кінцем – кінець останнього вектора-доданка.

Якщо кінець останнього вектора-доданка співпадає з початком першого, то сумою векторів буде нульовий вектор.

Означення 4.7. *Різницею двох векторів* $\bar a$ і $\bar b$ є вектор $\bar c$, що у сумі з вектором $\bar b$ дає вектор $\bar a$, тобто $\bar a-\bar b$, якщо $\bar b+\bar c=\bar a$.

З означення видно, що для побудови різниці $\bar a-\bar b$ потрібно віднести вектори $\bar a$ і $\bar b$ до спільного початку O і провести вектор (рис. 4.4).

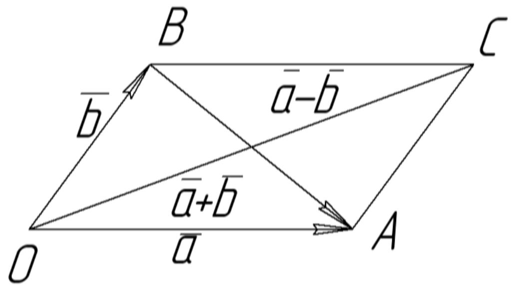

Рисунок 4.4

$\overline{BA}$ від кінця B вектора-від'ємника до кінця A вектора зменшуваного; цей вектор і є шукана різниця $\bar a-\bar b$. Отже $\overline{BA}=\bar a-\bar b=\bar c$.

Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\bar a$ і $\bar b$, одною з діагоналей є сума векторів $\bar a$ і $\bar b$, а другою – їхня різниця (рис. 4.4).

Означення 4.8. *Добутком* $\lambda\bar a=\bar a\lambda$ *вектора* $\bar a$ *на число* $\lambda\neq 0$ є вектор:

1) колінеарний вектору $\bar a$,

2) модуль (довжина) якого дорівнює добутку $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ модулів числа λ *і* вектора $\bar{a}$,

3) напрям його співпадає з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$ або протилежний йому, якщо $\lambda < 0$.

Ділення вектора на число просто звести до операції множення: щоб поділити вектор на число $\lambda \neq 0$, досить помножити цей вектор на обернене число $\frac{1}{\lambda}$, тобто

$$\bar{a} : \lambda = \bar{a} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{a}.$$

Зокрема, одиничний вектор, або орт $\bar{a}^0$, відповідний вектору $\bar{a}$, дістанемо з вектора $\bar{a}$, поділивши останній на його модуль $|\bar{a}|$, тобто помноживши на $\frac{1}{|\bar{a}|}$:

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \equiv \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}.$$

Добуток вектора на число має такі властивості:

1. $\alpha \cdot (\beta \bar{a}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{a}$,
2. $(\alpha + \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a}$,
3. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.

4.2. Визначення положення точки радіусом-вектором. Поділ відрізка у даному відношенні

Виберемо у просторі довільну точку *O*. Будемо називати її *початком* або *полюсом*. Тоді положення будь-якої точки *M* простору можна однозначно визначити вектором $\overline{OM}$, початок якого є фіксована точка – полюс *O*, а кінець – точка *M*. Цей вектор називають *радіус-вектор* точки *M* відносно *O* і позначають $\overline{r_M}$ (рис. 4.5).

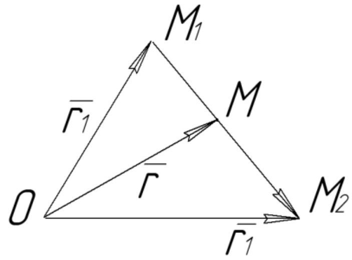

Рисунок 4.5

Якщо задано дві точки M_1 і M_2, що визначають вектор $\overline{M_1M_2}$ (рис. 4.5), то $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \overline{r_2} - \overline{r_1}$, тобто довільний вектор $\overline{M_1M_2}$ *дорівнює різниці радіуса-вектора його кінця і радіуса-вектора його початку.*

Розглянемо тепер задачу знаходження радіуса-вектора точки *M,* що лежить на прямій M_1M_2 і *ділить відрізок у заданому відношенні* $\lambda(\lambda = M_1\ M : MM_2)$.

Вочевидь, $\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$, але $\overline{M_1M} = \overline{r} - \overline{r_1}$ то $\overline{MM_2} = \overline{r_2} - \overline{r}$. Звідси,

$$\overline{r} - \overline{r_1} = \lambda\left(\overline{r_2} - \overline{r}\right)$$

$$r = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{1+\lambda}. \tag{4.1}$$

В окремому випадку, коли *M* є серединою відрізка $\overline{M_1M_2}$, $\lambda = 1$ і формула (4.1) набуває вигляду

$$r = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{2}. \tag{4.2}$$

4.3 Лінійна залежність векторів. Умова колінеарності двох векторів. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора

Введемо поняття лінійної залежності векторів.

Означення 4.9. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ..., \overline{n}$ називають *лінійно залежними,* якщо існують такі числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$, з яких хоча б одне було відмінне від нуля, при яких лінійна комбінація цих векторів із коефіцієнтами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ дорівнює нуль-вектору

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + ... + \delta\overline{n} = 0.$$

Розглянемо спочатку два лінійно залежних вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. З означення лінійної залежності маємо

$$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}=0, \qquad (4.3)$$

при цьому, хоча б один з коефіцієнтів a і β, наприклад, a не дорівнює нулеві. Тоді знайдемо:

$$\overline{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\overline{b}.$$

Ця рівність означає, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ *колінеарні.*

У випадку лінійної залежності трьох векторів маємо:

$$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}=0. \qquad (4.4)$$

Якщо $a\neq 0$, то $\overline{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\overline{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\overline{c}$ або $\overline{a}=\mu\overline{b}+\nu\overline{c}$, де $\mu=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\nu=-\frac{\gamma}{\alpha}$.

Означення 4.10. Лінійною комбінацією векторів $\mu\overline{b}+\nu\overline{c}$ є вектор, що лежить у площині, в якій лежать вектори $\overline{c}$ і $\overline{b}$. Тому й рівний йому вектор $\overline{a}$ буде паралельний цій площині або лежати в ній. Отже, вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ *компланарні.*

Це означає, що у випадку трьох компланарних векторів один із них можна розкласти за двома іншими неколінеарними векторами.

Дійсно, нехай маємо компланарні вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, з яких $\overline{a}$ і $\overline{b}$ неколінеарні. Відкладаємо $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ від спільного початку O (рис. 4.6) і позначимо $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$.

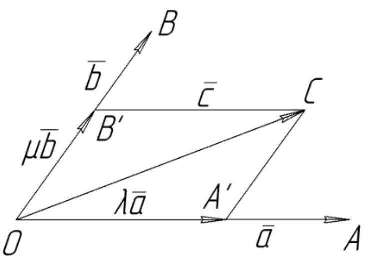

Рисунок 4.6

Точки O, A, B, C знаходяться в одній площині. Через кінець C вектора $\overline{c}$ проведемо прямі CA' і CB' паралельно прямим OA і OB відповідно. Отримаємо паралелограм OA'CB', діагоналлю OC якого є вектор $\overline{c}$. Отже, $\overline{c}=\overline{OA'}+\overline{OB'}$.

Вектори $\overline{OA'}$ і $\overline{OB'}$ колінеарні векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Тому $\overline{OA'} = \lambda \cdot \overline{a}$, $\overline{OB'} = \mu \cdot \overline{b}$, де λ і μ – відповідні відношення модулів цих пар колінеарних векторів. Звідси,

$$\overline{c} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} \tag{4.5}$$

Покажемо тепер, що у випадку трьох некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ будь-який четвертий вектор $\overline{d}$ можна представити у вигляді

$$\overline{d} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} + \nu \overline{c}. \tag{4.6}$$

Для цього віднесемо вектори *a, b, c* і *d* до спільного початку *O* (рис. 4.7).

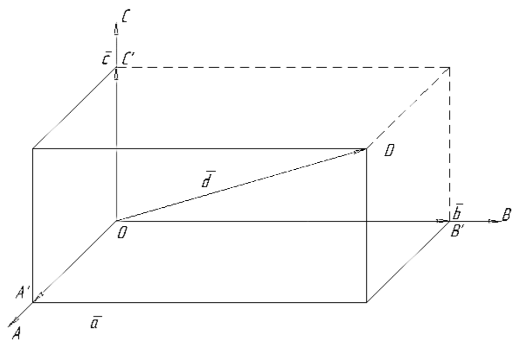

Рисунок 4.7

Позначимо $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$, $\overline{OD} = \overline{d}$. Через кінець *D* вектора $\overline{d}$ проведемо площини паралельно площинам *OAB, OBC* і *OCA.* Отримаємо паралелепіпед, діагональ якого є вектор $\overline{OD} = \overline{d}$, а ребра колінеарні відповідно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Діагональ $\overline{OD}$ замикає ламану *OA'ND.* Тому згідно з правилом додавання векторів маємо

$$\overline{d} = \overline{OD} = \overline{OA'} + \overline{A'N} + \overline{N'D}.$$

Оскільки $\overline{OA'}$, $\overline{A'N}$, $\overline{ND}$ колінеарні відповідно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ то, припустивши, що $\overline{OA'} = \lambda \cdot \overline{a}$, $\overline{A'N} = \mu \cdot \overline{b}$, $\overline{ND} = \nu \overline{c}$ дістанемо шукану залежність:

$$\overline{d} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b} + \nu \overline{c}.$$

4.4 Координати на прямій. Координати на площині. Координати у просторі

Розглянемо довільну пряму й виберемо на ній додатний напрям, фіксовану точку *O* (початок) і масштабну одиницю. Це координатна вісь.

Координатну вісь можна також визначити віднесеним до її початку *O* одиничним вектором $\bar{i}$ (рис. 4.8).

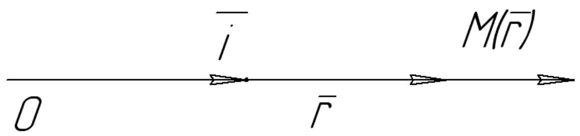

Рисунок 4.8

Положення довільної точки *M(r)* на цій осі визначимо її радіусом-вектором $\overline{OM} = \bar{r}$. Вектор $\overline{OM}$ колінеарний орту $\bar{i}$ незалежно від положення точки *M* на осі, а тому його завжди можна однозначно виразити через вектор *i* рівністю

$$\overline{OM} = \bar{r} = \bar{i} \cdot x, \qquad (4.6)$$

де число x є відношення модулів колінеарних векторів $\overline{OM} = \bar{r}$ та $\bar{i}$. Це число буде додатним $(x > 0)$, від'ємним $(x < 0)$, якщо ці напрями протилежні, і $x = 0$, якщо точка *M* співпадає з точкою *O*.

Рівність (4.6) встановлює взаємну однозначну відповідність між радіусом-вектором точок координатної осі й дійсними числами.

Тому число r називають *координатою вектора* $\overline{OM} = \bar{r}$ *відносно базису* (0; $\bar{i}$). Положення точки *M* також буде визначено числом x – довжиною (модулем) вектора $\overline{OM}$. Це число називають *координатою точки M* і позначають $M(x)$.

Щоб ввести поняття координат вектора й точки на площині, побудуємо в ній так званий координатний базис. Для цього від довільно вибраної точки *O* в площині відкладемо упорядковану пару взаємно перпендикулярних одиничних векторів (ортів) $\bar{i}$ та $\bar{j}$. Вектор *i,* що визначає координатну вісь Ox (вісь абсцис), розташуємо горизонтально, і напрям його виберемо зліва направо, а вектор $\bar{j}$, що визначає координатну вісь Oy (вісь ординат), – вертикально, і напрям його виберемо знизу догори (рис. 4.9).

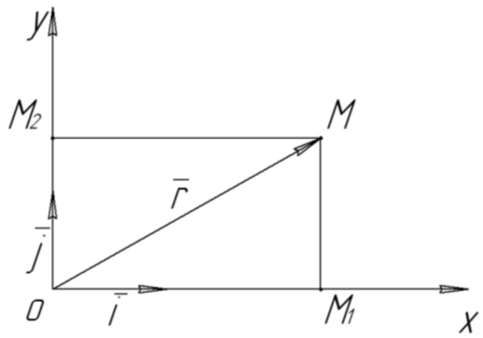

Рисунок 4.9

Тепер кожний вектор площини, а отже і радіус-вектор $\overline{OM}$ довільної точки M можна розкласти за базисними векторами $\bar{i}$ та $\bar{j}$, тобто представити у вигляді:

$$\overline{OM} = \bar{r} = \bar{i} \cdot x + \overline{j \cdot y} \qquad (4.7)$$

З рівності (4.7) видно, що кожному вектору площини відповідають два упорядкованих числа x і y – коефіцієнти при першому і другому базисних векторах, і навпаки, якщо задано два упорядкованих числа x і y, то можна однозначно побудувати відповідний їм вектор $\overline{OM} = \bar{r}$.

Числа x і y називають *координатами вектора* $\bar{r}$ у вибраному *базисі* (O; i; j).

Положення довільної точки M на площині визначає її радіус-вектор $\overline{OM}$. Тому кожній точці M можна поставити відповідну упорядковану пару чисел x і y. Ці числа називають *координатами точки M* і записують у вигляді $M(x, y)$

Назвемо координатним *базисом у просторі* віднесену до вибраної точки O (початок координат) упорядковану трійку перпендикулярних некомпланарних векторів $\bar{i}$ і $\bar{j}$, $\bar{\kappa}$. Орти $\bar{i}$ і $\bar{j}$ лежать у горизонтальній площині й визначають відповідно вісь Ox – вісь абсцис – і вісь Oy – вісь ординат. Орт $\bar{\kappa}$ проведено перпендикулярно до площини, в якій лежать орти $\bar{i}$ і $\bar{j}$; орт $\bar{i}$ визначає вісь O_Z – вісь аплікат (додатний напрям $\bar{\kappa}$ – догори) (рис. 4.10).

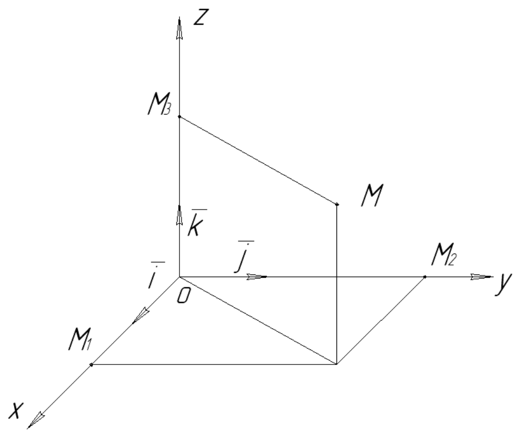

Рисунок 4.10

Кожна пара з трійки векторів визначає площину, яку називають *координатною площиною*.

Усі точки координатної площини, що визначено ортами $\bar{j}$ і $\bar{\kappa}$ (площина O_{YZ}), мають координату $x=0$, ортами $\bar{i}$ і $\bar{\kappa}$ (площина O_{XZ}) – $y=0$, а ортами $\bar{i}$ і $\bar{j}$ (площина O_{XY}) – $z=0$.

Розклад довільного вектора $\overline{OM}$ за базисними векторами

$$\bar{r}=\bar{i}\cdot x+\bar{j}\cdot y+\bar{k}\cdot z \qquad (4.8)$$

однозначно визначає для кожного вектора $\bar{r}$ три упорядковані числа *x, y, z – координати вектора* $\bar{r}$ *у вибраному базисі* $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{\kappa}$.

Положення кожної точки *M* простору визначає її радіус-вектор $\overline{OM}$. Цей вектор цілком визначено його координатами $\{x,y,z\}$. Тому і довільній точці *M* можна поставити взаємно однозначну відповідність упорядковану трійку чисел x, y, z, які будемо називати *координатами точки M* і записувати $M\{x,y,z\}$.

4.5 Координати точки поділу. Координати вектора, що задано двома точками. Ознака колінеарності двох векторів. Ознака компланарності трьох векторів

Розглянемо тепер дії з векторами у координатній формі.

Якщо у просторі задано два вектори їх координатами

$$\bar{a}=\bar{i}\cdot x_1+\bar{j}\cdot y_1+\bar{k}\cdot z_1,\ \bar{b}=\bar{i}\cdot x_2+\bar{j}\cdot y_2+\bar{k}\cdot z_2,$$

то на підставі алгебраїчних властивостей додавання, віднімання й множення вектора на число отримаємо

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (\bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1) \pm (\bar{i} \cdot x_2 + \bar{j} \cdot y_2 + \bar{k} \cdot z_2) =$$

$$= \bar{i} \cdot (x_1 \pm x_2) + \bar{j} \cdot (y_1 \pm y_2) + \bar{k} \cdot (z_1 + z_2), \qquad (4.9)$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (\bar{i} \cdot x_1 + \bar{j} \cdot y_1 + \bar{k} \cdot z_1) = \bar{i} \cdot (\lambda \cdot x_1) + \bar{j} \cdot (\lambda \cdot y_1) + \bar{k} \cdot (\lambda \cdot z_1). \qquad (4.10)$$

Тобто, *координати суми (різниці) двох векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат цих векторів, а координати добутку вектора на число дорівнюють добутку відповідних координат вектора на це число.*

Узагальненням цих результатів є правило знаходження координат лінійної комбінації векторів.

Якщо у просторі

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overline{a_n}, \qquad (4.11)$$

$$\bar{a} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z,$$

$$\overline{a_m} = \bar{i} \cdot x_m + \bar{j} \cdot y_m + \bar{k} \cdot z_m, \ (m = 1, 2, 3, ...n)$$

то

$$\begin{cases} x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + ... + \lambda_n \cdot x_n, \\ y = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + ... + \lambda_n \cdot y_n, \\ z = \lambda_1 \cdot z_1 + \lambda_2 \cdot z_2 + ... + \lambda_n \cdot z_n. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Для площини формули, відповідні формулам (4.9)–(4.12), отримаємо, взявши координати $z = 0$, а для прямої – $y = 0, z = 0$.

Знайдемо координату точки $M\{x, y, z\}$, що ділить відрізок M_1M_2 між точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ у відношенні $\lambda = M_1M : MM_2$. Із формули (4.1) маємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}. \qquad (4.14)$$

Як окремий випадок для $\lambda = 1$ дістанемо формули, що визначають *координати середини відрізка* M_1M_2

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Тепер знайдемо координати *x, y,* z вектора $\overline{M_1M_2}$, початком якого є точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а кінцем – точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Оскільки $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, отримаємо

$$x = x_2 - x_1,\quad y = y_2 - y_1,\quad z = z_2 - z_1.$$

Як відомо, між колінеарними векторами $\overline{a} = \overline{i} \cdot x_1 + \overline{j} \cdot y_1 + \overline{k} \cdot z_1$ $\overline{b} = \overline{i} \cdot x_2 + \overline{j} \cdot y_2 + \overline{k} \cdot z_2$ існує лінійна залежність $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$.

Звідси,

$$x_1 = \lambda \cdot x_2,\ y_1 = \lambda \cdot y_2,\ z_1 = \lambda \cdot z_2,$$

або

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda. \tag{4.15}$$

Це означає, що координати колінеарних векторів *пропорційні.*

Між компланарними векторами $\overline{a} = \overline{i} \cdot x_1 + \overline{j} \cdot y_1 + \overline{k} \cdot z_1$, $\overline{b} = \overline{i} \cdot x_2 + \overline{j} \cdot y_2 + \overline{k} \cdot z_2$ існує лінійна залежність

$$\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c} = 0.$$

Векторна рівність еквівалентна трьом різницям

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \cdot x_3 = 0, \\ \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 + \gamma \cdot y_3 = 0, \\ \alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2 + \gamma \cdot z_3 = 0. \end{aligned}$$

Ця система рівнянь відносно $\alpha, \beta, \gamma \cdot$ лінійна й однорідна. А для того щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулеві

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отримана формула означає, що *три вектори компланарні.*

4.6 Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів. Властивості й застосування в економічних задачах

Скалярний добуток і його властивості

Означення 4.11. *Скалярним добутком* двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові їхніх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначається символом $(\overline{a}, \overline{b})$ або $\overline{a} \cdot \overline{b}$; абсолютна величина позначається $\left|\overline{a}\right|$ та $\left|\overline{b}\right|$ й обчислюється за формулою, якщо

$$\overline{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}, \overline{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\},$$

то

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ , \quad \left|\overline{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\ .$$

Отже, на підставі означення отримаємо формулу

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\phi. \qquad (4.16)$$

де ϕ – кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Оскільки,

$$Пр_{\overline{b}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\phi,$$

$$Пр_{\overline{b}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\cos\phi,$$

то

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left|\overline{a}\right| \cdot Пр_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot Пр_{\overline{b}}\overline{a},$$

$$Пр_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}. \qquad (4.17)$$

Властивості скалярного добутку

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$.
2. $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{a})$.
3. $(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$.
4. $(\overline{a}, \overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2$, звідки $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \underline{a})}$.
5. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$ або один із них, або обидва є нульовим вектором.

Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\overline{s}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = (\overline{F}, \overline{s}). \qquad (4.18)$$

Визначення скалярного добутку через координати

Якщо $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то отримаємо формулу для знаходження скалярного добутку

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \qquad (4.19)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Кут між двома векторами

Якщо відомі координати векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, то

$$\cos\phi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (4.20)$$

Приклад 4.1. Обчислити ($\overline{a}, \overline{b}$), якщо $\overline{a} = \{4; -2; -4\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

Розв'язання

Користуючись формулою (4.19), знаходимо

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

Приклад 4.2. При якому значенні m вектори $\overline{a} = \{m; 3; 4\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ будуть перпендикулярними?

Розв'язання

Два вектори перпендикулярні, якщо скалярний добуток дорівнює нулеві, тому, користуючись формулою (4.19), знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 4 \cdot m + 3 \cdot m + 4 \cdot (-7) = 7m - 28.$$

Оскільки вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні, то $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$. Отже, $7m - 28 = 0$. Звідси отримаємо, що $m = 4$.

Приклад 4.3. Обчислити роботу, яку виконує сила $\overline{F} = \{3; -2; -5\}$, коли її точка прикладання рухається прямолінійно, переміщуючись із положення *A(2; -3; 5)* у положення *B(3; -2; -1)*.

Розв'язання

Згідно з формулою (4.18) робота $A=(\overline{F},\overline{AB})$. Вектор переміщення $\overline{AB}=\{1;1;-6\}$.

Тоді $A=3\cdot 1+(-2)\cdot 1+(-5)\cdot(-6)=31$. Отже, робота A, яку виконує сила $\overline{F}$, дорівнює 31.

Приклад 4.4. Дано вершини трикутника ABC A(-1;2;4), B(-4;-2;0),C(3;-2;1). Знайти його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язання

Кут ϕ – це кут між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ $\overline{BA}=\{3;0;4\}$, $\overline{BC}=\{7;0;1\}$ Тоді, використовуючи формулу (4.20), отримаємо

$$\cos\phi=\frac{(\overline{BA},\overline{BC})}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}}=$$

$$=\frac{25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}}=\frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $\phi=45^0$.

Приклад 4.5. Дано вектори $\overline{a}=\{1;-3;4\}$, $\overline{b}=\{3;-4;2\}$, $\overline{c}=\{-1;1;4\}$. Знайти проєкцію вектора $\overline{a}$ на $2\overline{b}+3\overline{c}$.

Розв'язання

Користуючись формулою (4.20), знаходимо

$$2\overline{b}=\{6;-8;4\},\ 3\overline{c}=\{-3;3;12\},\ 2\overline{b}+3\overline{c}=\{3;-5;16\}.$$

Далі знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $2\overline{b}+3\overline{c}$

$$\overline{a}\cdot(2\overline{b}+3\overline{c})=1\cdot 3+(-3)\cdot(-5)+4\cdot 16=3-15+64=52,$$

$$|2\overline{b}+3\overline{c}|=\sqrt{3^2+(-5)^2+16^2}=\sqrt{9+25+256}=\sqrt{290},$$

$$Пр_{2\overline{b}+3\overline{c}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot(2\overline{b}\cdot 3\overline{c})}{|2\overline{b}+3\overline{c}|}=\frac{52}{290}=\frac{26}{145}.$$

Векторний добуток і його властивості

Означення 4.12. *Векторним добутком* векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається вектор $\overline{a}\times\overline{b}$, що задовольняє умовам:

1) вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

2) довжина $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

3) якщо звести вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ та $\overline{a}\times\overline{b}$ до спільного початку, то спостерігач, який розташований у кінці вектора $\overline{a}\times\overline{b}$, бачитиме найкоротший поворот від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 4.11).

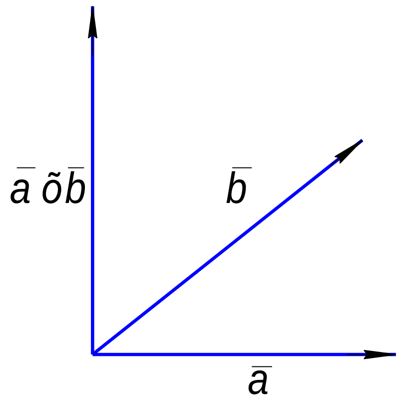

Рисунок 4.11

Властивості векторного добутку

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.
2. $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\sin\phi$, де $\phi=\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.
3. $\lambda(\overline{a}\times\overline{b})=(\lambda\overline{a})\times(\lambda\overline{b})$.
4. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.

5. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні (паралельні) або один із них нульовий.

Формула векторного добутку через координати множників має вигляд

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (4.21)$$

Приклад 4.6. Дано точки $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Знайти векторний добуток векторів $\overline{AB}\times\overline{BC}$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BC}$
$\overline{AB}=\{-1;3;-4\}$, $\overline{BC}=\{2;0;2\}$

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\overline{i}-4\overline{j}-6\overline{k}.$$

Отже, $\overline{AB}\times\overline{BC}=\{6;-4;-6\}$.

Застосування векторного добутку векторів

Розглянемо задачі, під час розв'язання яких застосовується векторний добуток векторів.

1. Задача про обчислення площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (рис. 4.12). Модуль векторного добутку $\overline{a}\times\overline{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, які мають спільний початок, тобто виходять з однієї точки. Отже площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $S=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\sin\phi=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$, тому можна отримати формулу для обчислення площі паралелограма

$$S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|. \tag{4.22}$$

Формула (4.22) є формулою для обчислення площі паралелограма.

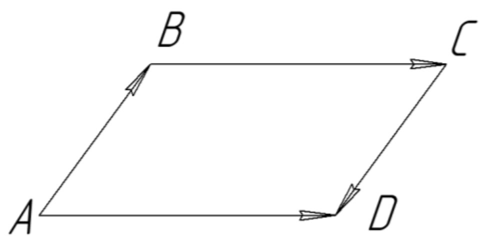

Рисунок 4.12

Із формули площі паралелограма знаходимо формулу обчислення площі трикутника. Площа трикутника буде дорівнювати половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|. \tag{4.23}$$

Формула (4.23) є формулою для обчислення площі трикутника.

Задача на обчислення моменту сили. Момент сили $\overline{F}$, прикладеної в точці *M*, відносно фіксованої точки *O*. Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, прикладену до точки *M*, а вектор $\overline{a} = \overline{OM}$, то вектор $\overline{a} \times \overline{F}$ є моментом сили $\overline{F}$ відносно точки *O*, тобто

$$M_o = \overline{a} \times \overline{F} \tag{4.24}$$

Формула (4.24) є формулою для обчислення моменту сил.

Приклад 4.7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = \left\{1;\, 0;\, -\frac{1}{4}\right\}$, $\overline{b} = \{4;\, -12;\, -5\}$.

Розв’язання

Застосовуючи формулу (4.21), отримаємо

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 4\overline{j} - 12\overline{k},$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \{-3;\, 4;\, -12\}.$$

Тому площа дорівнює

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$$

Приклад 4.8. Знайти площу просторового трикутника з вершинами у точках $A(1;2;1), B(4;3;2), C(2;4;4)$.

Розв’язання

Нехай $\overline{a} = \overline{AB} = \{3;1;1\}$, $\overline{b} = \overline{AC} = \{1;\, 2;\, 3\}$. Знаходимо $\overline{a} \times \overline{b}$.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}-8\bar{j}+5\bar{k},$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{1^2+(-8)^2+5^2}=\sqrt{1+64+25}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\,.$$

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}=\frac{3}{2}\sqrt{10}\ .$$

Приклад 4.9. Сила $\bar{F}=\{\,1;-2;4\}$ прикладена до точки $M(1;2;3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3;;2;-1)$.

Розв’язання

Знаходимо координати вектора $\overline{AM}=\{\,-2;0;4\}$ і, застосовуючи формулу (4.24), отримаємо:

$$M_A\bar{F}=\overline{AM}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=8\bar{i}+12\bar{j}+4\bar{k}.$$

$$M_A\bar{F}=(8;12;4).$$

Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості

Означення 4.13. *Мішаним добутком* векторів $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ називається векторний добуток векторів $\bar{a}\times\bar{b}$ на скалярний добуток вектора $\bar{c}$.

Мішаний добуток векторів $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ позначається символом $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Геометричне тлумачення мішаного добутку векторів

Мішаний добуток, який є числом, має таке геометричне тлумачення: якщо вектори $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ не компланарні, то їхній мішаний добуток дорівнює об’ємові V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (мають спільний початок, тобто виходять з однієї точки), як на сторонах, якщо трійка $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ – права, і мінус V паралелепіпеда, якщо ця трійка ліва.

Висота h паралелепіпеда дорівнює $Пр_{\bar{a}}\bar{c}$ (рис. 4.13). Отже його об'єм обчислюється за формулою

$$V = S \cdot h = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} \qquad (4.24)$$

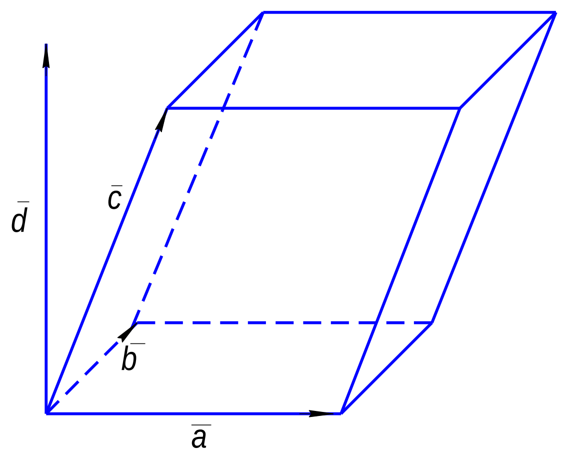

Рисунок 4.13

Основні властивості мішаного добутку

1. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$.

2. Якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні (це означає, що точки, які утворюють ці вектори, лежать в одній площині), тобто $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

Умова компланарності трьох векторів

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.25)$$

Вираження мішаного добутку через координати векторів

Нехай дані координати векторів $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, тоді мішаний добуток обчислюється за формулою

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.26}$$

Приклад 4.10. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a} = \{3; 2; 1\}$, $\bar{b} = \{1; 4; 1\}$, $\bar{c} = \{1; 1; 3\}$.

Розв'язання

Застосовуючи формулу (4.26), отримаємо:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 1 - 4 - 6 - 3 = 26.$$

Приклад 4.11. Перевірити, чи лежать точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 3)$ в одній площині.

Розв'язання

Умова, чи знаходяться точки в одній площині – це є умова компланарності векторів.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = \{-1; -1; 6\}$, $\overline{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overline{AD} = \{1; -1; 4\}$ й обчислимо їхній мішаний добуток. Отримаємо:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 12 - 0 - 8 - 2 = 0.$$

Отже, дані вектори компланарні, тобто лежать в одній площині.

Застосування мішаного добутку векторів

Розглянемо задачі, під час розв'язання яких застосовується мішаний добуток векторів.

Задача на обчислення об'єму тетраедра (трикутної піраміди). Об'єм трикутної піраміди ABCD становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *і* $\overline{AD}$, тобто

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right| \tag{4.27}$$

Приклад 4.12. Знайти об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв'язання

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$.

$\overline{AB}=\{3;6;3\}$, $\overline{AC}=\{1;3;-2\}$, $\overline{AD}=\{2;2;2\}$. Далі обчислюємо їхній мішаний добуток

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=18+(-24)+6-18-12-(-12)=-18.$$

Використовуючи формулу (4.27), отримаємо $V_{nip}=\dfrac{1}{6}\left|-18\right|=3$.

Приклад 4.13. Дано вершини тетраедра: $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(9;-4;8)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на площину ABC.

Розв'язання

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами тетраедра $\overline{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\overline{AC}=\{4;0;6\}$, $\overline{AD}=\{7;-7;7\}$.

Обчислюємо їх мішаний добуток:

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ 7 & -7 & 7\end{vmatrix}=0+(-84)+84-0-(-56)-(-84)=140.$$

Використовуючи формулу (4.27) отримаємо:

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\left|140\right|=\frac{70}{3}\ .$$

З іншого боку,

$$V_{nip}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot h, \qquad (4.28)$$

де h – висота піраміди.

Використовуючи формулу (4.28) то площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, тобто $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\overline{i}-24\overline{j}+8\overline{k},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28.$$

Площа трикутника АВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ (кв.од.)$$

$$\frac{70}{3}=\frac{1}{3}\cdot 14\cdot h,$$

$$14h=70,\qquad h=5.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1. Задано точки $A(4;1;4)$, $B(-3;1;\ -4)$, $C(4;-5;1)$, $D(-6;2;-6)$. Знайти:

а) координати векторів $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$;

2) довжини $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$;

3) кут між векторами $\overline{AB}$, $\overline{AD}$;

4) площу трикутника ABC.

5 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

5.1 Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої

Зі шкільного курсу математики відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об’єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції. Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними образами.

Для застосування методів алгебри до розв’язування задач геометрії встановлюється зв’язок між геометричним об’єктом і числами. Способом встановлення такого зв’язку є метод координат, який вперше використав французький математик Рене Декарт (1596–1650).

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об’єкта.

В аналітичній геометрії вивчають дві основні задачі:

1. Складання рівняння геометричного об’єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.
2. Дослідження властивостей геометричного об’єкта за його рівнянням і побудувати його.

Виділяють також дві найпростіші задачі аналітичної геометрії:

1. Знаходження відстані між двома точками;
2. Ділення відрізка у заданому відношенні.

Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно вибраної системи координат; і навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.

Означення 5.1. *Рівнянням лінії L* у декартовій системі координат на площині називається рівняння вигляду $F(x;y)=0$, якому задовольняють координати *(x, y)* у кожній точці цієї лінії і не задовольняють координати жодної іншої точки. Лінію, яка лежить в площині, називається пласкою.

Нехай на площині задано пряму *L*. Складемо її рівняння відносно прямокутної системи координат (рис. 5.1). Візьмемо на прямій точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, а на площині вектор $\bar{n}=\bar{i}\cdot A+\bar{j}\cdot B$, перпендикулярний до *L*.

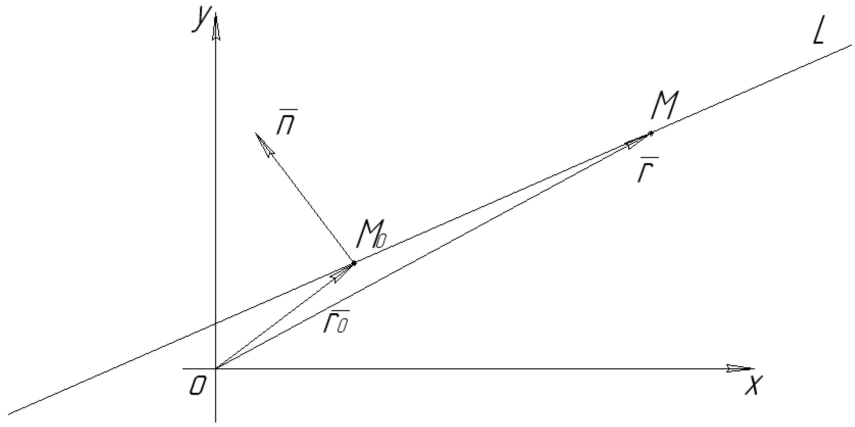

Рисунок 5.1

Позначимо довільну точку L через $M(x,y)$. Вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{n}$ взаємно перпендикулярні. Отже, скалярний добуток їх дорівнює нулеві: $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. Або в координатах:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{5.1}$$

Це і є рівняння прямої L. Воно лінійне.

Розглянемо тепер довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0. \tag{5.2}$$

Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є одною з точок, що лежить на цій лінії.

Підставляючи її координати в рівняння (5.2), дістанемо тотожність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Коли віднімемо цю тотожність від рівняння (5.2), то отримаємо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C = 0,$$

що виражає ту саму лінію, що і рівняння (5.2), і співпадає з рівнянням (3.1). Але це можливо лише тоді, коли лінія (5.2) пряма.

Означення 5.2. Рівняння (5.2) вигляду $Ax + By + C = 0$ називають *загальним* рівнянням прямої на площині.

Означення 5.3. Вектор $\overline{n}$**,** перпендикулярний до прямої L**,** називають вектором її *нормалі*.

Дослідимо, як розміщена пряма відносно системи координат Oxy, якщо рівняння (5.2) неповне, тобто коли деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Можливі такі випадки:

1) якщо коефіцієнт $C=0$, то пряма проходить через початок координат. Дійсно, у цьому випадку координати точки O(0; 0) задовольняють рівнянню (5.2);

2) якщо $B=0$, то пряма $Ax+C=0$ паралельна осі Ox. Справді, вектор її нормалі $\bar{n}=\bar{i}\cdot A+\bar{j}\cdot 0$ перпендикулярний до цієї осі;

3) аналогічно, якщо $A=0$, то пряма паралельна осі Ox, а вектор її нормалі $\bar{n}=\bar{i}\cdot 0+\bar{j}\cdot B$ перпендикулярний до цієї осі;

4) якщо $B=C=0$, то пряма $Ax=0$ співпадає з віссю Oy. Отже, $x=0$ є рівнянням осі Oy;

5) якщо $A=C=0$, то пряма $By=0$ співпадає з віссю Ox. Отже, $y=0$ є рівняння осі Ox.

Лінії на площині поділяються на алгебраїчні та трансцендентні. Лінія *L*, яка задана рівнянням $F(x;y)=0$ називається *алгебраїчною,* якщо $F(x;y)=0$ є многочленом від $(x;y)$. Лінії, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*.

Зауваження 5.1. Іноді замість виразу «задано рівняння лінії» будемо вживати вираз «задано лінію».

5.2 Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричне й канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Запишемо тепер рівняння прямої у відрізках на осях (рис. 5.2).

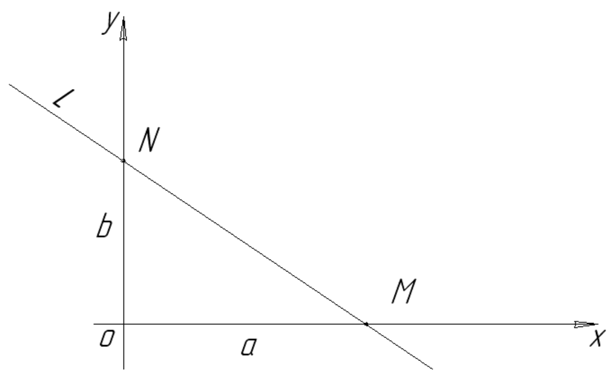

Рисунок 5.2

Нехай пряма *L*, перетинає вісь Ox у точці *M*, а вісь Oy у точці *N*. Відрізок *OM* дорівнює *a*, а відрізок ON – *b*, тобто точка *M* має координати $x=a,\ y=0$, а точка *N* має координати $x=0,\ \ y=b$. Ці точки лежать на прямій $Ax+By+C=0$. Це означає, що координати точок *M* і *N* задовольняють рівнянню прямої.

Підставимо координати точки M у рівняння прямої. Отримаємо:

$$A \cdot a + C = 0.$$

Звідси,

$$A = -\frac{C}{a}.$$

Аналогічно для точки N маємо:

$$B \cdot b + C = 0, \; B = -\frac{C}{b}.$$

Тепер підставимо значення A і B у рівняння прямої:

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Звідси отримаємо *рівняння прямої у відрізках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5.3)$$

Далі розглянемо *параметричне й канонічне рівняння прямої.*

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\bar{u} = \bar{i} \cdot l + \bar{j} \cdot m$.

Позначимо радіус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ через $\overline{r_0}$, а радіус-вектор довільної точки $M(x; y)$ через $\bar{r}$. Вектори $\overline{M_0M} = \bar{r} - \overline{r_0}$ і $\bar{u}$ колінеарні (рис. 5.3).

$$\bar{r} - \overline{r_0} = t \cdot \bar{u} \qquad (5.4)$$

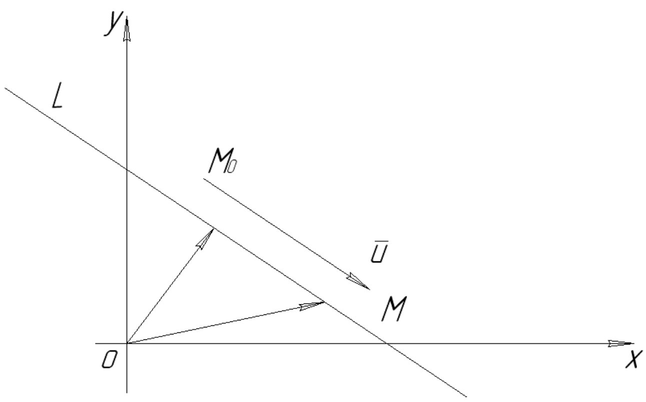

Рисунок 5.3

Отже, їхні координати пропорційні

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (5.5)$$

Звідси, згідно з (5.4)

$$\begin{cases} x=x_0+l\cdot t, \\ y=y_0+m\cdot t \end{cases} \qquad (5.6)$$

Рівняння (5.4) є векторним рівнянням прямої *L*, яку задано точкою і напрямним вектором $\overline{u}$.

Рівняння (5.5) називають *канонічним* рівнянням прямої, а рівняння (5.6) – її *параметричним* рівнянням.

У рівняння (5.6) входить змінний параметр прямої *t.* Коли точка *M* рухається вздовж прямої *L*, *t* змінюється як за абсолютною величиною, так і за знаком.

Знак *t* залежить від того, однаковий чи протилежний напрям мають вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{u}$. Абсолютна величина *t* пропорційна відстані точки *M* від точки M_0. В окремому випадку, коли вектор $\overline{u}$ є орт, $|t|$ дорівнює відстані між точками M_0 і *M.* Отже, якщо $|\overline{u}|=1$, то $|\overline{r}-\overline{r_0}|=|t|$.

Найчастіше пряму на площині задають *двома точками.* Покажемо, як у цьому випадку скласти її рівняння.

Нехай $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ – дві точки прямої L. Неважко побачити, що дві точки прямої визначають її напрямлений вектор, який в цьому випадку лежить на прямій $L:\overline{u}=\overline{M_1M_2}$. Тому координати вектора $\overline{u}$ визначимо за формулами: $l=x_2-x_1,_1 \quad m=y_2-y$. Підставляючи значення у рівняння (5.5), дістанемо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (5.7)$$

Це рівняння прямої, що *проходить через дві задані точки.*

Нехай тепер пряму задано точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і кутом ϕ, який вона утворює з додатнім напрямом осі Ox.

Позначимо через $M(x;y)$ довільну точку прямої *L.* Із трикутника M_0MN (рис. 5.4) знайдемо

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=tg\phi, \text{ або } y-y_0=k(x-x_0), \qquad (5.8)$$

де $k=tg\phi$ – кутовий коефіцієнт прямої.

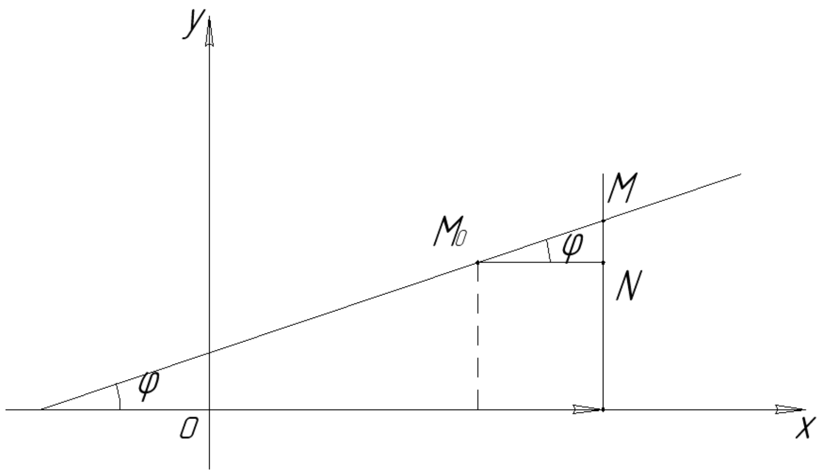

Рисунок 5.4

Рівняння (5.8) називають рівнянням прямої, що проходить *через задану точку у заданому напрямі*.

Часто пряму на площині задають кутом ϕ і відрізком *b*, який вона відтинає на вісі O_y (рис. 5.4). Легко помітити, що такий спосіб задання прямої зводиться до попереднього. Справді, у цьому випадку точка $M_0(0;b)$ є точкою перетину прямої L із віссю Oy. Підставляючи координати точки M_0 у рівняння (5.8), отримаємо $y-b=kx$ або остаточно

$$y=kx+b \qquad (5.9)$$

Рівняння (5.9) називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

Якщо пряму задано загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (5.2), то її кутовий коефіцієнт

$$k=-\frac{A}{B}.$$

Дійсно, із (5.2) маємо

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Звідси

$$\kappa=-\frac{A}{B},\, b=-\frac{C}{B}.$$

Якщо позначити кут між вектором нормалі $\overline{n}$ і додатним вектором осі O_x через *a*, то дістанемо: $tg\phi=\frac{B}{A}$, тобто $k=tg\phi=-ctg\alpha$ (рис. 5.5).

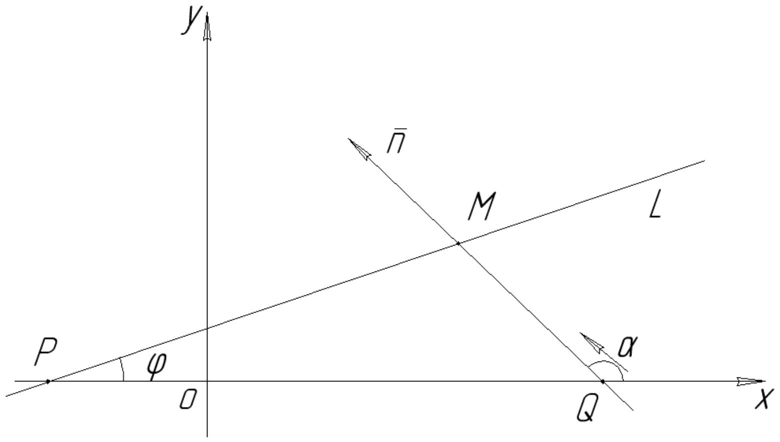

Рисунок 5.5

Якщо пряма L паралельна вісі Oy, то $k = tg\frac{\pi}{2} = \infty$. Отже рівняння прямої, що паралельна осі Oy, не може бути записане у вигляді (5.9).

5.3 Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності й паралельності двох прямих

Розглянемо дві прямі, що не паралельні осі Oy. Точку перетину цих прямих позначимо через *M*, точки перетину їх з віссю *Ox* через *K* і *M*, а кути нахилу до осі *Ox* – через ϕ_2 і ϕ_2. Із трикутника *KMN* (рис. 5.6) дістанемо $\theta = \phi_2 - \phi_1$.

Отже,

$$tg\theta = tg(\phi_2 - \phi_1) = \frac{tg\phi_2 - tg\phi_1}{1 + tg\phi_1 tg\phi_2}$$

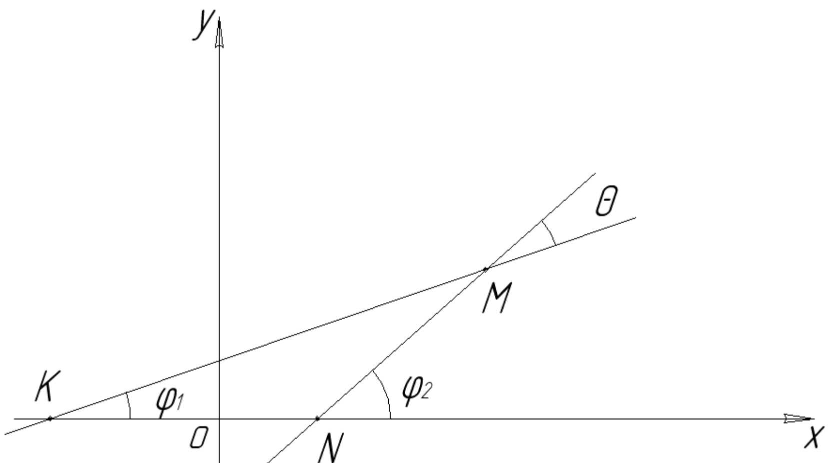

Рисунок 5.6

Але, $tg\phi_1 = k_1, tg\phi_2 = k_2$. Тому

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (5.10)$$

Ця формула і дає можливість визначати кут між двома прямими. Тут k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти даних прямих.

Якщо дві прямі, між якими потрібно визначити кут, задано загальними рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \; A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то краще користуватись формулою

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (5.11)$$

Цю формулу легко отримати, враховуючи, що кут між двома прямими дорівнює куту між векторами їхніх нормалей $\overline{n_1} = \{A_1; B_1\}$ і $\overline{n_2} = \{A_2; B_2\}$.

Розглянемо тепер умови паралельності й перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі паралельні, то кут $\theta = 0$. Тоді з (5.10) випливає, що $k_2 - k_1 = 0$, тобто

$$k_2 = k_1. \qquad (5.12).$$

Або $\overline{n_1} = \{A_1; B_1\}$ та $\overline{n_2} = \{A_2; B_2\}$ – колінеарні, а саме виконується рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Умова (5.12) і є умовою паралельності двох прямих.

Із формули (5.10) також легко отримати умову перпендикулярності двох прямих. Справді, якщо $\theta = \frac{\pi}{2}$, то

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Звідси, якщо прямі перпендикулярні, то $k_1 k_2 = -1$, або

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (5.13)$$

У випадку, коли прямі задано загальними рівняннями, то для виведення умови перпендикулярності краще використати формулу (5.11). Дві прямі перпендикулярні $\theta = \frac{\pi}{2}$, якщо

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (5.14)$$

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} \text{ та } \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2},$$

тоді умовою їхньої перпендикулярності буде

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0,$$

а умовою паралельності буде

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Кут між двома прямими, що задані канонічно

$$\cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

5.4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму *L*. Через початок *O* системи координат проведемо нормаль до прямої і позначимо кут нахилу нормалі до осі O_X через α, точку її перетину з прямою L – через M_0, а довжину відрізка OM_0 – через *p*. Напрям прямої від *O* до M_0 будемо вважати додатним. Величини α і *p* цілком визначають положення прямої *L* на площині (рис. 5.7).

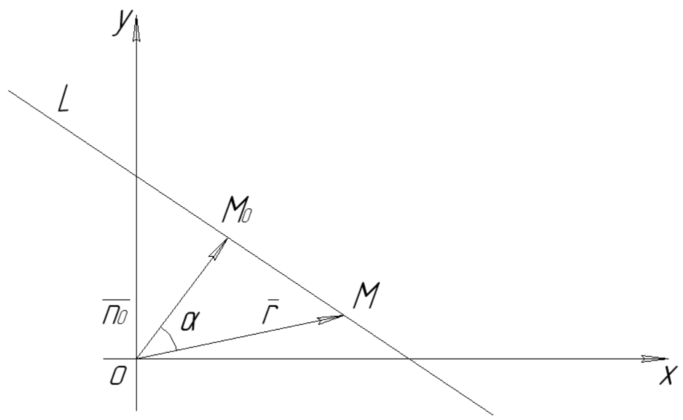

Рисунок 5.7

Позначимо через M довільну точку прямої L, орт нормалі через $\overline{n_0} = \bar{i} \cdot \cos\alpha + \bar{j} \cdot \sin\alpha$. Спроєктуємо радіус-вектор $\bar{r}$ точки M на нормаль

$$np_{\overline{n_0}}\bar{r} = \bar{r} \cdot \overline{n_0}.$$

Але $np_{\overline{n_0}}\bar{r} = p$. Отже,

$$\bar{r} \cdot \overline{n_0} = p. \qquad (5.15)$$

Виразимо скалярний добуток (5.15) двох векторів через їхні координати. Дістанемо рівняння

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0. \qquad (5.16)$$

Рівняння (5.16) називають *нормальним* рівнянням прямої. Нехай задано рівняння прямої у загальному вигляді

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5.17)$$

Потрібно звести це рівняння до нормального.

У зв'язку з тим, що рівняння (5.16) і (5.17) є дві різні форми рівняння тієї самої прямої, то випливає

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{c} = \mu.$$

Звідси,

$$\cos\alpha = A\mu, \sin\alpha = B\mu, -p = C\mu.$$

Знайдемо коефіцієнт пропорційності μ:

$$A^2 \cdot \mu^2 + B^2\mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5.18)$$

Знак μ через умову $C \cdot \mu = -p$ має бути протилежним знаку С.

Отже, помноживши загальне рівняння прямої (5.17) на μ, отримаємо її нормальне рівняння:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (5.19)$$

Тепер, використовуючи рівняння (5.16) прямої у нормальному вигляді, знайдемо відстань від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до заданої прямої (рис. 5.8).

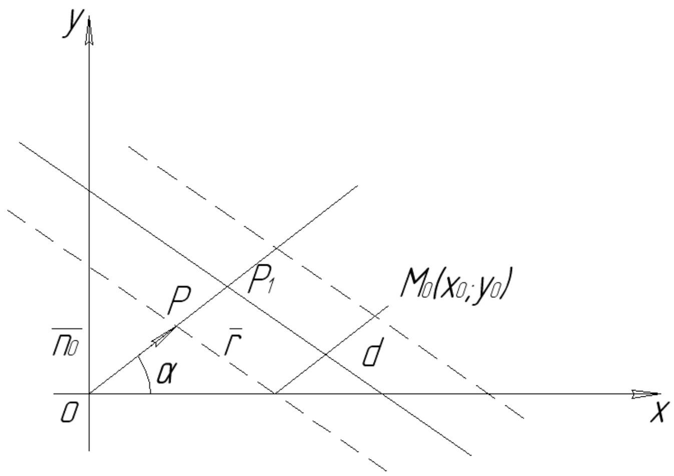

Рисунок 5.8

Нехай пряму *L* задано нормальним рівнянням

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$$

Проведемо через точку $M_0(x_0; y_0)$ пряму, що паралельна *L*. Її рівняння запишемо у нормальному вигляді; знаючи, що обидві прямі відрізняються тільки відстанню від початку координат

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p_1 = 0 \qquad (5.19)$$

Але, $p_1 = p + d$. Тому, враховуючи, що пряма (5.19) проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, отримаємо

$$d = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - p.$$

Якщо точка $M_1(x_1; y_1)$ лежить між початком координат і прямою, то $p_1 = p - d$. Тоді,

$$d = \left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \right|.$$

У загальному випадку відстань точки від прямої записуємо так:

$$d = \left| x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha - p \right|. \tag{5.20}$$

Якщо рівняння прямої задано у загальному вигляді, то

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.1 Знайти відстань від початку координат до прямої *2x+6y-3=0*.

Завдання 5.2. Побудувати лінії на одному кресленні й знайти точку перетину $2x - 3y + 1 = 0$, $x - y + 5z = 0$.

Завдання 5.3. Скласти рівняння прямих, що є паралельними прямій $x - y + 5z = 0$.

6 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

6.1 Загальне рівняння площини. Дослідження неповного рівняння площини. Рівняння площини у відрізках на осях. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай у просторі задано довільну площину *P*. Позначимо одну з її точок через M_0, а перпендикулярний до площини вектор – через $\overline{n}$. Легко бачити, що точка M_0 і вектор $\overline{n}$ цілком визначають площину *P*. Дійсно, через точку M_0 проходить тільки одна площина, що перпендикулярна до вектора $\overline{n}$.

Найпростішою поверхнею є площина. Площину в просторі *Oxyz* можна задати різними способами.

Введемо у просторі прямокутну систему координат і позначимо через $(x_0; y_0; z_0)$ координати точки M_0, а через $(x_0; y_0; z_0)$ – координати довільної точки *M* площини. Радіуси-вектори точок M_0 і *M* позначимо відповідно через $\overline{r_0}$ і $\overline{r}$, а координати вектора $\overline{n}$ – через $\{A, B, C\}$ (рис. 6.1).

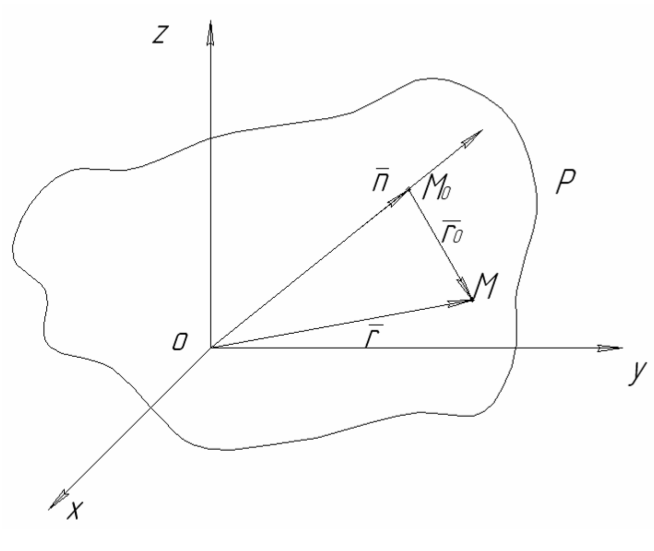

Рисунок 6.1

Вектор M_0M для будь-якого положення точки *M* перпендикулярний до вектора $\overline{n}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві

$$\left(\overline{r} - \overline{r_0}\right) \cdot \overline{n} = 0 \qquad (6.1)$$

Рівняння (6.1) є векторним рівнянням площини *P*. Виразимо його ліву частину через координати векторів $\overline{r}-\overline{r_0}$ і $\overline{n}$, унаслідок чого отримаємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (6.2)$$

Це рівняння площини, що проходить через задану точку.

Рівняння (6.2) є лінійним. Покажемо, що довільне лінійне рівняння є рівнянням площини.

Нехай задано довільне лінійне рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (6.3)$$

Щоб встановити, який геометричний зміст має це рівняння, підставимо координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ у рівняння (6.3)

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Віднімемо почленно отриману тотожність від рівняння (6.3). Отримаємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Як бачимо, отримане рівняння співпадає з рівнянням (6.2) і є рівнянням площини, що проходить через задану точку. Координати будь-якої точки площини *Q* задовольняють рівняння (6.2).

Означення 6.1. Вектор $\overline{n}\,(A; B; C)$ називають *нормальним вектором площини.*

Надаючи коефіцієнтам *A*, *B*, *C* рівняння (6.2) різні значення, можна отримати рівняння будь-якої площини, яка проходить через точку M_0. Сукупність площин, які проходять через дану точку, називається *пучком площин*, а рівняння (6.2) – *рівнянням пучка площин.*

Означення 6.2. Рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ (6.3) називають *загальним рівнянням площини*.

Різні випадки неповного рівняння площини характеризують особливості розміщення площини (6.3) відносно системи координат, а саме:

1. Якщо у рівнянні (6.3) коефіцієнт *D* дорівнює нулю, то площина проходить через початок координат. Справді, координати точки $O(0;0;0)$ задовольняють рівнянню $Ax+By+Cz+D=0$.

2. Якщо в рівнянні (6.3) $C=0$, то площина паралельна осі Oz. Дійсно, вектор нормалі $\overline{n}\,(A; B; C)$ площини $Ax+By+Cz+D=0$ перпендикулярний до осі Oz.

3. Якщо в рівнянні (6.3) $B=0$, то площина паралельна осі Oy.

4. Якщо в рівнянні (6.3) $A=0$, то площина паралельна осі Ox.

5. Якщо в рівнянні (6.3) $C=D=0$, то площина проходить через вісь Oz.

Дійсно, для площини $Ax + By = 0$ поєднуються умови перша й друга.

Аналогічно, площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $B_Y + C_Z = 0$ проходить через вісь Ox.

6. Якщо в рівнянні (6.3) $B = C = 0$, то площина паралельна координатній площині Oyz. Дійсно, оскільки площина $Ax + D = 0$ паралельна осям Oy і Oz, то вона паралельна площині Oyz.

7. Якщо в рівнянні (6.3) $B = C = D = 0$, то площина $Ax = 0$ співпадає з координатною площиною $x = 0$, тобто з площиною Oyz.

Аналогічно площина $By = 0$ співпадає з координатною площиною Oxz, а площина $Cz = 0$ – з площиною Oxy.

Найбільш загальним є випадок, коли рівняння (6.3) є повним. Тоді площина перетинає всі три координатні осі. Позначимо відрізки, які вона перетинає від осей, через a, b, c і запишемо рівняння площини у відрізках на осях.

Точки перетину площини з осями координат Ox, Oy, Oz мають такі координати $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$ (рис. 6.2).

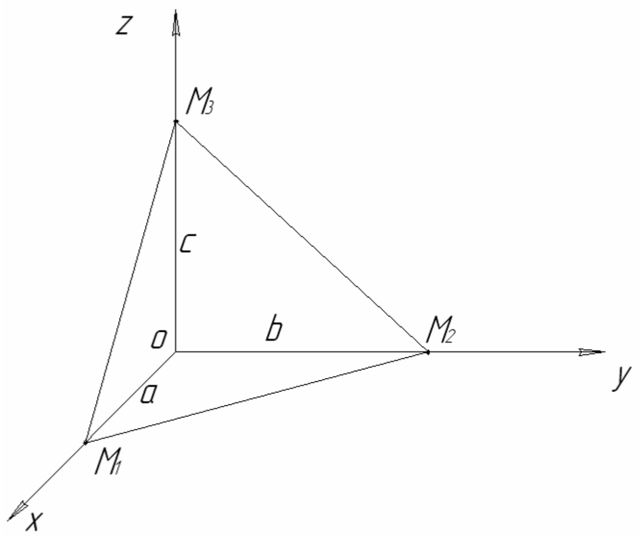

Рисунок 6.2

Координати цих точок задовольняють рівнянню площини. Отже, маємо:

$$Aa + D = 0, \quad A = -\frac{D}{a},$$

$$Bb + D = 0, \quad B = -\frac{D}{b},$$

$$Cc + D = 0, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Підставимо значення коефіцієнтів A, B, C у рівняння площини (6.3) і скоротимо на D. Отримаємо:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (6.4)$$

Це *рівняння площини у відрізках на осях*.

Запишемо тепер рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$ Позначимо через $M(x; y; z)$ довільну точку площини P. Три вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_2M}$, $\overline{M_3M}$ лежать у заданій площині. Запишемо умову компланарності цих векторів:

$$(\overline{M_1M}\times\overline{M_2M})\cdot\overline{M_3M}=0. \qquad (6.5)$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів, що стоїть у лівій частині рівняння (6.5), через координати цих векторів. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (6.6)$$

Це рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 6.1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$, $C(3;0;1)$

Розв’язання

Шукане рівняння площини має вигляд $x+y-3=0$.

6.2 Кут між двома площинами. Умови паралельності й перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини загальними рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

Двогранний кут між цими площинами вимірюється лінійним кутом. На підставі теореми елементарної геометрії про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами лінійний кут дорівнює куту між векторами нормалей $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ двох заданих площин. Кут між векторами $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ знайдемо за формулою

$$\cos\theta = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|}.$$

Взявши до уваги, що $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overline{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, визначимо *косинус кута* між двома площинами через коефіцієнти їхніх загальних рівнянь:

$$\cos\theta = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{6.7}$$

Якщо $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ то $\cos\theta = 0$. Отже, співвідношення

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \tag{6.8}$$

є умовою перпендикулярності двох площин у просторі.

Умова паралельності двох площин має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{6.9}$$

6.3 Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задано площину *P*. Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини *P* і позначимо точку його перетину з площиною через M_0. Відстань від початку *O* до площини, тобто довжину відрізка OM_0, позначимо через *p*.

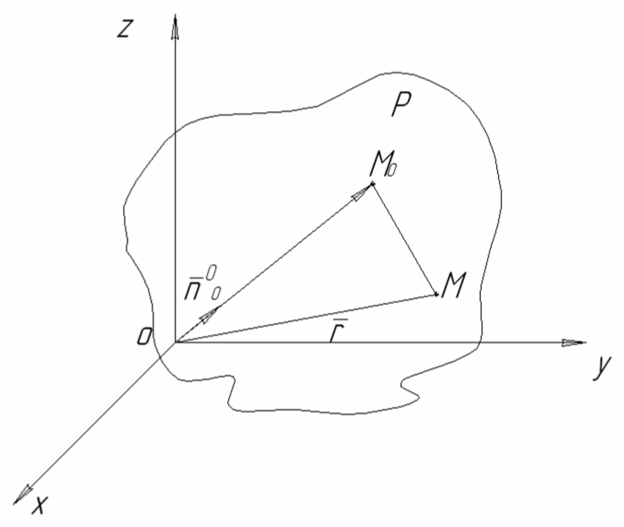

Рисунок 6.3

За додатний напрям вектора нормалі $\overline{n^0}$ до площини приймемо напрям від O до M_0. Кути, які він утворює з координатними осями O_X, O_Y, O_Z, позначимо через α, β, γ. Отже, координати орта нормалі будуть: $\overline{n^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Позначимо ще довільну точку площини через $M(x, y, z)$ і спроєктуємо її радіус-вектор $\bar{r}$ на нормаль до площини

$$np_{\overline{n^0}}\bar{r} = (\bar{r} \cdot \overline{n^0}) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma .$$

З іншого боку, безпосередньо з рис. 6.3 видно, що

$$np_{\overline{n^0}}\bar{r} = p .$$

Отже, порівнюючи ці два вектори для проєкції вектора, дістанемо

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p . \tag{6.10}$$

Це рівняння площини, що називають *нормальним рівнянням* площини.

Якщо задано загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то його можна звести до паралельного рівняння.

Дійсно, нормальне й загальне рівняння – це дві форми рівняння однієї площини. Отже, їхні коефіцієнти пропорційні

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D} = \mu .$$

Користуючись співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

виразимо коефіцієнт пропорційності μ. Маємо

$$\cos\alpha = A\mu, \quad \cos\beta = B\mu, \quad \cos\gamma = C\mu .$$

Отже,

$$(A\mu)^2 + (B\mu)^2 + (C\mu)^2 = \mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1 .$$

Звідки,

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Знак μ знаходимо з умови $-p = D\mu$. Тобто знак μ потрібно брати протилежний знаку вільного члена.

Помноживши тепер обидві частини загального рівняння площини на нормувальний множник μ, отримаємо:

$$\frac{Ax + By + Cz}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

– нормальне рівняння площини.

Розглянемо тепер задачу про знаходження відстані точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (6.10)$$

Проведемо через точку *M0* площину, що паралельна заданій. Її рівняння буде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0, \qquad (6.11)$$

де P_i – відстань площини (4.11) від початку координат. Але

$$p_1 = p + d,$$

де d – відстань точки M_0 від площини (6.10).

Площина (6.11) проходить через точку M_0. Тому

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (p + d) = 0.$$

Звідси,

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \qquad (6.11)$$

Тобто для того щоб знайти відстань точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини (6.10), потрібно у рівняння площини підставити координати точки, причому, у залежності від того, з якого боку від площини лежить точка M_0, знак правої частини (6.11) буде або додатним, або від'ємним. Тому формулу (6.11) треба записувати так:

$$d = \left| \ x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \ \right|. \qquad (6.12)$$

Якщо площину задано загальним рівнянням, то

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \qquad (6.13)$$

6.4 Параметричні й канонічні рівняння прямої у просторі. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряму L задано у просторі точкою M_0 і напрямленим вектором $\overline{U}$, тобто вектором, що паралельний прямій L. Позначимо через M довільну точку прямої, а через $\overline{r_0}$ і $\overline{r}$ – радіуси-вектори точок M_0 і M (рис. 6.4).

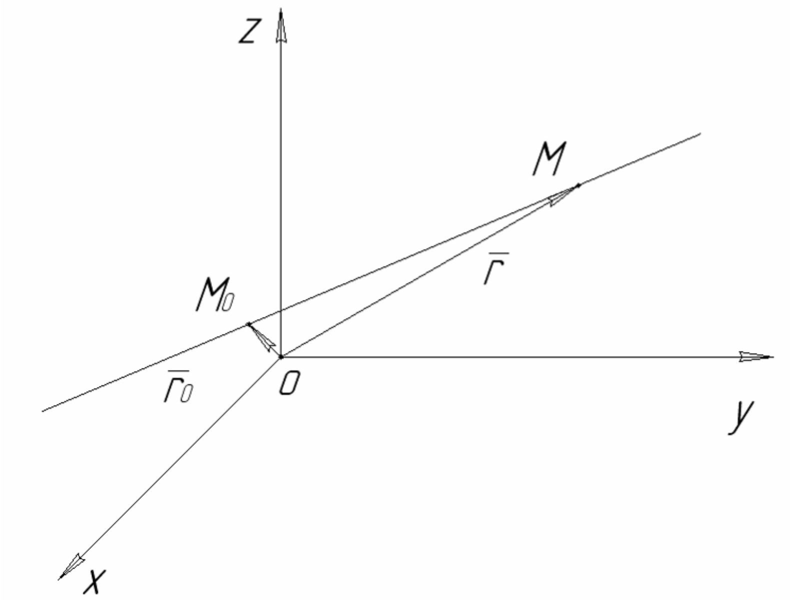

Рисунок 6.4

Згідно з визначенням вектори $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ і $\overline{U}$ колінеарні. Запишемо умову їхньої колінеарності у векторній формі

$$\overline{r} - \overline{r_0} = t \cdot \overline{u} \tag{6.14}$$

Рівняння (6.14) є *векторним рівняння* прямої у просторі.

Позначимо координати точок M_0 і M_1 через $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а координати напрямного вектора через $(l; m; n)$

$$\overline{U} = \{l, m, n\}$$

Числа l, m, n називають *напрямними коефіцієнтами прямої*. Якщо вектор $\overline{U}$ є орт, то $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$, де α, β, γ – кути, які пряма (6.14) утворює з осями координат.

Векторне рівняння (6.14) еквівалентне трьом рівнянням в координатній формі

$$x - x_0 = lt,\ \ y - y_0 = mt,\ \ z - z_0 = nt,$$

або

$$x = x_0 + lt,\ \ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt\ . \qquad (6.15)$$

Ці рівняння *називають параметричним рівнянням* прямої у просторі.

Вектори $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$ і $\overline{U}$ колінеарні. Тому їхні координати пропорційні. Тобто

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\ . \qquad (6.16)$$

Система рівнянь (4.15) еквівалентна одному векторному рівнянню (6.14) або трьом параметричним рівнянням (6.15). Рівняння (6.16) називають *канонічним рівнянням* прямої.

Як окремий випадок канонічних рівнянь прямої можна розглядати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ буде напрямним вектором $\overline{U}$ прямої. Тоді

$$l = x_2 - x_1,\ m = y_2 - y_1,\ n = z_2 - z_1.$$

і *рівняння прямої, що проходить через дві точки*, набуває вигляду

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\ . \qquad (6.17)$$

Якщо задано дві прямі у просторі

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}\ ,$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}\ ,$$

то кут між ними дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\overline{u_1} = \{l_1; m_1; n_1\}$ і $\overline{u_2} = \{l_2; m_2; n_2\}$. Кут між двома векторами, як відомо, визначається за формулою

$$\cos\theta = \frac{\overline{u_1} \cdot \overline{u_2}}{\left|\overline{u_1}\right| \cdot \left|\overline{u_2}\right|}\ .$$

Виразимо скалярний добуток і модулі векторів через координати цих векторів. Отримаємо формулу для визначення *кута між двома прямими:*

$$\cos\theta = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}\ . \qquad (6.18)$$

Якщо дві прямі перпендикулярні $\theta = \frac{\pi}{2}$, то

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (6.19)$$

Це є *умова перпендикулярності двох прямих.*

Умова паралельності двох прямих, тобто колінеарності їхніх напрямних векторів, має такий вигляд:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (6.20)$$

6.5 Кут між прямою й площиною. Умови паралельності й перпендикулярності прямої й площини

Розглянемо тепер задачу про знаходження кута між прямою *u* заданою рівнянням $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ і площиною *P*, заданою рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Відомо, що кут θ між прямою і площиною у просторі вимірюється кутом між прямою та її проєкцією на площину.

Кут ϕ між нормаллю $\bar{n}$ до площини *P* і прямою *L* доповнює шуканий кут θ між прямою і площиною до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 6.5). Але кут ϕ як кут між двома векторами $\bar{n}$ і $\bar{u}$ ($\bar{u}$ – напрямлений вектор, прямої *L*) можна визначити за формулою:

$$\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{u}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{u}|}.$$

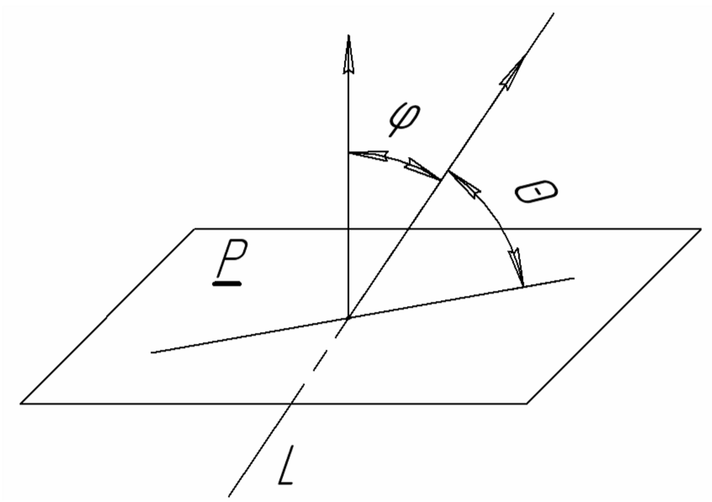

Рисунок 6.5

Звідси, враховуючи, що $\overline{n} = \{A, B, C\}$, $\overline{u} = \{l; m; n\}$ і

$$\cos\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,$$

отримаємо

$$\sin\theta = \pm\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Ця формула дає можливість знайти *кут між прямою й площиною у просторі.*

Якщо пряма паралельна площині, то кут $\theta = 0$. Отже співвідношення

$$Al + Bm + Cn = 0$$

є *умовою паралельності прямої і площини*.

Якщо пряма *L* перпендикулярна до площини *P,* то вектори $\overline{n}$ і $\overline{u}$ колінеарні. Отже співвідношення

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

є *умовою перпендикулярності прямої і площини*.

6.6 Задачі на пряму й площину в просторі

Перетин прямої й площини

Нехай потрібно знайти точку перетину прямої, яка задана параметрично

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

з площиною $Ax + By + Cz + D = 0$.

Розв’язавши ці рівняння, отримаємо

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \qquad (6.21)$$

З рівняння (6.21) знаходимо значення параметра t, яке відповідає точці перетину прямої і площини.

Можливі випадки:

1) $Am + Bn + Cp \neq 0$ – пряма перетинає площину в одній точці.

2) $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ – пряма паралельна площині.

3) $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ – пряма належить площині.

Приклад 6.2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ і площини $3x - 2y + z - 3 = 0$.

Розв'язання

Навпаки, перейдемо від канонічних рівнянь до параметричних: $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - t$. Підставимо значення x, y, z у рівняння площини

$$3(-1+2t) - 2(2+t) + (1-t) - 3 = 0,$$

$$t = 3.$$

Тому $x = 5,\ y = 5,\ z = -2.$

Рівняння прямої, що проходять через точку перпендикулярно до даної площини

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ має вигляд

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}. \qquad (6.22)$$

Приклад 6.3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Розв'язання

Отже $x_1 = 2,\ y_1 = -3,\ z_1 = -5,\ A = 6,\ B = -3,\ C = -5$. Тоді шукане рівняння набуває вигляду

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}.$$

Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (6.23)$$

Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої

Рівняння площини, що проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$, має вигляд:

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0 \qquad (6.24)$$

Приклад 6.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; 2; -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 1}{4}$.

Розв'язання

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = -1, m = 1, n = -3,\ p = 4;$$

$$1(x - 1) - 3(y - 2) + 4(z + 1) = 0;$$

$$x - 3y + 4z + 9 = 0.$$

Рівняння площини, яка проходить через задану пряму й задану точку

Нехай шукана площина проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і пряму $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$. Тоді вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\bar{s}$ – компланарні, тобто $(\overline{M_0M}, \ \overline{M_0M_1}, \ \bar{s}) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.25)$$

Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно іншій прямій

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і паралельна до прямої $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Якщо $M(x;y;z)$ – довільна точка площини, то вектори $(\overline{M_1M},\ \ \overline{s_1},\ \ \overline{s_2})$ – компланарні.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.26)$$

Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$, тоді $\overline{M_0M}$, $\overline{s}$, $\overline{n}$ – компланарні

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (6.27)$$

Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

Нехай площина проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Тоді вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{s}$ – компланарні

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0. \qquad (6.28)$$

Приклад 6.5. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$.

Розв’язання

Перша пряма проходить через точку $A(-2;1;0)$, друга через точку – $B(1;-2;1)$, $\bar{s}=\{3;-2;1\}$, $\overline{AM}=\{x+2;\ y-1;\ z\}$, $\overline{AB}=\{3;-3;1\}$.

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-3(x+2)+3(y-1)-6z+9z-3(y-1)+2(x+2)=0,$$

$$x-3z+2=0.$$

Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Їхні напрямні вектори відповідно $\overline{s_1}=\{m_1;n_1;\ p_1\}$ і $\overline{s_2}=\{m_2;n_2;\ p_2\}$.

Пряма l_1 проходить через точку M_1, радіус-вектор якої позначимо через $\overline{r_1}$, аналогічно l_2 проходить через точку M_2, радіус-вектор якої позначимо через $\overline{r_2}$. Тоді $\overline{r_2}-\overline{r_1}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$. Прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$, $\overline{M_1M_2}$ компланарні (мішаний добуток дорівнює нулеві)

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.29)$$

6.7 Застосування елементів аналітичної геометрії в економіці

Криві попиту й пропозицій. Точка рівноваги

Розглянемо залежність попиту D (demand) і пропозицій S (supply) від ціни на товар P (price). Чим менша ціна, тим більший попит при постійній купівельній спроможності населення. Зазвичай залежність D від P має вигляд неспадної лінії, наприклад прямої

$$D=-aP+c, a>0, c>0. \qquad (6.30)$$

У свою чергу, пропозиція зростає із зростанням ціни на товар, і тому залежність S від P мають таку характерні форму

$$S = bP + d,\ b > 0,\ d > 0. \qquad (6.31)$$

У формулах (6.30) і (6.31) a, b, c, d – так звані екзогенні величини; вони залежать від ряду інших причин (добробут суспільства, політичне становище й інше). Змінні, що входять у формули (6.30) і (6.31), додатні, тому графіки функцій мають сенс тільки в першій координатній чверті.

Для економіки представляє інтерес умова рівноваги, тобто рівність попиту й пропозицій; ця умова задається рівнянням

$$D(P) = S(P). \qquad (6.33)$$

Розв'язок відповідає точці M перетину кривих D і S, це так звана *точка рівноваги*. Ціна P_0, при якій виконана ця умова, називається *рівнодійною*.

При збільшенні добробуту населення, що відповідає зросту величини c у формулі (6.30), точка рівноваги M зміщується праворуч, оскільки крива D піднімається догори; при цьому ціна товару зростає при незмінній кривій пропозицій S.

Визначення рентабельності транспортного постачання

Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним й автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами

$$y = \frac{1}{2}x + 10, \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками км.

Для перевірки координат точки N знайдемо точку перетину

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5, \end{cases} \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = -5, \end{cases} \begin{cases} x = 10 \\ y = 15. \end{cases}$$

Графіки прямих перетинаються в точці $N(10;15)$. Графіки витрат дозволять зробити висновки:

а) коли $x \in [0;10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати на перевезення автотранспортом нижчі за витрати на перевезення залізничним транспортом;

б) коли $x \in [10;\infty)$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Рівновага доходу й збитків

Кампанія виробляє вироби *A* та продає їх по 2 долари за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума Y_B загальних щотижневих витрат (в доларах) на виготовлення виробів *A* кількістю *x* (тисяч одиниць) має таку закономірність $Y_B = 1000 + 1300x + 100x^2$. Необхідно визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів *A*, яка забезпечує рівновагу витрат та доходу.

Доход від продажу *x* тисяч виробів *A* вартістю 2 долари за кожний буде: $Y_Д = 2000x$.

Для рівноваги доходу та витрат треба щоб виконувалась рівність

$$Y_B = Y_Д \Rightarrow 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-2)(x-5) = 0 \to x_1 = 2, x_2 = 5.$$

Отже, ця задача має дві точки рівноваги. Компанія може виробляти $2000(x=2)$ виробів *A* з доходом і витратами 4000 доларів, або $5000(x=5)$ виробів з доходом і витратами 10000 доларів.

Розглянемо на цьому прикладі можливості компанії. Позначимо щотижневий прибуток *P*, тоді

$$\mathrm{P} = \mathrm{Y}_Д - Y_B = 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) =$$
$$= -1000 + 70x - 100x^2 = -100(x-2)(x-5).$$

З останньої рівності випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення *x* будуть точками рівноваги.

Коли $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0, x - 5 < 0$ і маємо $P > 0$, тобто компанія одержить прибуток. При інших значеннях *x*, тобто коли $x \notin [2;5]$ будемо мати $P < 0$ – компанія несе збитки.

Визначення витрат палива судном на підводних крилах

Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Потрібно знайти аналітичну залежність між витратами палива *m* і швидкістю судна *V*, враховуючи, що при *V* = 40 км/год витрачено 230 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді $V^2 = km$, де *k* – деякий коефіцієнт пропорційності.

Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дозволяє зробити висновок, що витрати палива змінюються за параболічним законом. При $m = 0$ швидкість $V = 0$, тобто парабола проходить через початок системи координат m_0V. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0(20;40)$, тому її координати задовольняють рівнянню параболи

$$40^2 = k \cdot 20 \Rightarrow k = 80.$$

Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкість судна буде: $V^2 = 80 \cdot m \Rightarrow m = \frac{V^2}{80}$. З цієї формули випливає, що при швидкості 60 км/год витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати $m = \frac{60^2}{80} = 45$ (літрів).

Дослідження впливу розширення тракторного парку на зростання врожаю зернових

У 1980 р. держава мала 108,5 тисяч тракторів й одержувала з одного гектара 8,5 ц зернових. У 1995 р. держава мала 510 тисяч тракторів й одержувала з одного гектара 21 ц зернових. Позначимо час – *x*, кількість тисяч тракторів – *y*; врожай, який одержали з одного гектара, позначимо *z* (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки

$$A(x_1; y_1): x_1 = 1980, y_1 = 108,5;$$

$$B(x_2; y_2): x_2 = 1995, y_2 = y_2 = 510;$$

$$M_1(x_1; z_1): x_1 = 1980, z_1 = 8,5;$$

$$M_2(x_2; z_2): x_2 = 1995, z_2 = 21.$$

Знайдемо рівняння прямих – графіків зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980–1995 роки у вигляді $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, одержимо

$$\frac{x - 1980}{1995 - 1980} = \frac{y - 108,5}{510 - 108,5},$$

$$\frac{x - 1980}{15} = \frac{y - 108,5}{401,5},$$

$$401,5(x - 1980) = 15(y - 108,5),$$

$$80,3(x - 1980) = 3(y - 108.5)$$

$$y = \frac{803}{30}x - 52889,5.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде:

$$k_1 = \frac{803}{30} \approx 26,767.$$

Використовуючи точки M_1 та M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара

$$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{z-8,5}{21-8,5},$$

$$\frac{x-1980}{15} = \frac{z-8,5}{12,5},$$

$$12,5(\text{x-1980}) = 15(\text{z-8,5}),$$

$$z = \frac{5}{6}x - 1641,5.$$

Отже, її кутовий коефіцієнт буде

$$k_2 = \frac{5}{6} \approx 0,833.$$

З умов задачі можна зробити висновок, що при зростанні тракторного парку врожайність зернових з 1 га зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових.

Таким чином, зростання тракторного парку сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно.

Зростання кількості тракторів – зростання енергоозброєності сільського господарства не є основним фактором у підвищенні ефективності сільського господарства. Необхідно враховувати вплив інших факторів, наприклад, якість насіння, культуру агротехніки.

Павутинна модель ринку

Розглянемо найпростішу задачу пошуку рівнодійної ціни. Це одна із основних проблем ринку, яка означає торг між виробником і покупцем.

Нехай спочатку ціну P_1 називає виробник (у простішій схемі він же і продавець). Ціна P_1 насправді вище рівнодійної (природно, що будь-який виробник прагне отримати максимум вигоди із свого виробництва). Покупець оцінює попит D_1 при цій ціні й визначає свою ціну P_2, при якій попит D_1 дорівнює пропозиції. Ціна P_2 нижче рівнодійної (будь-який покупець прагне купити подешевше). У свою чергу, виробник оцінює попит D_2, що відповідає ціні P_2, і визначає свою ціну P_3, при якій попит дорівнює пропозиції; ця ціна вища за рівнодійну. Процес торгу продовжується і при визначених умовах приводить до стійкого наближення до рівнодійної ціни, тобто до «закручування» спіралі. Якщо розглядати послідовність чисел, яка складається із так званих у процесу торгу цін, то вона має своєю границею рівнодійну ціну P_0. Можна помітити, що в цій схемі спіраль торгу скручується, якщо $b<a$. У протилежному випадку має місце або циркуляція за замкнутим циклом ($b=a$), або «розкручування» спіралі й відхід від рівнодійної ціни ($b<a$).

Завдання для самостійної роботи

Завдання 6.1. Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним й автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами

$$y=\frac{5}{2}x+10\,,\ y=x+10,$$

де x вимірюється десятками км. Знайти точку перетину й проаналізувати результат.

Завдання 6.2. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві прямі $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{2}$.

7 ГРАНИЦІ

7.1 Границя послідовності. Границя змінної

Поняття *границі функції* – одне з найважливіших у вищій математиці. Ми уже познайомилися з поняттям послідовностей, а тепер перейдемо до поняття границі функції.

Означення 7.1. Послідовність $\{x_n\}$ називається збіжною, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon . \qquad (7.1)$$

Число a при цьому називається *границею* послідовності $\{x_n\}$. Для позначення збіжності послідовності $\{x_n\}$ до числа a вживають запис: $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$ або $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Довільний інтервал вигляду $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ де $\varepsilon > 0$, називається ε*-околом* точки a. Якщо число a – границя послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ усі члени послідовності потрапляють в ε-окіл точки a, адже при вказаних n згідно з нерівністю (7.1) виконуються нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Якщо послідовність $\{x_n\}$ не збігається, то кажуть, що вона *розбігається*.

Означення 7.2. Число а називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер *N*, що при усіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon . \qquad (7.2)$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*. Якщо послідовність має своєю границею число *а*, тоді це записується так: $x_n \to a$ при $n \to \infty$, або

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a . \qquad (7.3)$$

Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною.*

Означення 7.3. Послідовність, яка має свою границю 0 $(a = 0)$, називається нескінченно малою послідовністю, де a_n – елемент малої послідовності $\{a_n\}$. Нерівність (7.2) еквівалентно нерівностям (див. властивість 4 модуля числа із 3.1) $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Це означає, що при $n > N$ усі елементи послідовності $\{x_n\}$ знаходяться у n-

околі точки a або в інтервалі $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, причому номер N визначається за величиною ε. Наведемо геометричну інтерпретацію цього означення. Оскільки послідовність представляє собою нескінченну множину чисел, то, якщо вона сходиться, у будь-якому ε-околі точки a на числовій прямій знаходиться нескінченна кількість точок – елементів цієї послідовності, тоді як поза ε-околом залишається кінцева кількість елементів. Тому границю послідовності часто називають точкою *згущенням*.

Необмежена послідовність не має кінцевої границі. Але вона може мати нескінченну границю, що записується у такому вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty. \qquad (7.4)$$

Якщо при цьому, розпочинаючи з деякого номеру, усі члени послідовності додатні (від'ємні), то пишуть: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, тоді $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно велика послідовність, яка має нескінченну границю (3.8), та навпаки, якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, тоді $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – нескінченно велика послідовність.

Приклад 7.1. Показати, використовуючи означення границі послідовності, що $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Розв'язання

Візьмемо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Так як $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$, то для задоволення нерівності (7.1) достатньо розв'язати нерівність $\dfrac{1}{(n+1)} < \varepsilon$, звідки отримуємо $n > \dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Приймемо $N = \left[\dfrac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]$ (ціла частина числа $(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon})^1$, щоб нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ здійснювалась при усіх $n > N$.

Приклад 7.2. Показати, що послідовність $\{x_n\} = (-1)^n$ або $-1, 1, -1, 1, \ldots$, не має границі.

Розв'язання

Дійсно, яке би число ми не припустили у якості границі, 1 або –1, при $\varepsilon < 0.5$ нерівність (7.1), що визначає границю послідовності, не задовольняється: поза ε-околом цих чисел залишається безкінечна кількcть елементів x_n, оскільки усі елементи з непарними номерами дорівнюють –1, а елементи з парними номерами дорівнюють 1.

Приклад 7.3. Знайти границю $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$.

Розв'язання

При $n\to\infty$ чисельник і знаменник дробі прагнуть до безконечності, тобто застосувати одразу теорему про границі частки неможливо, оскільки теорема передбачає існування кінцевих границь послідовності. Перетворимо цю послідовність, поділивши чисельник і знаменник на n^2. Застосовуючи потім теореми про границі частки, границі суми та знову границі частки, послідовно знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}=\frac{4}{n^2}}{4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n}=\frac{4}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})}=0.5$$

Приклад 7.4 Знайти границю послідовності $\left\{x_n\right\}=\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$ при $n\to\infty$.

Розв'язання

Тут, як і у попередньому прикладі, чисельник і знаменник не мають кінцевих границь, і тому спочатку робимо необхідні перетворення. Поділивши чисельник і знаменник на *n*, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_n\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n)}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})}.$$

Оскільки в чисельнику стоїть добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої послідовності, то в силу властивості 8 остаточно отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_n\right\}=\frac{0}{1+0}=0.$$

Приклад 7.5. Знайти границю послідовності $\left\{x_n\right\}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ при $n\to\infty$.

Розв'язання

Тут застосувати безпосередньо теорему про границю суми (різниці) послідовностей не можна, оскільки кінцевих границь доданків у формулі для $\{x_n\}$ не існує. Помножимо і поділимо формулу для $\{x_n\}$ на сумісний вираз $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Теорема 7.3. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

Теорема 7.4. (Про єдиність границі). Послідовність може мати тільки одну границю.

Послідовність, границя якої дорівнює нулеві, називається нульовою послідовністю.

Якщо границя числової послідовності позначається $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, або $x_n \to a$ при $n\to\infty$, то послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, а в противному випадку – *розбіжною.*

Зміст означення границі числової послідовності полягає в тому, що для достатньо великих n члени послідовності $\{x_n\}$ як завгодно мало відрізняються від числа A (за абсолютною величиною меншою, ніж на число ε, яким би малим воно не було).

Теорема 7.5. (Про обмеженість збіжної послідовності). Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

Остання теорема дає необхідну ознаку послідовності, її можна перефразувати, сформулювавши як достатню ознаку послідовності, а саме: послідовність розбігається, якщо вона необмежена.

7.2 Монотонні послідовності. Число *e*

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$, загальний член якої виражається формулою $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. У курсі математичного аналізу доводиться, що ця послідовність монотонно зростає, обмежена $(x_n < \delta)$ і має границю. Ця границя називається числом *e*. Отже, за означенням,

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{7.5}$$

Число e відіграє велику роль в математиці. Далі буде розглянуто спосіб його обчислення з будь-якою необхідною точністю. Відзначимо тут, що число e є ірраціональним, його наближене значення: e = 2,7182818…

Розглянемо два приклади використання числа e в економіці.

Приклад 7.6. Відомо, що формула складних відсотків має вигляд

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n, \tag{7.6 }$$

де Q_0 – початкова сума вкладу в банк, P – відсоток нарахування за певний період часу (місяць, рік), n – кількість періодів часу зберігання вкладу, Q – сума вкладу із плином n періодів часу.

Формули типу (7.6) використовуються також у демографічних розрахунках (приріст народонаселення) і в прогнозах економіки (збільшення валового національного продукту). У загальному випадку, якщо p – відсоток нарахування та рік розбитий на n частин, то через t років сума депозиту досягне значення

$$Q_n = Q_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^m,$$

де $r = \dfrac{p}{100}$.

Цей вираз можна перетворити:

$$Q_n = Q_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^n.$$

Введемо нову змінну $m = \dfrac{n}{r}$; при $n \to \infty$ отримаємо $m \to \infty$, або

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} Q_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^n = Q_0 e^n. \tag{7.7}$$

Розрахунки, виконані за формулою (3.12), називаються обчисленнями за безперервним відсоткам.

Приклад 7.7. Нехай темп інфляції складає 1 % на день. На скільки зменшиться первісна сума через півроку?

Розв'язання

Застосування формули (7.7) при $r = -0,01$ і $t = 182$ дає

$$Q \approx \frac{Q_0}{e^{1.82}},$$

де Q_0 – первісна сума, 182 – число днів в півріччі. Таким чином, інфляція зменшить первісну суму приблизно в 6 разів.

Означення 7.7. Послідовність $\{x_n\}$ називається *зростаючою* $(x_n < x_{n+1})$; *спадною* $(x_n > x_{n+1})$; *не зростаючою* $(x_n \geq x_{n+1})$; *не спадною* $(x_n \leq x_{n+1})$, для всіх $n \in N$.

Зростаючі, спадні, не зростаючі й не спадні послідовності називаються *монотонними,* а зростаючі та спадні послідовності, крім того, – *строго монотонними.*

Теорема 7.6. Будь-яка монотонна обмежена змінна має границю.

Означення 8. Границя послідовності $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ називається числом *e*, тобто $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

7.3 Нескінченно малі (великі) послідовності

Серед збіжних послідовностей виділимо один важливий клас.

Означення 7.9. Збіжна до нуля послідовність називається *нескінченно малою*.

Властивості нескінченно малих величин

1. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих величин є нескінченно малою.
2. Добуток двох (або будь-якого скінченного числа) нескінченно малих є нескінченно малою.
3. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.
4. Добуток нескінченно малої на обмежену – нескінченно мала.
5. Добуток нескінченно малої на стале число – нескінченно мала.

Означення 7.10. Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа $E > 0$ можна знайти такий номер *N*, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > E$. Позначається $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, або $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Встановимо зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими.

Теорема 7.9. Для того щоб $\{a_n\}$ $(a_n \neq 0)$ була нескінченно малою, необхідно і достатньо щоб $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ була нескінченно великою.

Властивості нескінченно великих величин:

1. Добуток нескінченно великої величини на функцію, границя якої відмінна від нуля, є величиною нескінченно великою.
2. Сума нескінченно великої й обмеженої функції є величина нескінченно велика.
3. Частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, яка має границю, є величина нескінченно велика.

Теорема 7.10. (Зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими величинами). Якщо функція $a(x)$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то функція $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. І навпаки, якщо функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то функція $a(x) = \frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 7.1. Обчислити:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4n^2}{5n}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1+2n}{n^3}$.

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+n-2n^3}{3n+5n^3}$.

є) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{5x}$.

Завдання 7.2. Обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{3x}}$.

8 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

8.1 Основні означення. Обчислення похідної. Таблиця похідних

Означення 8.1. *Похідною* неперервної функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо останній прямує до нуля. Функція, для якої така границя існує і є скінченною, називається *диференційовною в точці* x_0. Функція, яка є диференційовною в кожній точці інтервалу, називається *диференційовною на інтервалі*.

Похідна функції позначається y'.

Знаходження похідної називається *диференціюванням* функції. Для обчислення похідних використовують таблицю (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Номер	y	y′
1	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
2	e^x	e^x
3	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	a^x	$a^x \cdot \ln a$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
15	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

8.2 Основні правила диференціювання

Якщо C – деяка константа, $u = u(x)$, $v = v(x)$ − функції, що мають похідну, то:

1 $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

2 $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

3 $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2}$.

4 $f'(u(x)) = f'_u u'_x(x)$.

Приклад 8.1. Знайти похідні функцій:

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}$.

Розв'язання

$$y' = \left(2x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}\right)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7\left(x^{1/2}\right)' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x +$$
$$+7 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = 6x^2 - 10x + \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

б) $y = x^2 \ln x$.

Розв'язання

$$y' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

в) $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

Розв'язання

$$y'=\frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}.$$

г) $y=2\cos 3x$.

Розв'язання

$$y'=\left(2\cos 3x\right)'=2\left(-\sin 3x\right)\cdot\left(3x\right)'=2\left(-\sin 3x\right)\cdot 3=-6\sin 3x.$$

д) $y=\ln\left(6x-1\right)$.

Розв'язання

$$y'=\left(\ln\left(6x-1\right)\right)'=\frac{1}{6x-1}\cdot\left(6x-1\right)'=\frac{6}{6x-1}.$$

є) $y=\sin^8\frac{x}{8}$.

Розв'язання

$$y'=\left(\sin^8\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cdot\left(\sin\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cdot\left(\frac{x}{8}\right)'=8\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cdot\frac{1}{8}=$$

$$=\sin^7\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}.$$

ж) $y=\sqrt{x}arctg\sqrt{x}$.

Розв'язання

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'arctg\sqrt{x}+\sqrt{x}\left(arctg\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}arctg\sqrt{x}+\frac{1}{2\left(1+x\right)}.$$

Приклад 8.2. Обчислити похідну y' в точці x_0, якщо

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2},\quad x_0=1.$$

Розв'язання

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(4+x^2\right)'\left(4-x^2\right)-\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)'}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{2x\left(4-x^2\right)-\left(4+x^2\right)(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{8x-2x^3+8x+2x^3}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-x^2}{4+x^2}\cdot\frac{16x}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{8x}{16-x^4};$$

$$y'\left(x_0\right)=y'(1)=\frac{8\cdot 1}{16-1^4}=\frac{8}{15}.$$

Приклад 8.3. Довести, що функція $y=f\left(x\right)$ задовольняє рівнянню

$$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\quad \left(1-x^2\right)y'-xy=1.$$

Розв'язання

$$y'=\frac{\left(\arcsin x\right)'\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1+\arcsin x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо y і y' у рівняння:

$$\left(1-x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$1=1.$$

Отримано вірну рівність, отже функція $y=f\left(x\right)$ задовольняє рівнянню.

8.3 Похідні вищих порядків

Похідною *другого порядку* функції $y=f\left(x\right)$ називається похідна від її похідної, тобто

$$y''=\left(y'\right)'.$$

Похідні третього, четвертого й вищих порядків обчислюються послідовним диференціюванням. У загальному випадку

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Приклад 8.4. Знайти похідну другого порядку функції $y=f\left(x\right)$, якщо

$$y=-\frac{3}{x^2-5}.$$

Розв'язання

$$y'=\left(-\frac{3}{x^2-5}\right)'=-3\left(\left(x^2-5\right)^{-1}\right)'=-3\cdot(-1)\left(x^2-5\right)^{-2}\left(x^2-5\right)'=\frac{3}{\left(x^2-5\right)^2}\cdot 2x=$$

$$=\frac{6x}{\left(x^2-5\right)^2}.$$

$$y''=\left(\frac{6x}{\left(x^2-5\right)^2}\right)'=\frac{(6x)'\cdot\left(x^2-5\right)^2-6x\cdot\left(\left(x^2-5\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2-5\right)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{6\left(x^2-5\right)^2-6x\cdot 2\left(x^2-5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^4}=\frac{6\left(x^2-5\right)-24x^2}{\left(x^2-5\right)^3}=-\frac{30+18x^2}{\left(x^2-5\right)^3}.$$

Приклад 8.5. Для функції $y=f\left(x\right)$обчислити w:

$$y=e^{-x}\sin x,\quad w=y''+2y'+2y.$$

Розв'язання

$$y'=\left(e^{-x}\right)'\sin x+e^{-x}\left(\sin x\right)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}\left(cosx-\sin x\right);$$

$$y''=\left(e^{-x}\right)'\left(\cos x-\sin x\right)+e^{-x}\left(cosx-\sin x\right)'=-e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)+$$

$$+e^{-x}\left(-\sin x-\cos x\right)=-e^{-x}\left(\cos x-\sin x+\sin x+\cos x\right)=-2e^{-x}\cos x.$$

Підставимо y, y', y'' у функцію w:

$$w=-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)+2e^{-x}\sin x=-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\cos x-$$

$$-2e^{-x}\sin x+2e^{-x}\sin x=0.$$

8.4 Дотична й нормаль до кривої

Рівняння дотичної до лінії $y=f\left(x\right)$в точці $M_0\left(x_0,y_0\right)$має вигляд

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

а *рівняння нормалі –*

$$y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).$$

Приклад 8.6. Скласти рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y=x^2+2$ в точці $x_0=1$.

Розв'язання

Якщо $x_0=1$, то $y_0=y\left(1\right)=1^2+2=3$, а $f'\left(x\right)=2x$ і $f'\left(x_0\right)=f'\left(1\right)=2$.

Рівняння дотичної набуває вигляду

$$y-3=2(x-1),$$

або

$$2x-y+1=0,$$

а рівняння нормалі –

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-1),$$

або

$$x+2y-7=0.$$

8.5 Дослідження функції за допомогою похідної

Теорема (Ознака монотонності функції). Якщо неперервна на інтервалі (a,b) і диференційовна всередині нього функція $y=f(x)$ має додатну (від'ємну) похідну для будь-якого $x\in(a,b)$, то функція зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Інтервали зростання й спадання називаються *інтервалами монотонності* функції.

Значення $f(x_0)$ називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції, $f(x)$ якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0-\delta)$ та $x\neq x_0$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$).

Точки максимуму та мінімуму функції називаються *точками екстремуму*.

Теорема (Необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $y=f(x)$ має у точці x_0 екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, де $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує, називаються *критичними.*

Теорема (Достатня умова існування екстремуму). Нехай x_0 критична точка функції $y=f(x)$; якщо при переході через цю точку зліва на право похідна $f'(x)$ змінює позначку від плюсу до мінусу (від мінусу до плюсу), то функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум (мінімум).

Теорема (Достатня умова існування екстремуму). Якщо $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, а саме максимум, якщо $f''(x_0)<0$ і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Найбільше значення функції $f(x)$ на множені X називається *глобальним максимумом (або найбільшим значенням)*, а її найменше значення є *глобальним мінімумом*.

Щоб знайти глобальні екстремуми функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$, на якому вона не перервна, потрібно: знайти критичні точки, які належать інтервалу $(a;\ b)$, й обчислити значення функції в цих точках; обчислити значення функцій у граничних точках відрізку, тобто $f(a)$ і $f(b)$ і з усіх отриманих значень, вибрати найменше та найбільше.

Теорема (Достатня ознака опуклості). Якщо функція $y=f(x)$ у кожній точці інтервалу (a,b) має $f''(x)\leq 0$ ($f''(x)\geq 0$), то графік функції є опуклим вгору (вниз) на інтервалі (a,b).

Якщо в точці $M(x_0, f(x_0))$ графіка функції $y=f(x)$ змінюється характер опуклості, то точка *M* називається точкою *перегину*.

Теорема (Необхідна ознака існування точки перегину). Якщо $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегину графіка функції $f(x)$, то в точці $x=x_0$ друга похідна дорівнює нулю або не існує.

Теорема (Достатня умова існування точки перегину). Нехай функція $y=f(x)$ має другу похідну в околі точки x_0 і нехай у самій точці $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує. Тоді, якщо у вказаному околі $f''(x)$ має різні знаки праворуч і ліворуч від точки x_0, графік функції має перегин у точці $M(x_0, f(x_0))$.

Приклад 8.7. Знайти інтервали монотонності й точки екстремуму функції

$$y=10+16x-\frac{1}{3}x^3.$$

Розв'язання

Функція визначена на всій числовій прямій. Обчислимо похідну $y'=16-x^2$ і визначимо критичні точки: $y=0$, якщо $16-x^2=0$, $x_1=-4$ і $x_2=4$. Дослідимо знак похідної на отриманих інтервалах (рис. 8.1).

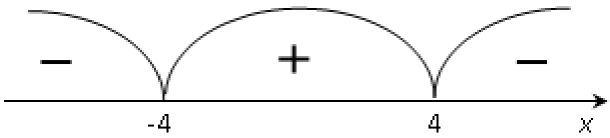

Рисунок 8.1

Отже, за ознакою монотонності, функція $f(x)$ спадає при $x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ і зростає при $x \in (-4, 4)$.

У точці $x_1 = -4$ функція досягає мінімуму, а в точці $x_2 = 4$ максимуму, при цьому

$$y_{\min} = y(-4) = 10 + 16 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3} = -\frac{98}{3};$$

$$y_{\max} = y(4) = 10 + 16 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} = \frac{158}{3}.$$

Приклад 8.8. Знайти інтервали опуклості і точки перегину $y = x^3 - 6x^2 + x$.

Розв'язання

Функція визначена на всій числовій прямій. Знаходимо першу $y' = 3x^2 - 12x + 1$ і другу похідні. Умова $y'' = 0$ виконується, якщо $x = 2$. Досліджуємо знаки другої похідної праворуч і ліворуч від знайденої точки (рис. 8.2).

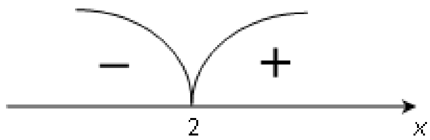

Рисунок 8.2

Отже, графік функції є опуклим вгору при $x \in (-\infty, 2)$ й опуклим вниз при $x \in (2, +\infty)$, $x = 2$ – точка перегину графіка.

8.6 Розв'язання прикладних задач за допомогою похідної

Загальний план розв’язання прикладних задач має такий вигляд:

1) скласти математичну модель (залежність, яка, взагалі кажучи, може бути функцією двох змінних $z = z(x,\ y)$);

2) використовуючи умову задачі, встановити зв'язок між змінними x і y;

3) використовуючи рівняння зв'язку, отримати функцію однієї змінної $z = z(x)$;

4) знайти природну область визначення функції $z = z(x)$;

5) до функції $z = z(x)$ застосувати теорію екстремумів.

У прикладних задачах найчастіше зустрічається випадок, коли на проміжку який розглядається (відрізок, напівінтервал, інтервал) знаходиться лише одна критична точка x_0. Якщо в цій точці неперервна функція має локальний максимум (мінімум), то він є її найбільшим (найменшим) значенням.

Розглянемо різні типи прикладних задач.

Геометричні задачі

Приклад 8.9. На параболі $y = x^2 - 6x + 11$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $y = -x$ (рис. 8.3). Знайти цю відстань.

Розв'язання

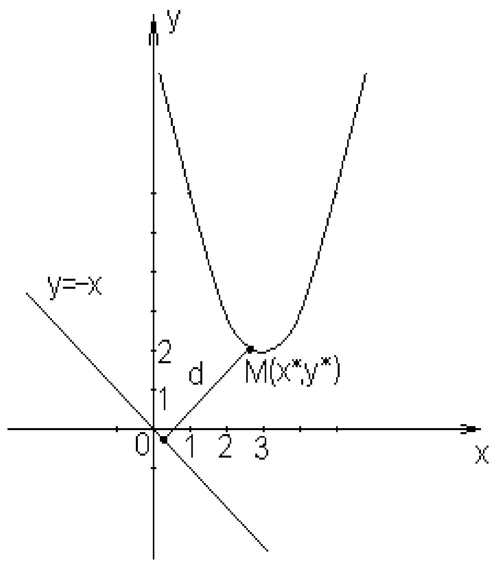

Рисунок 8.3

Нехай М$\left(x^*, y^*\right)$ – це точка, яка задовольняє даній умові. Оскільки *M* належить параболі, то її координати задовільнять рівнянню параболи: $y^* = \left(x^*\right)^2 - 6x^* + 11$, $\left(x^*;\ \left(x^*\right)^2 - 6x^* + 11\right)$.

Відстань від точки до прямої визначається за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Запишемо рівняння прямої $y = -x$ у загальній формі: $x + y = 0$. Звідси отримуємо: $A = 1,\ B = 1,\ C = 0$. Підставивши замість $x_0,\ y_0$ у формулу координати точки *M*, отримаємо:

$$d = \frac{\left|1 \cdot x^* + 1 \cdot \left(\left(x^*\right)^2 - 6x^* + 11\right) + 0\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|\left(x^*\right)^2 - 5x^* + 11\right|}{\sqrt{2}}.$$

При розв’язанні рівняння $\left(x^*\right)^2 - 5x^* + 11 = 0$, знаходимо: $D = 25 - 44 < 0$, тобто вираз $\left(x^*\right)^2 - 5x^* + 11$ для всіх x^* має один знак, а саме $\left(x^*\right)^2 - 5x^* + 11 > 0$. Таким чином,

$$d = \frac{\left(x^*\right)^2 - 5x^* + 11}{\sqrt{2}}.$$

Область визначення цієї функції $x^* \in R$. Потрібно знайти найменше значення функції $d\left(x^*\right)$, для цього обчислюємо її похідну:

$$d'\left(x^*\right) = \frac{2x^* - 5}{\sqrt{2}}.$$

Похідна $d'\left(x^*\right)$ дорівнює нулю, коли $2x^* - 5 = 0$ тобто $x^* = 2.5$.

Оскільки $d''\left(x^*\right) = 2$, $d''\left(x^*\right) > 0$, то при $x^* = 2.5$ функція $d\left(x^*\right)$ досягає мінімуму, що є найменшим її значенням. Тоді $y^* = 2.5^2 - 6 \cdot 2.5 + 11 = 2.25$ і мінімальна відстань між прямою й параболою:

$$d = \frac{(2.5)^2 - 5 \cdot 2.5 + 11}{\sqrt{2}} \approx 3.36.$$

Приклад 8.10. Через точку $M(1,4)$ треба провести пряму так, щоб сума довжин відрізків, які відсікає пряма на осях координат, була найменшою. Записати рівняння, яке відповідає такій прямій.

Розв'язання

Рівняння прямої у відрізках має вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

де $a\neq 0,\ b\neq 0$, a і b – величина відрізків, які відтинаються прямою на осях координат. Необхідно, щоб сума $S=a+b$ була мінімальною.

Відома точка *M*, що належить прямій (рис. 8.4). Підставимо її координати до рівняння b й знайдемо:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1;\quad \frac{4}{b}=1-\frac{1}{a};\quad \frac{4}{b}=\frac{a-1}{a};\quad b=\frac{4a}{a-1}.$$

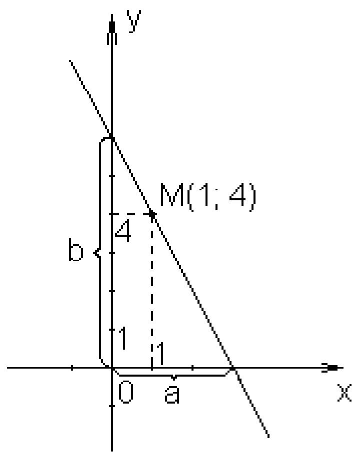

Рисунок 8.4

Підставимо значення b до суми S, отримуємо функцію однієї змінної:

$$S(a)=a+\frac{4a}{a-1}=a+\frac{(4a-4)+4}{a-1}=a+4+\frac{4}{a-1}.$$

Область визначення даної функції становить $a\in(1\ ;\ \infty)$. Дослідимо функцію $S(a)$ на екстремум.

$$S^{'}(a)=1-\frac{4}{(a-1)^2}.$$

Якщо $S' = 0$, тоді

$$\frac{4}{(a-1)^2} = 1,\ (a-1)^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -1;\ a_2 = 3.$$

Розв'язання

$a_2 = 3$ задовольняє області визначення функції. Обчислимо

$$S''(a) = \frac{8}{(a-1)^3};\ S''(3) = \frac{8}{(3-1)^3} = 1.$$

Звідси випливає, що $a_2 = 3$ – це точка мінімуму, яка в цьому випадку є найменшим значенням функції;

$$b = \frac{4 \cdot 3}{3-1} = 6,$$

і рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1,$$
$$2x + y = 6.$$

Приклад 8.11. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектору. Яким повинен бути радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?

Розв'язання

Введемо такі позначення: R – це радіус, α – це центральний кут кругового сектора (рис. 8.5). Тоді площа клумби обчислюється за формулою:

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

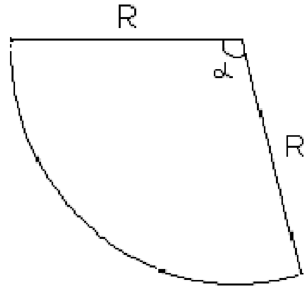

Рисунок 8.5

Периметр клумби $P = 2R + L$, де L – довжина дуги сектора. Ураховуючи, що $L = R\alpha$, отримаємо:

$$P = 2R + R\alpha = R(2+\alpha).$$

Периметр клумби повинен збігатися з довжиною дроту, тобто

$$R(2+\alpha) = l \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} - 2.$$

Підставимо вираз для α у формулу площі:

$$S = S(R) = \left(\frac{l}{R} - 2\right)\frac{R^2}{2} = \frac{lR}{2} - R^2.$$

Отримаємо функцію однієї змінної $S(R)$; знайдемо її область визначення: $R \in \left(0;\ \frac{l}{2}\right)$. Окрім цього, потрібно, щоб ця умова $S(R) > 0$ виконувалася на всій області визначення функції.

Знайдемо похідну функцію $S(R)$

$$S'(R) = \frac{l}{2} - 2R.$$

$S'(R) = 0$ при $R = \frac{l}{4}$, а оскільки $S''(R) = -2 < 0$, то у точці $R = \frac{l}{4}$ маємо, максимум, який є найбільшим значенням функції. Таким чином, площа клумби буде найбільшою, якщо радіус дорівнює $\frac{l}{4}$ м.

Задачі на рух

1. *Середня швидкість і швидкість у заданий момент часу.* Нехай закон прямолінійного руху матеріальної точки має вигляд $s = s(t)$, де t – час. Середня швидкість точки за проміжок часу від t_1 до t_2 обчислюється за формулою

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Швидкість у заданий момент часу (або миттєва швидкість) згідно з фізичним змістом похідної

$$v_{мгн}(t)=v(t)=s'(t).$$

2. *Шлях, пройдений точкою.* Нехай заданий закон прямолінійного руху матеріальної точки $s=s(t)$, t – час. Щоб обчислити шлях, пройдений точкою до повної зупинки, знайдемо момент часу, у який швидкість точки $v(t)=0$. Згідно з п. 1

$$v(t)=s'(t).$$

Розв’язуючи рівняння $s'(t)=0$, знаходимо момент зупинки точки t^*. Тоді $s(t^*)$ – шлях, пройдений точкою до зупинки.

3. *Прискорення.* Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v=v(t)$. Тоді прискорення точки в заданий момент часу обчислюється за формулою

$$a(t)=v'(t).$$

Якщо закон руху точки заданий у вигляді $s=s(t)$, то

$$a(t)=s''(t).$$

4. *Обертальний рух.* Нехай заданий закон обертання матеріальної точки $\alpha=\alpha(t)$. Тоді кутова швидкість точки дорівнює

$$\omega(t)=\alpha'(t)$$

а кутове прискорення

$$a(t)=\alpha''(t).$$

Приклад 8.12. Нехай матеріальна точка рухається за законом $s(t)=-t^3+6t^2+37t+30$. Знайти найбільшу швидкість точки і момент часу, в який швидкість найбільша.

Розв’язання

Знайдемо область допустимих значень для аргументу t. Оскільки має виконуватися нерівність $s(t)\geq 0$, то маємо

$$-t^3+6t^2+37t+30\geq 0,$$

$$-(t+1)(t+3)(t-10)\geq 0.$$

Розв'язуючи нерівність методом інтервалів, знайдемо $t\in(-\infty;-1]\cup[-3;10]$. Ураховуючи, що $t\geq 0$, остаточно отримаємо $t\in[0;10]$.

Знайдемо швидкість точки, використовуючи п. 1

$$v(t)=\left(-t^3+6t^2+37t+30\right)'=-3t^2+12t+37.$$

Досліджуємо отриману функцію на найбільше значення на відрізку $t\in[0;10]$. Знайдемо критичні точки

$$v'(t)=\left(-3t^2+12t+37\right)'=-6t+12,$$

$$-6t+12=0,$$

$$t=2.$$

Обчислимо значення досліджуваної функції в критичній точці і на кінцях відрізка $[0;10]$

$$v(2)=-3\cdot 2^2+12\cdot 2+37=49,$$

$$v(0)=-3\cdot 0^2+12\cdot 0+37=37,$$

$$v(10)=-3\cdot 10^2+12\cdot 10+37=-143.$$

Отже, максимальне значення швидкості $v(2)=49$.

Приклад 8.13. Нехай закон прямолінійного руху матеріальної точки має вигляд $s(t)=3t^2+5t+1$. Обчислити середню швидкість за перші 5 секунд руху й швидкість точки в момент часу $t=2$ с.

Розв'язання

Використовуючи п. 1, обчислимо середню швидкість при $t\in[0;5]$

$$v_{cp}=\frac{s(5)-s(0)}{5-0}=\frac{3\cdot 5^2+5\cdot 5+1-\left(3\cdot 0^2+5\cdot 0+1\right)}{5}=\frac{100}{5}=20$$

і миттєву швидкість в момент часу $t=2$ с.

$$v(t)=\left(3t^2+5t+1\right)'=6t+5,$$

$$v(2)=6\cdot 2+5.$$

Приклад 8.14. Знайти шлях, пройдений точкою до повної зупинки, якщо закон прямолінійного руху має вигляд $s(t)=te^{-t}$.

Розв’язання

Обчислимо швидкість точки

$$v(t)=\left(te^{-t}\right)'=e^{-t}-te^{-t}=e^{-t}(1-t).$$

Знайдемо момент часу, в який точка зупиниться ($v(t)=0$)

$$e^{-t}(1-t)=0,$$

$$t=1.$$

Обчислимо шлях, пройдений точкою за 1 с

$$s(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.37.$$

Екстремальні фізичні задачі

При розв’язанні екстремальних фізичних задач (задач на найбільше й найменше значення функції на заданому відрізку) використовують рекомендації, наведені на початку розділу.

Приклад 8.15. Тіло масою $m_0=1500$ *кг* падає з висоти $h=4500$ *м* і втрачає масу (згорає) пропорційно часу падіння. Коефіцієнт пропорційності $k=50\ ^{кг}\!/_{с}$. Вважаючи, що початкова швидкість $v_0=0$, прискорення $g=10\ ^{м}\!/_{с^2}$, і нехтуючи опором повітря, знайти найбільшу кінетичну енергію тіла.

Розв’язання

Кінетична енергія тіла обчислюється за формулою $E_k=\dfrac{mv^2}{2}$. Маса тіла в заданий момент часу $m=m_0-kt=1500-50t$, а швидкість $v=v_0+gt=10t$. Тоді

$$E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{(1500-50t)(10t)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(15\cdot 10^4t^2-5\cdot 10^3t^3\right).$$

Щоб знайти область допустимих значень для аргументу t, знайдемо час падіння тіла з висоти h. Маємо

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}.$$

Звідки, враховуючи, що $t \geq 0$, знаходимо

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500}{10}} = 30.$$

Крім того, $E_k \geq 0$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(15 \cdot 10^4 t^2 - 5 \cdot 10^3 t^3\right) \geq 0,$$

Розв'язуючи цю нерівність

$$\frac{1}{2} t^2 \left(15 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3 t\right) \geq 0,$$

знаходимо $0 \leq t \leq 30$. Значить, область допустимих значень аргументу $t \in [0;30]$.

Досліджуємо отриману функцію $E_k = E_k(t)$ на найбільше значення на відрізку $t \in [0;30]$. Знайдемо похідну

$$E_k' = \frac{1}{2}\left(30 \cdot 10^4 t - 15 \cdot 10^3 t^2\right).$$

Критичні точки

$$t\left(30 \cdot 10^4 - 15 \cdot 10^3 t\right) = 0,$$

$$t = 0, \quad t = \frac{30 \cdot 10^4}{15 \cdot 10^3} = \frac{300}{15} = 20.$$

Критичні точки належать відрізку $[0;30]$. Обчислимо значення функції E_k в критичних точках і на кінцях відрізку

$$E_k(0) = 0,$$

$$E_k(20) = \frac{1}{2}\left(15 \cdot 10^4 \cdot 20^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot 20^3\right) = 10^7,$$

$$E_k(30)=0.$$

Отже, найбільше значення кінетичної енергії $E_{k\ \max}=E_k(20)=10^7$ *Дж*.

Задачі з алгебри

Приклад 8.16. Сума двох додатних чисел дорівнює 10. Знайти найбільший добуток таких чисел.

Розв'язання

Позначимо числа a і b. Тоді $П=a\cdot b$. За умовою завдання $a+b=10$, тоді $b=10-a$. Маємо

$$П=a(10-a)=10a-a^2.$$

Виходячи з умови задачі, область допустимих значень аргументу a – це інтервал $(0;10)$. Досліджуємо функцію $П=П(a)$ на найбільше значення при $a\in(0;10)$. Обчислимо похідну

$$П'=\left(10a-a^2\right)'=10-2a.$$

Знайдемо критичні точки

$$10-2a=0,$$

$$a=5.$$

Критична точка належить інтервалу $(0;10)$. Обчислимо значення похідної $П'(a)$ ліворуч і праворуч від критичної точки

$$П'(4)=10-2\cdot4=2>0,$$
$$П'(6)=10-2\cdot6=-2<0.$$

При переході через критичну точку знак похідної змінюється з «+» на «–», тобто, у точці $a=5$ функція досягає максимуму. Оскільки на інтервалі $(0;10)$ це єдина критична точка, то найбільшого значення добуток $П(a)$ досягає при $a=5$. Тоді $b=10-5=5$.

Приклад 8.17. Число 54 представлено у вигляді суми трьох додатних чисел. Перший доданок у два рази більше другого. Знайти ці числа, знаючи, що їхній добуток найбільший.

Розв'язання

Позначимо другий доданок a, тоді перший доданок дорівнює $2a$, а третій дорівнює $54-a-2a=54-3a$. Складемо добуток

$$\Pi = 2a\cdot a\cdot(54-3a)=108a^2-6a^3.$$

Знайдемо область допустимих значень аргументу a. За умовою числа додатні, тоді

$$\begin{cases} a>0 \\ 2a>0 \\ 54-3a>0. \end{cases}$$

Звідки випливає $a\in(0;18)$. Досліджуємо функцію $\Pi=\Pi(a)$ на найбільше значення на отриманому інтервалі. Знаходимо похідну

$$\Pi' = \left(108a^2-6a^3\right)' = 216a-18a^2.$$

Критичні точки

$$a(216-18a)=0,$$
$$a=0,\quad a=12.$$

Критична точка $a=12$ належить інтервалу $(0;18)$. Обчислимо значення похідної $\Pi'(a)$ ліворуч і праворуч від критичної точки

$$\Pi'(10)=216\cdot10-18\cdot10^2=360>0,$$

$$\Pi'(13)=216\cdot13-18\cdot13^2=-234<0.$$

При переході через критичну точку знак похідної змінюється з «+» на «–», значить, у точці $a=12$ функція досягає максимуму. Оскільки на інтервалі $(0;18)$ це єдина критична точка, то найбільшого значення добуток $\Pi(a)$ досягає при $a=12$. Значить, добуток буде найбільшим, якщо числа дорівнюють 24, 12 і 18.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 8.1. Знайти похідні:

а) $y=(x-2)e^x$.

б) $y=x/(9-x^2)$.

в) $y = e^{4x - x^2}$.

Завдання 8.2. Обчислити найбільше й найменше значення на відрізку

а) $y = (x^5 - 8)/x^4$, [–3; –1].

б) $y = x^2 - 2x + 2/(x-1)$, [–1; 3].

9 ФУНКЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

9.1 Основні означення

Величина z називається функцією двох змінних *x* та *y*, якщо кожній парі чисел (x, y) із деякої множини за визначеним законом ставиться у відповідність одне значення величини z і позначається $z = f(x,y)$.

Прикладами функції двох змінних є рівняння площини $ax+by+cz+d=0,$ рівняння поверхні $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

Промислова функція Коба-Дугласа, яка вказує залежність об'єму виробленої продукції від затрат капіталу й трудових ресурсів має вигляд:

$$Q = A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha},$$

де Q – об'єм виробленої продукції; K – витрати капіталів; L – чисельність персоналу; A = const – коефіцієнт продуктивності праці ($A > 0$); α – коефіцієнт, який вказує долю капіталу в прибутку $0 < \alpha < 1$.

Множина пар чисел *(x, y)*, для яких функція *z* визначена, називається *областю визначення функції*.

Приклад 9.1. Знайти область визначення функції $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

Розв'язання

Зовнішній бік кола з центром у початку координат і радіусом *r*.

Приклад 9.2. Знайти область визначення функції

$$u=\sqrt{25-(x+1)^2-(y-2)^2-z^2}\,. \qquad (9.1)$$

Розв'язання

Задана функція *u* залежить від трьох змінних *x*, *y*, *z*. Вона приймає певні дійсні значення лише за умови

$$25-(x+1)^2-(y-2)^2-z^2 \ge 0,$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2 \le 25.$$

Рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2=R^2$ є рівнянням сфери з центром у точці *O* (a; b; c) і радіусом *R*.

Отже, одержана нерівність означає, що областю визначення функції u буде куля радіусом 5 із центром у точці $O(-1;2;0)$. Нерівність нестрога, тому функція u визначена на сфері – межі цієї кулі. Отже, задана функція u визначена у замкненій області

$$D=\{\,(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\le 25\,\}.$$

Згідно з основними поняттями аналітичної геометрії, функція двох змінних $z = f(x, y)$ в тривимірному просторі зображується деякою поверхнею. Кожна точка цієї поверхні M′ має координати (x, y, z). Областю визначення функції $z = f(x, y)$ буде деяка область D площини xOy. Коли точка $M(x, y)$ пробігає область D, тоді точка $M^{/}(x, y, z)$ пробігає поверхню S, рівняння якої $z = f(x, y)$.

Отже, функцію двох змінних x, y можна задати як функцію змінної точки M, що змінюється в області D, тобто $z = f(M)$.

Аналогічно можна розглядати і функцію n аргументів, як функцію точки M, що змінюється в області D $n-$вимірного простору E_n, тобто $W = f(M)$ або $z = f(M)$, де $z \in D \in E_n$.

Функцію однієї змінної можна задавати аналітично, таблично, графічно, мовно і за допомогою комп'ютерної програми. Функцію двох змінних $z = f(x, y)$, крім цих способів, можна задавати ще й геометрично, тобто за допомогою ліній рівня.

У табличному способі задання функції $z = f(x, y)$ використовують таблицю з двома входами такого вигляду (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

	У y_1	у y_2	у y_3	...	у y_4
x_1					
$\vdots$					
x_n					

У кожній клітині вказують значення z для відповідної пари (x, y).

Розглянемо геометричний спосіб задання функції. Нехай графіком функції $z = f(x, y)$ буде поверхня. Неважко бачити, що різні точки цієї поверхні знаходяться на різній відстані від площини xOy.

Якщо придати z постійні значення $h_1, h_2, ...,$ то одержимо в площині аргументів лінії $f(x, y) = h_1$, $f(x, y) = h_2, \ldots$, які називаються лініями рівня функції $f(x, y)$.

Означення 9.1. Криві лінії L, що лежать у площині xOy і мають рівняння $f(x, y) = C$ (C – стала) називаються *лініями рівня функції* $z = f(x, y)$.

Іншими словами: лінії рівня – це множина усіх точок площини xOy, для яких функція $z = f(x, y)$ набуває одного значення.

Приклад 9.3. Визначити лінії рівня функції

$$z = (x-2)^2 + (y+3)^2.$$

Розв’язання

Згідно з означенням ліній рівня має вигляд $(x-2)^2+(y+3)^2=C.$ Якщо надати C різні числові значення, то одержимо сукупність кіл з центром в точці $O(2;\,-3)$ з відповідними радіусами.

Лінії рівня широко використовуються в топографії, фізиці, географії.

9.2 Границя та неперервність функції двох змінних

Означення 9.2. *Околом радіуса r точки* $M_0(x_{10},x_{20},...x_{n0})$ називається сукупність усіх точок $M\ (x_1,x_2,...x_n)$ простору E_n, відстань яких до точки M_0 менше або дорівнює r, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+...+(x_n-x_{n0})^2}\le r. \qquad (9.2)$$

Означення 9.3. Число A називається *границею функції* $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ або $z=f(M)$ у точці M_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться число r таке, що для усіх точок M з околу радіуса точки M_0 відмінних від точки M_0, виконується нерівність

$$|\,f(x_1,x_2,...,x_n)-A\,|<\varepsilon, \text{ або } \left|f(M)-A\right|<\varepsilon.$$

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{10}\\ \dots\dots\\ x_n\to x_{n0}}} f(x_1,x_2,...,x_n)=A \text{ або } \lim_{M\to M_0} f(M)=A\ .$$

Приклад 9.4. Обчислити границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Розв’язання

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2+1}+1=2\cdot$$

Означення 9.4. Функція $y = f(x, y, z)$ називається *неперервною в точці* (x_0, y_0), якщо для будь-якого ε>0 існує δ>0 для будь-якої (x, y), які задовольняють умову $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ виконується умова

$$\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon |.$$

Означення 9.5. Функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки M_0, крім, може, самої точки M_0, і яка не є неперервною в цій точці, називається *розривною* в цій точці.

Якщо $f(x, y)$ *неперервна* в замкнутій обмеженій області, тоді вона рівномірно неперервна в цій області, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для точок (x_1, y_1), (x_2, y_2) із цієї області, які розташовані на відстані менше за δ, виконується умова

$$\left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| < \varepsilon .$$

Приклад 9.5. Знайти область визначення функції

$$z = f(x, y) : z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x - y}.$$

Розв’язання

Функція визначена в усіх точках площини, крім точок прямої $y = x$.

Властивості неперервних функцій

1. Сума та добуток неперервних функцій двох змінних є функцією неперервною.

2. $f(x, y)$ = $\dfrac{g(x, y)}{\phi(x, y)}$ є функція неперервна, якщо функції g і ϕ – неперервні.

3. Складна функція, яка складена із неперервних функцій є функцією неперервною.

Властивості неперервних функцій в замкнутій обмеженій області

1. Функція $f(x, y)$ є неперервною в замкнутій обмеженій області, якщо існує число k таке, що значення функції за модулем менше або дорівнює k.

2. Функція $f(x, y)$ є неперервною в замкнутій обмеженій області, якщо вона приймає найбільше і найменше значення; тобто існують числа m і M такі, що $m \le f(x, y) \le M$.

3. Функція $f(x, y)$ є неперервною в замкнутій обмеженій області (обмежена), якщо вона між будь-якими двома своїми значеннями приймає всі значення проміжку. Тобто $A < f(x, y) < B$, де A і B – значення функції $f(x, y)$.

Наслідок. Якщо (x_1, y_1) ,(x_2, y_2) – точки даної області, причому $f(x_1, y_1)<0$, а $f(x_2, y_2)>0$, тоді існує точка $M_0(x_0, y_0)$ така, що $f(x_0, y_0)=0$.

Задачі, які приводять до поняття частинних похідних. Економічний і геометричний сенс частинних похідних

Функція $z=f(x,y)$ виражає залежність між об'ємом виробництва від деяких економічних факторів, які впливають на виробництво *X*, *Y*. Ємність цих факторів складає *X* од., *Y* од.

Припустимо, що один із факторів змінюється, а другий у цей час залишається постійним. Запишемо зріст продукції $f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$. Тоді приріст випуску цієї продукції відносно приросту зміни фактора *X* складатиме $\dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$. Якщо зміна фактора *X* невелика, тобто $\Delta x \to 0$, то можна перейти до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x.$$

Аналогічно можна записати у випадку *Y*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta x)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y.$$

Означення 9.6. *Частинною похідною функції* $z=f(x,y)$ *за змінною x* називається функція двох змінних, яку ми знаходимо при диференціюванні функції $f(x,y)$ за змінною *x*, припустивши, що $y = const$.

Аналогічно знаходимо й частинну похідну за змінною *y*.

Приклад 9.5. Знайти z'_x, z'_y функції $z=3axy-x^2+y^3$.

Розв'язання

$$z'_x = 3ay-2x; \quad z'_y = 3ax+3y^2.$$

Приклад 9.6. Об'єм продажу нового продукту *x* залежить від часу *t* і витрат *A* підприємства на рекламу. Якщо *t* вимірювати тижнями, а *A* в грн, тоді ця залежність має вигляд

$$x=200(5-e^{-0,002A})(1-e^{-t}).$$

Знайти x'_t і x'_A і вказати економічний зміст цих похідних при $t=1$, $A=400$.

Розв’язання

Знаходимо частинні похідні:

$$x'_t = 200(5 - e^{-0,002A})e^{-t},$$

$$x'_A = 0,4e^{-0,002A}(1 - e^{-t}).$$

При $t = 1$, $A = 400$ отримаємо

$$x'_t = 200(5 - e^{-0,8})e^{-1} \approx 335,$$

$$x'_A = 0,4e^{-0,8}(1 - e^{-1}) \approx 0,11.$$

Частинна похідна x'_t характеризує швидкість зміни об’єму продажу нового продукту за тиждень, коли витрати на рекламу не змінюються.

Частинна похідна x'_A характеризує швидкість зміни об’єму продажу нового продукту при зміні суми витрат на рекламу й постійному *t*.

За один тиждень при витратах на рекламу 400 грн. швидкість зростання об’єму продажу буде 0,11.

Геометричний сенс частинної похідної

Частинна похідна – кутовий коефіцієнт відносно осі *Ox* дотичної прямої, яка проведена в точці M_0 до площини перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$, тобто $z'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$.

$z'_y(x_0, y_0)$ – кутовий коефіцієнт дотичної прямої, яка проведена в точці M_0 до площини перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$, тобто $z'_y(x_0, y_0) = tg\beta$.

9.2 Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ називаються *частинними похідними першого порядку.* Їх можна розглядати, як функції від $(x, y) \in D$. Ці функції можуть мати частинні похідні, які називаються *частинними похідними другого порядку*. Вони обчислюються таким чином

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^x} = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy};\qquad (9.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$$

Аналогічно визначаються частинні похідні більш високого порядку.

Приклад 9.7. Знайти частинні похідні функції:

$$z=x^4-2x^xy^3+y^5+1.$$

Розв'язання

$$z'_x=4x^3-4xy^3;\qquad z''_{xx}=12x^2-4y^3;$$

$$z'_y=-6y^2x^2+5y^4;\quad z''_{yy}=12yx^2+20y^5.$$

$$z''_{xy}=-12xy^2.$$

Теорема (Шварца). Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, відмінні лише порядком диференціювання і рівні між собою.

Диференційованість і повний диференціал функції

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки М. Запишемо повний приріст функції в точці М.

$$\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x,y).$$

Функція $z=f(x,y)$ називається диференційованою в точці М, якщо її повний приріст в цій точці можна записати у вигляді:

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y,$$

де $\alpha=\alpha(\Delta x;\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\beta=\beta(\Delta x;\Delta y)\to 0$ при $\Delta y\to 0$.

Сума перших доданків рівності являє собою головну частину приросту функції. Головна частина приросту функції називається *повним диференціалом цієї функції і позначається* dz:

$$dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y.$$

Вирази $A\cdot\Delta x$ і $B\cdot\Delta y$ називаються *диференціалами.* Для незалежних змінних x і y $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$:

$$dz = A\cdot dx + B\cdot dy. \qquad (9.5)$$

Теорема (необхідна умова диференційованості функції). Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційована в точці *M*, то вона неперервна в цій точці і має в ній частинні похідні z'_x і z'_y, причому z'_x = A, z'_y = B.

Доведення

Оскільки функція диференційована в точці *M*, то має місце рівність $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0$. Це означає, що функція неперервна в точці *M*. Поставивши $\Delta y = 0, \Delta x \neq 0$ в даній рівності отримаємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, тобто $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким чином, в точці *M* існує частинна похідна $f'_x(x,y) = A$. Аналогічно доводиться, що $f'_y(x,y) = B$.

Теорема (достатня умова диференційованості функції). Якщо функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні z'_x і z'_y в точці *M*, то вона диференційована в цій точці й її повний диференціал виражається формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (9.6)$$

9.3 Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях

Із означення диференціала функції $z = f(x,y)$ слідує, що при достатньо малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ має місце наближена рівність

$$\Delta z \approx dz.$$

Оскільки $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x,y)$, то цю рівність можна записати:

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y \qquad (9.7)$$

Цю формулу використовують в наближених обчисленнях.

Відносна похибка визначається співвідношенням

$$\delta = |\Delta z - dz|.$$

Абсолютна похибка визначається співвідношенням

$$\beta = \left|\frac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right|.$$

Приклад 9.8. Обчислити $1{,}02^{3{,}01}$.

Розв'язання

Розглянемо функцію $z = x^y$, тоді $1{,}02^{3{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, $x=1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y=3, \Delta y = 0{,}01$.

$$z'_x = y\cdot x^{y-1},\ z'_y = x^y\cdot \ln x.$$

$$1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}02 + 1^3\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 \approx 1{,}06.$$

9.4 Дотична площина й нормаль до поверхні

Візьмемо на неперервній кривій *L* дві точки *M* і M_1.

Пряму MM_1, яка проходить через ці точки, називають *січною*. Нехай точка M_1рухаючись вздовж кривої *L*, необмежено наближається до точки *M*. Тоді січна, повертаючись навколо точки *M*, прямує до деякого граничного положення MT.

Дотичною прямою до поверхні у деякій її точці називається дотична до деякої кривої, яка розміщена на цій поверхні і проходить через цю точку.

Площина, яка містить усі дотичні до кривих, що розміщені на поверхні й проходять через цю точку, називається *дотичною площиною.*

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$ й у точці $M(x_0,y_0,z_0)$ частинні похідні $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ кінцеві й не перетворюються на нуль одночасно, то *рівняння дотичної площини до поверхні в точці М* має вигляд

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0) = 0. \qquad (9.8)$$

Якщо рівняння поверхні задано явно $z = f(x,y)$, де частинні похідні $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$ і $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ у точці $M(x_0,y_0,z_0)$ кінцеві (і можуть бути рівними нулю одночасно), то *рівняння дотичної площини в точці М* записується у вигляді:

$$(z-z_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-y_0). \qquad (9.9)$$

Нормаллю до поверхні в точці M називається пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно дотичній площині в цій точці

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M},$$

або

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z-z_0}{-1}. \qquad (9.10)$$

Приклад 9.9. Задана поверхня $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Скласти рівняння дотичної площини й рівняння нормалі до поверхні в точці $M(1;1;1)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2-2-1=-1, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2+2+2=2,$$

$$z-1=-1(x-1)+2(y-1),$$

$$z-1=-x+1+2y-2,$$

$$x+2y-z-2+2=0,$$

$$x-2y+z=0$$

– рівняння дотичної,

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

– рівняння нормалі.

9.5 Інваріантна форма запису диференціалу

Використовуючи правило диференціювання складної функції, можна показати, що повний диференціал має властивості інваріантності: повний диференціал функції $z = f(x, y)$ зберігає один і той же вигляд незалежно від того, чи є аргументи незалежними змінними або функціями незалежної змінної.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy. \tag{9.11}$$

9.6 Похідна за напрямком і градієнт функції

Нехай $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$ у напрямку вектора $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, який задає напрямок прямої *L*, яка проходить через точку *M*. Виберемо на прямій *L* точку $M_1(x_1, y_1)$.

Похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ у напрямку вектора $\overline{n} = \overline{M}\overline{M}_1$ називається границя

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \text{ або } \frac{\partial z}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \tag{9.12}$$

де α – кут , утворений вектором $\overline{n}$ і віссю Ox.

У випадку, якщо функція задана трьома змінними $u = f(x; y; z)$ похідна в даному напрямку визначається аналогічно.

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\, \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{9.13}$$

де cosα, cosβ, cosγ – напрямні косинуси вектора $\overline{n}$.

Приклад 9.10. Обчислити похідну функції $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ у точці $M(-1;1)$ за напрямним вектором $\overline{l}$.

Розв’язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 2; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2(-1) + 1 + 2 = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y + 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1 + 2 \cdot 1 + 2 = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\overline{l}\right|}; \quad \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\overline{l}\right|}; \quad \left|\overline{l}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}; \;\; \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = 1\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається вектор з початком в точці *M*, який має своїми координатами частинні похідні z'_x і z'_y, обчислені в точці $M(x, y)$. Градієнт позначається

$$grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} \text{ або } grad\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (9.14)$$

Якщо функція задана $u = f(x; y; z)$ в точці $M(x, y, z)$, то градієнт обчислюється

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}. \qquad (9.15)$$

Градієнт є вектором, який вказує напрямок найбільшого зростання функції $u = f(M)$.

Приклад 9.11. Знайти градієнт функції $u = x^2 + 3xy^2 - z^3y$ у точці $M(-2;3;1)$.

Розв’язання

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2; \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = 2\cdot(-2) + 3\cdot 3^2 = 23$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - z^3; \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = 6\cdot(-2)\cdot 3 - 1^3 = -37;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -3z^2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -3\cdot 1^2\cdot 3;$$

$$grad\, u = (23; -37; -9).$$

$$|grad\, u| = \sqrt{23^2 + (-37)^2 + (-9)^2} = \sqrt{1989} \approx 45.$$

9.7 Похідна складеної функції

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох змінних *x* і *y*, кожна з яких є функцією незалежної змінної *t*: $x = x(t)$, $y = y(t)$. У цьому випадку функція

$z(t) = f(x(t); y(t))$ називається *складеною* функцією однієї незалежної змінної t; змінні x і y – *проміжні* змінні.

Теорема. Якщо $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M \in D$ функція і $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовані функції незалежної змінної t, то похідна складеної функції $z(t) = f(x(t); y(t))$ обчислюємо за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \text{ або } z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t. \tag{9.16}$$

Приклад 9.12. Знайти $\frac{dz}{dx}$, $z = x^2 y$, якщо $y = \cos x$.

Розв’язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \; \frac{dy}{dx} = y'_x = -\sin x;$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dz}{dx} = 2xy + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x.$$

9.8 Диференціювання неявної функції

Неявна функція двох змінних записується рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема (існування неявної функції). Функція $f(x, y, z) = 0$ неперервна разом зі своїми частинними похідними в околі деякої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Якщо $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ і частинні похідні в цій точці не дорівнюють нулеві, то в околі цієї точки (x_0, y_0) рівняння $F(x, y, z) = 0$ має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від (x, y), а функція $\phi(x, y)$ має незалежні неперервні частинні похідні, де $\phi(x_0, y_0) = z_0$. Тоді умова теореми існування неявної функції виконується і рівняння $F(x, y)$ визначає y як деяку функцію.

Наприклад $y = \phi(x)$, тобто, підставивши, будемо мати $F(x, \phi(x)) = 0$. Отже, похідна неявної функції буде обчислюватись за формулою

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} \text{ або } y' = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{9.17}$$

9.10 Приклади застосування характеристик функції двох змінних до аналізу бізнесу

Маргінальна продуктивність виробництва

У бізнесі *маргінальною продуктивністю виробництва* називаємо гранично можливу продуктивність за умови постійного відтворювання виробництва.

Кількість й якість кінцевого випуску будь-якої продукції фірми залежить від багатьох факторів, які фірма може змінювати. Найбільш важливі фактори – продуктивність праці та вкладений у виробництво капітал.

Позначимо через x кількість одиниць праці, K – суму капіталу, вкладеного фірмою у виробничий план. Величина x може вимірюватись річними робочими годинами або річною вартістю праці у грн.

Позначимо через P кінцевий результат, наприклад, кількість одиниць випущеної фірмою продукції. Тоді $P = f(x,k)$, тобто P можна розглядати як функцію двох змінних. Ця функція називається *продуктивною функцією*.

У деяких випадках x і K залежні. Наприклад, фірма впровадила у виробництво нове обладнання (змінна K зросла на величину K_1), яке дозволило скоротити кількість праці у 3 рази. У цьому прикладі можна встановити функціональну залежність між x і K. У загальних випадках x і K розглядають як незалежні змінні.

Частинну похідну першого порядку $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ називаємо *граничною продуктивністю праці* при фіксованому K, а $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ називаємо *граничною продуктивністю капіталу* при фіксованій продуктивності праці x.

Прибутки виробництва зростають, якщо $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ зростає при фіксованому K, тобто коли $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} > 0$. $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ характеризує зміну випуску продукції при постійних трудових затратах.

9.11 Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від вартості його одиниці, якості, пакування й інших факторів, наприклад, вартості іншого товару. Так, попит на торт «Київський» залежить не лише від його вартості, але й від вартості тортів інших назв, наприклад, «Барвінок».

Будемо говорити, що товари *A* та *B* взаємозв'язані, якщо попит на товар *A* залежить не тільки від його вартості, але й від вартості товару *B*.

Позначимо P_A та P_B вартість одиниці відповідного товару. Нехай X_A та X_B – кількісний попит на товари *A* та *B*, відповідно. Якщо *A* та *B* взаємозв'язані, тоді X_A та X_B будуть функціями двох змінних, тобто

$$X_A = a(P_A; P_B); \qquad X_B = \phi(P_A; P_B) \tag{9.18}$$

Частинна похідна $\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A}$ має зміст граничного попиту на товар *A* відносно його вартості P_A. Аналогічно $\dfrac{\partial X_B}{\partial P_B}$.

Товари *A* та *B* називаємо *конкурентними*, якщо $\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A} > 0,\ \dfrac{\partial X_B}{\partial P_B} > 0$.

9.12 Найбільше й найменше значення неперервної функції в замкнутій області

Нехай потрібно знайти найбільше (найменше) значення функції $z = f(x, y)$, неперервної в деякій замкнутій обмеженій області $\bar{D}$ за теоремою (якщо функція $f(M)$ неперервна в замкнутій обмеженій області $\bar{D}$), то

1. $f(M)$ обмежена в $\bar{D}$;

2. $f(M)$ приймає в $\bar{D}$ найбільше й найменше значення, у цій області знайдеться точка (x_0, y_0), в якій функція приймає найбільше (найменше) значення. Якщо точка (x_0, y_0) лежить усередині області $\bar{D}$, то в ній функція *f* має максимум (мінімум), так що в цьому випадку точка, яка нас цікавить, міститься серед критичних точок функції $f(x, y)$. Але свого найбільшого (найменшого) значення функція $f(x, y)$ може досягати і на границі області. Тому, щоб знайти найбільше (найменше) значення, яке може приймати функція $z = f(x, y)$ в замкнутій обмеженій області $\bar{D}$, потрібно знайти всі максимуми (мінімуми) функції, які досягаються всередині цієї області, а також найбільше (найменше) значення функції на границі цієї області. Найбільше (найменше) із усіх цих чисел і буде шуканим *найбільшим (найменшим) значенням функції* $z = f(x, y)$ *в області* $\bar{D}$.

Приклад 9.13. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ в області $\bar{D}\,\{-1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1\}$.

Розв'язання

Знаходимо критичні точки функції $z = x^2 + y^2$ всередині області $\bar{D}$. Для цього складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже точка $(0;0)$ – критична точка функції.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, то в цій точці $AC - B^2 = 4 > 0$, $A = 2 > 0$, а це означає, що в точці $(0;0)$ функція $z = x^2 + y^2$ має мінімум і дорівнює нулю.

Знайдемо тепер найбільше і найменше значення функції на границі Γ в області $\bar{D}$. На частині границі $\Gamma_1 = \{x = 1, -1 \le y \le 1\}$ маємо

$z = 1 + y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$, так що $y = 0$ – критична точка і так як $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$, то в цій точці функція $z = 1 + y^2$ має мінімум, який дорівнює одиниці. На кінцях відрізка Γ_1 в точках $(1;-1)$ і $(1;\,1)$ маємо $z\,(1;\,-1) = z(1;\,1) = 2$.

Використовуючи відображення симетрії, ті ж результати отримуємо для інших частин границі $\Gamma_2 = \{y = 1, -1 \le x \le 1\}$, $\Gamma_3 = \{x = -1, -1 \le y \le 1\}$, $\Gamma_4 = \{y = -1, -1 \le x \le 1\}$. Отже, отримаємо, що найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ всередині області $\bar{D}$ дорівнює нулю і досягає у внутрішній точці $O(0;0)$ області, а найбільше значення цієї функції дорівнює 2 і досягає в чотирьох точках границі $M_1(1;-1)$, $M_2(1;1)$, $M_3(-1;1)$, $M_4(-1;-1)$.

Приклад 9.14. Знайти екстремуми функції $z = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x\, e^{-(x^2+y^2)} + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x)(2x^2 + y^2) =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}\,(4x - 2x^3 - 2xy^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\, e^{-(x^2+y^2)} + (2x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) =$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}(2y-2y^3-4x^2y).$$

$$\begin{cases} 2-2x^2-y^2=0, \\ 1-y^2-2x^2=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=2, \\ y^2+2x^2=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ 0\cdot x^2=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

x = 1, y = 1, x = -1, y = -1.

$$M_1(0;0), M_2(0;1)\ ,\ M_3(0;-1), M_4(1;0)\ ,\ M_5(-1;0).$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}(8x^4+4x^2y^2-20x^2-2y^2+4);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}(8yx^3+4xy^3-12xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}(4y^4+8y^2x^2-10y^2-4x^2+2).$$

Для кожної точки обчислюємо значення дискримінанту

1. $M_1(0;0)$, $A_1=4,\quad B_1=0,\quad C_1=2,\quad \Delta_1=8>0,\quad A_1>0,\quad C_1>0,$ отже, у точці $\mathrm{M}_1(0;\,0)$ функція має мінімум, $Z_{\min}=0$.

2. $M_2(0;1)$, $A_2=\dfrac{2}{e},\quad B_2=0,\quad C_2=-\dfrac{2}{e},\quad \Delta_2=-\dfrac{4}{e^2}<0$, отже, екстремуму немає.

3. $M_3(0;-1)$, $A_3=\dfrac{2}{e},\quad B_3=0,\quad C_3=-\dfrac{2}{e},\quad \Delta_3=-\dfrac{4}{e^2}<0$, екстремуму немає.

4. $M_4(1;0)$, $A_4=-\dfrac{8}{e},\quad B_4=0,\quad C_4=-\dfrac{2}{e},\quad \Delta_4=\dfrac{16}{e^2}>0$, екстремум є, $A_4<0,$ функція $Z_{\max}=\dfrac{2}{e}.$

5. $M_5(-1;0).$, $A_5=-\frac{8}{e}$, $B_5=0$, $C_5=-\frac{2}{e}$, $\Delta_5=\frac{16}{e^2}>0$, $Z_{\max}=\frac{2}{e}$.

Приклад 9.15. Знайти найбільше й найменше значення функції $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$ в замкнутій області D: x = 0, y = 1, y = 0, x = 1.

Розв’язання

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = 3-2x-y$$

$$z'_y = 6-x-2y$$

$$\begin{cases} 3-2x-y=0, \\ 6-x-2y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ x+2y=6; \times 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=3, \\ 2x+4y=12; \end{cases} \quad \begin{cases} -3y=-9, \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=3, \\ x=0; \end{cases}$$

$$M_0(0;3)\notin D$$

Знаходимо значення функції на межах ліній:

а) AB: x = $0, 0\le y\le 1$.

$z=6y-y^2$, $z'=6-2y$, $6-2y=0$, $y=0$,

$(0;3)\notin D$, тому $z(0)=0$; $z(1)=5$.

$(0;0)=0$; $(0;1)=5$.

б) BC: y = 1, $0\le x\le 1$

$z=3x+6-x^2-x-1=2x-x^2+5$, $z'=2-2x$, $2-2x=0$, $x=1$, $\in[0;1]$

$z(0)=5$, $z(0;1)=5$; $z(1;1)=6$.

в) CD: x = 1, $0\le y\le 1$,

$z=3+6y-1-y-y^2=2+5y-y^2$, $z'=5-2y$, $5-2y=0$, y = 2,5 $\notin[0;1]$.

$z(0)=2$, $z(1)=6$,

$(1;0)=2$, $(1;1)=6$.

г) AD: $0\le x\le 1$, y = 0.

$z = 3x - x^2,\ \ z' = 3 - 2x,\ \ 3 - 2x = 0,\ \ x = 1{,}5 \notin [0;1]$

$z(0) = 0,\ \ z(1) = 2,$

$(0;0)\ = 0\ (1;0) = 2.$

$Z_{\max} = z(1;1) = 6,$

$Z_{\min} = z(0;0) = 0.$

Отже, остаточно маємо $Z_{\max} = z(1;1) = 6, \quad Z_{\min} = z(0;0) = 0.$

9.13 Екстремум функцій багатьох змінних: умовний, безумовний і локальний екстремуми

9.13.1 Умовний екстремум

Функція $z = f(x, y)$ має *максимум (мінімум)* у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якої точки $M(x; y)$, яка знаходиться в деякому ρ-околі точки $M_0(x_0, y_0)$ виконується умова $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ ($f(x_0; y_0) < f(x; y)$). ρ-окіл можна представити множиною точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють умову $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho$, де ρ – додатне достатньо мале число.

Максимум і мінімум функції називаються екстремумами, а $M_0(x_0, y_0)$ – екстремальною точкою.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо $z = f(x, y)$ – диференційовна функція і досягає в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0. \tag{9.19}$$

Точки, в яких частинні похідні першого порядку перетворюються на нуль (або не існують), називаються *критичними* або *стаціонарними.* Дослідження їх на екстремум проводять за допомогою достатніх умов існування екстремуму функції двох змінних.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Для її дослідження спочатку обчислюють частинні похідні другого порядку в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C, \tag{9.20}$$

а потім дискримінант $\Delta = AC - B^2$.

Тоді достатні умовами екстремуму функції $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ записуються в такому вигляді:

1. .$\Delta > 0$– екстремум є, якщо $A > 0$ (або $C > 0$ при $A = 0$), у точці $M_0(x_0, y_0)$ функція має мінімум, а якщо $A < 0$ (або $C < 0$ при $A = 0$) – максимум.

2. $\Delta < 0$ – екстремуму немає;

3. $\Delta = 0$ – потрібні додаткові дослідження.

Нехай дана функція $z = f(x, y)$ і вона визначена в області *D*. Нехай в цій області задана крива L і потрібно знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$ тільки серед тих її значень, які відповідають точкам кривої *L*. Такі екстремуми називаються умовними екстремумами функції $z = f(x, y)$ на кривій *L*.

Приклад 9.16. Знайти екстремум функції при умові $x + y - 1 = 0$, $z = x^2 + y^2$.

Розв’язання

$$y = 1 - x,\ \ z = x^2 + (1 - x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = .$$

Досліджуємо цю функцію на екстремум

$$z' = 4x - 2, \quad 4x = 2,$$

Отже, $x = \dfrac{1}{2}$ – критична точка.

$$z' = 0,\ z'' = 4 > 0.$$

Так, що $x = \dfrac{1}{2}$, $\left(y = \dfrac{1}{2}\right)$ дає умовний мінімум функції z.

Існує інший спосіб розв’язання задач про умовний екстремум, який називається *методом множників Лагранжа.*

Для знаходження умовного екстремуму досліджується на звичайний екстремум функція Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x, y), .$$

Необхідна умова екстремуму функції Лагранжа має вигляд: $M_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial \phi_i}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \phi_i(x; y) = 0, \end{cases} \tag{9.21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Із цієї системи знаходять невідомі x, y, λ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Числа λ_i називаються *коефіцієнтами Лагранжа.*

Приклад 9.17. Знайти екстремум функції $z = 2x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання

Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Знаходимо частинні похідні і складаємо необхідні умови екстремуму функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda = 0, \quad \Rightarrow \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2y\lambda = 0, \Rightarrow \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2; \\ y=-1; \end{cases} \text{ якщо } \lambda=\frac{1}{2}, \; M_1(-2;1), \; \lambda_1=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} x=2; \\ y=1; \end{cases} \text{ якщо } \lambda=-\frac{1}{2}, \; M_2(2;1), \; \lambda_1=-\frac{1}{2}.$$

У цьому випадку $\phi(x;y)=x^2+y^2=5$.

Для дослідження екстремуму в отриманих критичних точках обчислюємо значення $\frac{\partial\phi}{\partial x}$; $\frac{\partial\phi}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2\text{x}; \; \frac{\partial\phi}{\partial y}=2\text{y}; \; \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda; \; \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0; \; \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda$$

і складаємо визначник

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \phi'_x(M_0\lambda_0) & \phi'_y(M_0\lambda_0) \\ \phi'_x(M_0\lambda_0) & L''_{xx}(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) \\ \phi'_y(M_0\lambda_0) & L''_{xy}(M_0\lambda_0) & L''_{yy}(M_0\lambda_0) \end{vmatrix} \qquad (9.22)$$

Якщо $\Delta<0$, то $z=2x+y$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ буде мати *умовний максимум,* якщо $\Delta>0$ – то *умовний мінімум.*

$$\Delta_1=-\begin{vmatrix} 0 & \phi'_x(M_1\lambda_1) & \phi'_y(M_1\lambda_1) \\ \phi'_x(M_1\lambda_1) & L''_{xx}(M_1\lambda_1) & L''_{xy}(M_1\lambda_1) \\ \phi'_y(M_1\lambda_1) & L''_{xy}(M_1\lambda_1) & L''_{yy}(M_1\lambda_1) \end{vmatrix},$$

$$M_1(-2;-1), \; \lambda_1=\frac{1}{2}.$$

$$\phi'_x=-4; \; \phi'_y=-2; \; L''_{xx}=1; \; L''_{xy}=0; \; L''_{yy}=1.$$

$$\Delta_1=-\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-(-4-16)=20>0,$$

отже, в точці M_1(-2; -1) – умовний мінімум $Z_{\min}=-5$.

$$M_2(2;1), \; \lambda=-\frac{1}{2}.$$

$$\phi'_x = 4;\ \phi'_y = 2;\ L''_{xx} = -1;\ L''_{xy} = 0;\ L''_{yy} = -1.$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(4+16) = -20 < 0,$$

отже, в точці $M_1(2;1)$ – умовний максимум, $Z_{\max} = = 5$.

Приклад 9.18. Підприємець вирішив виділити на розширення своєї справи 150 тис. грн. Відомо, що якщо на придбання нового устаткування витратить x тис. грн., а на зарплату знову прийнятих робітників – y тис. грн., то приріст об'єму продукції складе $Q = 0,001x^{0,6}y^{0,4}$. Як треба розподілити виділені грошові ресурси, щоб приріст об'єму продукції був максимальним?

Розв'язання

$$Q = 0,001x^{0,6}y^{0,4},\ \ x + y = 150.$$

$$Q = 0,001x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}} = 0,001\sqrt[5]{x^3y^2}\ .$$

Отже, $\sqrt[5]{x^3y^2}$ – найбільше значення, тобто x^3y^2 – max.

$$y = 150 - x,\ x^3(150 - x)^2,\ 0 \le x \le 150,$$

$$x^3(22500 - 300x + x^2) = 0,$$

$$x^3 = 0, \text{ або } x^2 - 300x + 22500 = 0,$$

$$D_1 = 150^2 - 22500 = 0,$$

$$x = 150.\ \ y = 0.$$

Тому, щоб приріст об'єму продукції був максимальним, треба розподілити виділені грошові ресурси таким чином (0;150) або $(150;0)$, $(90;60)$.

Приклад 9.19. Загальні витрати виробництва задані функцією $TC = 0,5x^2 + 0,6xy + 0,4y^2 + 700x + 600y + 2000$, де x і y, відповідно, кількість товару A і B. Загальна кількість виробленої продукції повинна дорівнювати 500 одиниць. Скільки одиниць товару A і B потрібно виробити, щоб витрати на їхнє виготовлення були мінімальними?

Розв'язання

$$A+B=500,\ A=x,\ B=y,\ x+y=500,\ x=500-y.$$

$$TC=0,5(500-y)^2+0,6(500-y)y+0,4y^2+700(500-y)+600y+2000=$$

$$=0,5(250000-1000y+y^2)+300y-0,6y^2+$$

$$+0,4y^2+350000-700y+600y+2000=$$

$$=125000-500y+0,5y^2+200y-0,2y^2+352000=0,3y^2-300y+477000.$$

$$TC'=0,6y-300,\quad TC'=0;\quad 0,6y-300=0,\quad y=500,$$

$$x=0.$$

$$A=0,\ B=500.$$

Отже, $(0;500)$ – оптимальний план виробництва.

Приклад 9.20. Знайти екстремум функції

$$z=\frac{3}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-5x-y+2.$$

Розв’язання

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x+2y-5;\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x-y-1.$$

Знаходимо стаціонарні точки, використовуючи необхідну умову екстремуму

$$\begin{cases}3x+2y-5=0,\\2x-y-1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y=5,\\2x-y=1,\end{cases}\ \Big|\cdot 2\Rightarrow\begin{cases}3x+2y=5,\\4x-2y=2,\end{cases}\ \begin{cases}3x+2y=5,\\7x=7,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1,\\3+2y=5,\end{cases}\quad y=1.$$

Отже, M_0 (1; 1) – стаціонарна точка.

Знаходимо значення частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1.$$

$$A=3,\ B=2,C=-1.$$

Значення похідних не залежать від x і y, тому обчислювати їхні величини в стаціонарній точці немає необхідності. Обчислюємо дискримінант

$$\Delta = AC - B^2 = 3\cdot(-1) - 2^2 = -3 - 4 = -7 < 0 .$$

Тому в точці $M_0(1,1)$ функція не має екстремуму.

9.13.2 Локальний екстремум функції двох змінних

Нехай функція $f(x, y)$ визначена й неперервна в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$.

Означення 9.7. Точка M_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції $f(x, y)$, якщо існує такий окіл точки M_0, в якому для будь-якої точки *M(x; y)* виконується нерівність $f(M) \le f(M_0)$, $f(M) \ge f(M_0)$.

Точки локального максимуму й мінімуму називаються точками *локального екстремуму* або просто *точками екстремуму.*

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні першого порядку в точці локального екстремуму $M_0(x_0, y_0)$, то $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$

Приклад 9.21. Знайти стаціонарні точки функції

$$z = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2 .$$

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3; \\ z'_y = 4y^3 - 4y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases} \begin{cases} 3x^2 = 3; \\ 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 & y = 0 \\ y(y^2 - 1) = 0, & y = \pm 1. \end{cases}$$

Існує 6 стаціонарних точок: (1; 0), (1; 1), (1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (-1; -1).

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0,y_0)$. Позначимо $\Delta = f''_{xx}(M_0)\cdot f''_{yy}(M_0)-(f''_{xy}(M))^2$,

1. Якщо $\Delta>0$, то в точці M_0 функція має локальний екстремум, причому при $f''_{xx}(M_0)<0$ існує локальний максимум, при $f''_{xx}(M_0)>0$ – локальний мінімум.

2. Якщо $\Delta<0$, то в точці M_0 немає екстремуму.

Приклад 9.22. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$z = x^3-3x-(x+1+arctgy)^2.$$

Розв’язання

Знаходимо стаціонарні точки

$$z'_x = 3x^2-3-2(x+1+arctgy).$$

$$z'_y = -2(x+1+arctgy)^2\cdot\frac{1}{1+y^2}.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} 3x^2-3-2(x+1+arctgy)=0, \\ -2(x+1+arctgy)\cdot\dfrac{1}{1+y^2}=0, \quad 1+y^2\neq 0. \end{cases}$$

$$x+1+arctgy=0, \quad \text{тому } z'_x = 3x^2-3=0,.$$

$$3x^2=3,$$

$$x=\pm 1.$$

Оскільки $|arctgy|<\dfrac{\pi}{2}<2,$ то $x+1+arctgy\neq 0,$ у випадку $x = 1$. Якщо ж $x = -1$, то $x+1+arctgy=0,$ $y = 0$. $M_0(-1;0)$ – стаціонарна точка.

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx}=6x-2. \qquad z''_{xx}(M_0)=-8.$$

$$z''_{yy}(M_0)=-2. \;\; z''_{yy}(M_0)=-\frac{2}{(1+y^2)^2}+\frac{y}{1+y^2}(x+1+arctgy)$$

$$z''_{xy} = -\frac{2}{1+y^2}; \;\; z''_{xy}(M_0) = -2.$$

Оскільки $z''_{xx}(M_0) < 0$, $\Delta = -8 \cdot (-2) - (-2)^2 = 12 > 0$, то точка M_0 є точкою локального мінімуму.

9.14 Метод найменших квадратів

В економічній практиці дуже часто потрібно представити спостережувані дані у вигляді функціональної залежності. При цьому передбачається, що вигляд функціональної залежності відомий і потрібно визначити тільки параметр цієї залежності.

Нехай у ході дослідження (наприклад, «купівельного попиту») отримана така таблиця (табл. 9.2), де x – аргумент попиту (ціна товару), а y – функція (кількість товару).

Таблиця 9.2

чх	*хх1*	*хх2*	*хх3*	...	*ххn*
ну	*уу1*	*уу2*	*уу3*	...	*ууn*

Потрібно за цими табличними даними отримати функціональну залежність (криву попиту). Для оцінки виду функціональної залежності представимо дані таблиці у вигляді точок на площині.

Опираючись на графічне подання, можна припускати, що ця функціональна залежність або лінійна $y = ax + b$, або квадратична $y = ax^2 + bx + c$.

Метод найменших квадратів передбачає знаходження параметрів a, b (a, b, c) цих залежностей із умови мінімуму суми квадратів відхилення.

Для лінійної залежності маємо

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2 \to \min. \tag{9.23}$$

Для квадратичної залежності маємо

$$\Phi(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i^2 + bx_i + c) - y_i]^2 \to \min. \tag{9.24}$$

Тоді з умов $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$ отримуємо формули для визначення *коефіцієнтів лінійної залежності*

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (9.25)$$

З умов $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$ – формули для визначення *коефіцієнтів квадратичної залежності*

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (9.26)$$

Приклад 9.23. Отримати лінійну залежність $y = ax + b$ за заданими даними (табл. 9.3).

Таблиця 9.3

xx	11	22	33	44	55	66
yy	66	88	110	99	112	111

Розв’язання

Для зручності обчислень складаємо таблицю 9.4:

Таблиця 9.4

n	x_i	y_i	x^2_i	$x_i \cdot y_i$
1	1	6	1	6
2	2	8	4	16
3	3	10	9	30
4	4	9	16	36
5	5	12	25	60
6	6	11	36	66
N = 6	21	56	91	214

Тоді

$$\begin{cases} 91a + 21b = 214, \\ 21a + 6b = 56, \end{cases} \left|\begin{array}{l} 2 \\ -7 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 182a + 42b = 428, \\ -147a - 42b = -392, \end{cases}$$

Додаємо рівняння, отримаємо

$$35a = 36, \quad a = \frac{36}{35} = 1\frac{1}{35}.$$

Підставивши замість a у будь-яке рівняння, знаходимо b

$$21 \cdot \frac{36}{35} + 6b = 56,$$
$$108 + 30b = 280,$$
$$30b = 172,$$
$$b = \frac{172}{30} = \frac{86}{15} = 5\frac{11}{15}.$$

Отже, лінійна залежність буде мати вигляд

$$y = 1\frac{1}{35}x + 5\frac{11}{15}.$$

Приклад 9.24. Прибуток підприємства за деякий період діяльності за роки приведений в табл. 9.5

Таблиця 9.5

рік, t	1	2	3	4	5	6	7
прибуток, π	54	57	62	65	67	69	70

Потрібно:

а) скласти квадратичну залежність прибутку за роки діяльності підприємства;

б) визначити очікуваний прибуток для 8-го року діяльності.

Розв’язання

а) Складемо таблицю 9.6

Таблиця 9.6

n	x_i	y_i	x^2_i	x^3_i	x^4_i	$x_i \cdot y_i$	$x^2_i \cdot y_i$
1	1	54	1	1	1	54	54
2	2	57	4	8	16	114	228
3	3	62	9	27	81	186	558
4	4	65	16	64	256	260	1040
5	5	67	25	125	625	335	1675
6	6	69	36	216	1296	414	2484

7	7	70	49	343	2401	490	3430
N = 7	28	444	140	784	4676	1853	9469

Запишемо систему

$$\begin{cases} 4676a + 784b + 140c = 9469, \\ 784a + 140b + 28c = 1853, \\ 140a + 28b + 7c = 444. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 4676 & 784 & 140 & 9469 \\ 784 & 140 & 28 & 1853 \\ 140 & 28 & 7 & 444 \end{array}\right).$$

Третій рядок перенесемо на перший рядок, помножимо 2-й рядок на 5-й, а третій – на –28 і додамо другий рядок до третього, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 140 & 28 & 7 & 444 \\ 0 & 84 & 56 & 3167 \\ 4676 & 784 & 140 & 9469 \end{array}\right).$$

Перший рядок помножимо на 167, а третій – на –5, додамо перший рядок до третього, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 140 & 28 & 7 & 444 \\ 0 & 84 & 56 & 3167 \\ 0 & 756 & 469 & 26803 \end{array}\right).$$

Другий рядок помножимо на –9 і до нього додамо третій рядок, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 140 & 28 & 7 & 444 \\ 0 & 84 & 56 & 3167 \\ 0 & 0 & 35 & 1700 \end{array}\right).$$

Звідки

$$35c = 1700,$$

$$c = \frac{1700}{35} = \frac{340}{7} = 48\frac{4}{7}.$$

Підставляємо замість значення c у рівняння й отримаємо

$$84b + 56 \cdot 48\frac{4}{7} = 3167,$$

$$84b + 56 \cdot \frac{340}{7} = 3167,$$

$$84b + 2720 = 3167,$$

$$84b = 447, \; b = \frac{447}{84}.$$

$$140a + 28b + 7c = 444,$$

$$140a + 28 \cdot \frac{447}{84} + 7 \cdot \frac{340}{7} = 444,$$

$$140a + 149 + 340 = 444,$$

$$140a = -45, \; a = -\frac{45}{140}.$$

Отже, квадратична залежність буде мати вигляд:

$$\pi = -\frac{45}{140}t^2 + \frac{447}{84}t + \frac{340}{7}.$$

б) Очікуваний прибуток для 8-го року діяльності

$$\pi(8) = -\frac{45}{140} \cdot 8^2 + \frac{447}{84} \cdot 8 + \frac{340}{7} = \frac{494}{7} = 70\frac{4}{7}.$$

9.15 Еластичність функції

Еластичністю вартості товару A відносно P_A називається величина

$$\eta_{P_A} = \frac{P_A}{x_A} \cdot \frac{\partial x_A}{\partial P_A}.$$

Аналогічно визначається *еластичність вартості товару A відносно P_B.*

Нехай задана функція $y = f(x)$, де x – змінна. Позначимо приріст через Δx, тоді $\frac{\Delta x}{x}$ – відносний приріст незалежної змінної x.

Відповідний приріст функції буде мати вигляд $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а відносний приріст функції – $\frac{\Delta y}{y}$.

Означення 9.8. Відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу має вигляд $\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}$ і показує, у скільки разів відносний приріст функції більше відносного приросту аргументу.

Перейдемо до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \cdot \frac{x}{y}.$$

Отримана границя називається *еластичністю функції* відносного аргументу й позначається таким чином

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{9.27}$$

Еластичність функції є наближеним відсотковим приростом функції (збільшення або зниження) при відповідному прирості незалежної змінної на 1 %.

Приклад 9.26. Розрахувати еластичність функції $y = 3x - 6$.

Розв’язання

За означенням отримаємо

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}.$$

Нехай x = 10, тоді

$$E_x(y) = \frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}.$$

Це означає, що якщо x зростає на 1 % тоді y зростає на $\frac{5}{4}$ %.

9.16 Еластичність попиту відносно ціни

Залежність між попитом на товар і його ціною дозволяє його ціні поставити у відповідність попит, тобто можна визначити еластичність попиту відносно ціни.

Нехай попит залежить від ціни $g = f(p)$. Нехай ΔP = це приріст ціни, Δg = приріст попиту. Тоді відносна зміна ціни й попиту відносно рівні.

$\frac{\Delta p}{p}$ – відносний приріст ціни, $\frac{\Delta q}{q}$ – відносна зміна попиту.

Знайдемо еластичність

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \quad ,$$

$$E_c(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \quad .$$

Еластичність попиту відносно ціни наближено визначається як зміна попиту на товар, якщо його ціна зростає на 1 %.

Якщо $E_C > 1$, тобто якщо збільшенню ціни на 1 % відповідає зменшення попиту більш ніж на 1 %, говорять, що попит *еластичний.*

Якщо $E_C = 1$, тобто якщо збільшенню ціни на 1 % відповідає зменшення попиту на 1 %, то говорять, що попит *нейтральний.*

Якщо $0 < E_C < 1$, тобто якщо збільшенню ціни на 1% відповідає зменшення попиту менше ніж на 1 %, тоді попит *нееластичний*.

Приклад 9.27. Нехай функція попиту має вигляд $g = 10 - p,\ p = 2$. Обчислити еластичність попиту при $p = 2$ грошових одиниць.

Розв’язання

$$E_c = \frac{p}{10-p} \cdot (-1) \le \frac{p}{10-p} \quad ,$$

$$E_c = \frac{1}{4}.$$

Це означає, що при p = 2 грошових одиниць збільшення ціни на 1% викличе зниження попиту на $\frac{1}{4}$ %.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 9.1. Знайти умовні екстремуми функцій

1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$, $Z_{\min} = -4,75$, $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

2. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, при $x + y = 2$. $\quad Z_{\min} = 2$, (1;1).

3. $z = xy^2$, при $x + 2y = 1$ $\quad Z_{\min} = 0$, $(1;0)$; $Z_{\max} = \frac{1}{27}$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

4. $z = x + 2y$, при $x^2 + y^2 = 1$ $\quad Z_{\max} = \sqrt{5}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$Z_{\min} = -\sqrt{5}$, $\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

5. $z = x + y$, при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$. $Z_{\max} = -4$, $(-2;2)$; $Z_{\min} = 4$, $(2;2)$.

Завдання 9.2. У результаті дослідження залежності між терміном експлуатації автомобіля й витратами на його ремонт отримано дані (табл. 9.7)

Таблиця 9.7

Т, років	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тис. Гр.	120	140	230	370	445	570	655	770

Знайти:

а) лінійну залежність вартості ремонту автомобіля від терміну експлуатації;

б) спрогнозувати величину витрат на ремонт за 10-й рік експлуатації.

Відповідь: $S(t) =$ 98,452 - 29,286, $S(10) = 955$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 9.1 Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{dy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функції $z = x^3 y + (y+1)^2 x$.

Завдання 9.2 Знайти екстремум функції $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

Завдання 9.3 Знайти область визначення функції $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$.

Завдання 9.4 Знайти екстремуми функцій:

a. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ $\ M_0(-4;1)$ $Z_{\min} = -1$.

b. $z = xy^2 - xy - xy^3$ $\quad (x > 0, y > 0)$: екстремуму немає.

c. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$, $M_0(0;-\frac{2}{3})$, $Z_{\min} = -\frac{4}{3}$.

d. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$: екстремуму немає.

e. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$, M_0(-2; 0), $Z_{\min} = -\frac{2}{e}$.

f. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, M_0(0; 0), $Z_{\max} = 4$.

10 ПЕРВІСНА Й НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

10.1 Первісна. Основні поняття

Диференціювання функції – це процес знаходження похідної $F'(x)$, або $dF(x) = F'(x)$. Обернений процес – знаходження функції $F(x)$ за заданою похідною $F'(x) = f(x)$ або заданим диференціалом $dF(x) = f(x)dx$ називається. *інтегруванням функції* $f(x)$, *а* знайдену функцію $F(x)$ називаємо *антипохідною* або *первісною.*

Отже, розділ, що вивчає цей процес і його застосування, називається *інтегральним численням* функції однієї змінної.

Розглянемо приклади задач, що приводять до необхідності інтегрування функції.

Якщо функція $S(t)$ вказує закон зміни відстані S' з часом t нерівномірного руху, то миттєва швидкість цього руху $V(t) = S'(t)$ знаходиться диференціюванням функції $S(t)$. Але іноді трапляється так, що швидкість нерівномірного руху $V(t)$ відома, як функція часу t і треба знайти закон зміни $S(t)$ відстані S із часом t. У цьому випадку $S'(t)$ задана і потрібно визначити $S(t)$, тобто виконати операцію обернену диференціюванню.

Інший приклад, якщо відома маргінальна функція витрат $V'(t)$ і потрібно знайти функцію продуктивних витрат $V(x)$ виробництва x одиниць продукції.

Означення 10.1 *Первісною функцією* для заданої функції $f(x)$ називають таку функцію $F(x)$, похідна, якої дорівнює $f(x)$, або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$. Отже, первісна функція $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ задовольняє рівності

$$F'(x) = f(x),$$

або

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Приклад 10.1. Функція $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ буде первісною для функції $f(x) = x^2$, тому що $(\dfrac{x^3}{3})' = x^2$, або $d\left(\dfrac{x^3}{3}\right) = x^2dx$. Згідно з правилами диференціювання функції, що відрізняються лише постійним доданком, мають однакову похідну, тобто $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x)$. Тому, якщо $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має нескінченну кількість первісних функцій, відмінних одна від одної на постійний доданок, тобто функцій вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Приклад 10.2. Функція $f(x)=3x^2$ має первісні x^3; x^3+6; $x^3-20,\ldots,x^3+C$, тому що похідні усіх цих функцій однакові й дорівнюють x^3.

Теорема 10.1. Будь-які дві первісні для заданої функції $f(x)$ відрізняються лише постійним доданком.

Доведення

Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні для функції $f(x)$. Тоді $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Звідси випливає, що $F_1'(x)-F_2'(x)=0$ або $\left[F_1'(x)=F_2'(x)\right]'=0$. Остання рівність означає, що $F_1(x)-F_2(x)=C$ або $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Наслідок. Щоб знайти усю нескінченну множину первісних функцій (сукупність первісних), достатньо знайти лише одну первісну функцію, а усі інші одержати доданням до неї постійної. Отже, сукупність первісних функцій має вигляд $F(x)+C$, якщо $F(x)$ – одна з первісних.

Теорема 10.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на $(a;b)$, то множину всіх первісних для $f(x)$ можна задати формулою $F(x)+C$, де C – постійне число.

Доведення

Функція $F(x)+C$ є первісною для $f(x)$. Дійсно $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша функція, відмінна від $F(x)$, первісна функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x)=f(x)$. Тоді для $\forall\ x\in(a;b)$ маємо (Φ(x)-F(x))'$=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. А це означає, що $\Phi(x)-F(x)=C$, де C = const. Якщо похідна функції дорівнює нулеві на деякому проміжку, то функція постійна на цьому проміжку. Тому, $\Phi(x)=F(x)+C$.

Означення 10.2. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається

$$\int f(x)dx. \tag{10.1}$$

Отже,

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Знак $\int$ означає операцію інтегрування й називається *знаком інтеграла*, вираз $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом,* функція $f(x)$ − *підінтегральною,* змінна x, що стоїть під знаком диференціала, називається *змінною інтегрування,* $F(x)$ − деяка первісна для заданої $f(x)$, а C – *довільна постійна інтегрування.*

Процес знаходження невизначеного інтеграла називають *інтегруванням*.

Геометрично невизначений інтеграл представляє собою сім'ю «паралельних» кривих $y = F(x) + C$ (кожному числовому значенню C відповідає відповідна крива сім'ї). Графік кожної первісної кривої називається *інтегральною кривою.* Криві одержуються шляхом зміщення цієї кривої по осі Oy на величину, що дорівнює значенню постійної C (рис. 10.1).

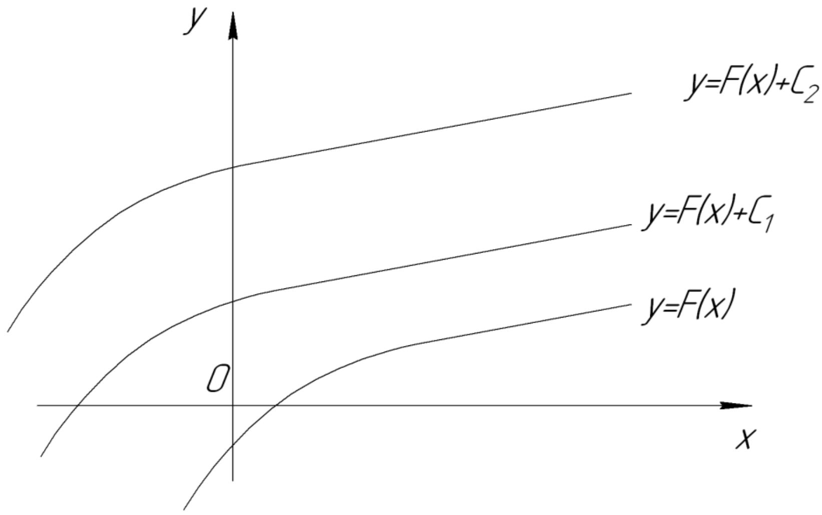

Рисунок 10.1

10.2 Властивості невизначеного інтеграла

1. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx, \; (\int f(x)dx)' = f(x). \qquad (10.2)$$

Доведення

Дійсно

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції й довільній постійній:

$$\int d(F(x)) = F(x)+C. \qquad (10.3)$$

Доведення

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \neq 0 \qquad (10.4)$$

Доведення

$$\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aF(x)')dx = \int d(aF(x)) = aF(x)+C_1 =$$
$$= a(F(x)+\frac{C_1}{a}) = a(F(x)+C) = a\int f(x)dx,\ (C=\frac{C_1}{a}).$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) скінченного числа неперервних функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) інтегралів від функцій-доданків

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (10.5)$$

Доведення.

Нехай $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тоді

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F(x) \pm G'(x))dx =$$
$$= \int (F(x)+G(x))'dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C =$$
$$= (F(x)+C_1) \pm (G(x)+C_2) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

де $C_1 \pm C_2 = C$.

5. Якщо

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

то

$$\int f(u)du = F(u)+C,$$

де $u = \phi(x)$ − довільна функція, яка має неперервну похідну.

Доведення

Нехай x − незалежна змінна, $f(x)$− неперервна функція і $F(x)$− її первісна. Тоді $\int f(x)dx = F(x) + C$. Позначимо тепер $u = \phi(x)$, де $\phi(x)$− неперервно-диференційовна функція. Розглянемо складену функцію $F(u) = F(\phi(x))$. У силу інваріантності форми першого диференціала функції отримаємо:

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Звідси

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$$

10.3 Інтегрування деяких елементарних функцій

За допомогою означення невизначеного інтеграла можна отримати такі формули для інтегрування деяких елементарних функцій.

1. $\int 0dx = c \quad \int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$$

$$15. \int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C,\ a \neq 0$$

$$19. \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$20. \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$21. \int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a\right| + C$$

Приклад 10.3. Знайти інтеграл функції $\int (2x + 1)^2 dx.$

Розв'язання

$$\int (2x + 1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1)dx = \int 4x^2 dx + \int 4xdx + \int 1dx = 4\int x^2 +$$

$$+4\int xdx + \int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C\ .$$

Приклад 10.4. Знайти маргінальний доход фірми $D'(x) = 15\text{-}0{,}01x$. Знайти функцію доходу й визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язання

Функцію доходу фірми можна знайти інтегруванням маргінального доходу, тобто

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int (15 - 0{,}01x)dx = \int 15dx - \int 0{,}01xdx = 15\int dx - =$$

$$-0{,}01\int xdx = 15x - 0{,}01\frac{x^2}{2}15x - 0{,}005x^2 + C,\ C - const.$$

Для знаходження C використовуємо той факт, що дохід повинен дорівнювати нулю, коли не продано жодної одиниці продукції, тобто при $x = 0$ маємо

$$0 = 15 \cdot 0 - 0,005 \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 .$$

Отже, функція доходу має вигляд

$$D(x)=15x-0,005x^2 .$$

Якщо вартість кожної одиниці проданої фірмою продукції P і продали x одиниць продукції, то дохід буде $D(x) = Px$ Отже, маємо

$$Px = 15x - 0,005x^2 \Rightarrow p = 15 - 0,005x.$$

Остання рівність задає потрібне відношення.

10.4 Основні методи інтегрування

Наведені нижче формули безпосередньо випливають із означення й властивостей невизначеного інтеграла.

1. $du = d(u+a)$, $dx = d(x+a), a - число. \quad a \neq 0$

2. $dx = \frac{1}{a} d(ax), \quad a \neq 0 - число$

3. $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$

4. $\cos x dx = d(\sin x)$

5. $\sin x dx = -d(\cos x)$

6. $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$

7. $\frac{1dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)$

10.5 Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування застосовується в тих випадках, коли підінтегральна функція має вигляд однієї із підінтегральних функцій табличних інтегралів, але її аргумент відрізняється від змінної інтегрування постійним доданком або постійним множником і постійним доданком.

Приклад 10.5 Знайти інтеграли

а) $\int \cos(2x+7)dx$.

Розв'язання

$$\int \cos(2x+7)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+7) + C.$$

б) $\int e^{3-5x}dx$.

Розв'язання

$$\int e^{3-5x}dx = \int e^{-5x+3}dx = \frac{1}{-5}e^{-5x+3} + C.$$

в) $\int \cos 3x dx$.

Розв'язання

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

г) $\int \frac{7dx}{5+4x}$.

Розв'язання

$$\int \frac{7dx}{5+4x} = 7\int \frac{dx}{4x+5} = 7\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+5| + C = \frac{7}{4}\ln|4x+5| + C.$$

д) $\int (11x+6)^4 dx$.

Розв'язання

$$\int (11x+6)^4\,dx = \frac{1}{11}\frac{(11x+6)^5}{5} + C.$$

е) $\int \frac{4dx}{(3x+6)^7}$.

Розв’язання

$$\int \frac{4dx}{(3x+6)^7} = 4\int (3x+6)^{-7}\,dx = 4\frac{1}{3}\frac{(3x+6)^{-6}}{-6} + C.$$

ж) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^4}\,dx$.

Розв’язання

$$\int \sqrt[3]{(2x+1)^4}\,dx = \int (2x+1)^{4/3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{7/3}}{7/3} + C.$$

10.6 Метод підстановки (заміни змінної)

Метод підстановки (заміни змінної) базується на двох прийомах.

Якщо для знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку $x=\phi(t)$, тоді має місце рівність

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \qquad (10.6)$$

де $x=\phi(t)$, функція диференційована на розглянутому проміжку.

Доведення

Знайдемо похідні за змінною t від лівої і правої частин.

$$(\int f(x)dx)_t{}' = (\int f(x)dx)'_x \cdot x'_t = f(x)\cdot\phi'(t),$$
$$(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt)'_t = f(\phi(t))\cdot\phi'(t).$$

Оскільки функція $x=\phi(t)$, то ці похідні рівні, тому за наслідком із теореми Лагранжа ліва й права частини відмінні лише на деяку постійну. Оскільки самі невизначені інтеграли визначені з точністю до невизначеного постійного доданка, то вказану постійну в кінцевому записі можна опустити.

Інтеграл у правій частині може стати більш простим або табличним. Після його знаходження треба повернутись до початкової змінної інтегрування x. Для цього потрібно, щоб функція $x=\phi(t)$ мала обернену $t=\psi(x)$.

Якщо зробити заміну змінної інтегрування за формулою $t=\phi(x)$, тоді має місце рівність

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=\int f(t)dt \qquad (10.7)$$

Після знаходження більш простого інтеграла правої частини потрібно повернутись до змінної x, використовуючи рівність $t=\phi(x)$.

Приклад 10.6. Обчислити інтеграл $\int(x^2+5)^7\cdot 2xdx.$

Розв’язання

$$\int(x^2+5)^7\cdot 2xdx=\left|\begin{matrix} t=x^2+5 \\ dt=2xdx\end{matrix}\right|=\int t^7dt=\frac{t^8}{8}+C=\frac{(x^2+5)^8}{8}+C\,.$$

Якщо підстановка обрана вдало, то одержаний інтеграл буде простішим і мета підстановки досягнута.

10.7 Метод інтегрування частинами

Якщо під знаком інтеграла знаходиться добуток двох функцій, одна з яких проста, а друга складна, або обидві складні, тоді здійснюється інтегрування по частинам. Отже, цей метод застосовується тоді, коли під інтегралом є добуток функцій, причому хоча б одна з них є трансцендентною (не степеневою).

Інтегрування по частинам використовують для таких функцій:

$$\int \mathrm{x}\cdot\mathrm{arctgxdx},\quad \int \mathrm{x}^3\cdot\mathrm{sinxdx},\quad \int \mathrm{sinx}\cdot\mathrm{lnxdx},$$

та інших.

Інтегрування частинами здійснюється за формулою:

$$\int \mathrm{u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-}\int \mathrm{v(x)du(x)} \qquad (10.8)$$

Теорема 10.1. Справедлива рівність

$$\int \mathrm{udv=u\cdot v-}\int \mathrm{vdu} \qquad (10.9)$$

Доведення

Нехай u і v не нульові функції, які є неперервними разом зі своїми похідними. Розглянемо добуток функцій uv. Продиференціюємо

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv.$$

Інтегруємо обидві частини рівності, отримаємо

$$\int d(u\cdot v)=\int du\cdot v+\int u\cdot dv.$$

Враховуючи властивість невизначеного інтеграла, маємо

$$u\cdot v=\int u\cdot dv+\int v\cdot du.$$

Отже, одержали формулу

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$$

Приклад 10.7. Обчислити інтеграл $\int x^2\cdot\ln x dx$.

Розв'язання

$$\int x^2\cdot\ln x dx=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\int x^2 dx=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$$

Зауваження. Під час вибору $u(x)$ і $dv(x)$ слід пам'ятати, що спрощення заданого інтеграла можливе за рахунок диференціювання функції $u(x)$.

Позначимо через $P(x)$ – многочлен відносно x.

В інтегралах вигляду

$$\int P(x)e^x dx,\ \int P(x)\sin x dx,\ \int P(x)\cos x dx$$

доцільно обирати $u=P(x)$, а частину, яка залишилася, позначити dv.

В інтегралах вигляду

$$\int P(x)\ln x dx,\quad \int P(x)\arcsin x dx,\quad \int P(x)\mathrm{arctg}\, x dx$$

доцільно обирати $dv=P(x)$, а залишок підінтегрального виразу дорівнювати u.

10.8 Метод інтегрування раціональних дробів

Означення 10.3 Дріб називається *раціональним,* якщо його чисельник і знаменник є многочленами, тобто дріб має вигляд

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \qquad (10.10)$$

де a_i і $в_k$ – коефіцієнти многочленів; $i = 0;1;\ldots;n;$ $k = 0;1;\ldots;m.$

Раціональний дріб називається *правильним,* якщо найвищий показник степеня чисельника n менше відповідно степеня m знаменника. Дріб називається *неправильним,* якщо $n \geq m$.

Якщо $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів) і одержати заданий дріб у вигляді суми многочленна та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_k(x) + \frac{R_i(x)}{Q_m(x)}.$$

Означення 10.4. Найпростішими раціональними дробами I, II, III, IV типу називають правильні дроби вигляду

I. $\frac{A}{x-a}$.

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k ≥ 2, ціле)

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2 - 4q\langle 0$).

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ (k ≥ 2, корені знаменника комплексні числа).

Інтеграл від найпростішого раціонального дробу четвертого типу шляхом інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого раціонального дробу третього типу або використовують метод Остроградського.

Знаходження інтеграла від раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ у випадку наявності кратних коренів знаменника $Q(x)$ можна здійснювати *методом Остроградського* за формулою:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{M_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{M_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де $Q_1(x)$ – найбільший загальний дільник $Q(x)$ і похідної $Q'(x), Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$, де $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$– многочлени порядку на одиницю меншого порядку з невідомими коефіцієнтами.

Коефіцієнти багаточленів $M_1(x)$ і $M_2(x)$ знаходять після диференціювання останньої рівності методом невизначених коефіцієнтів.

З цього випливає теорема.

Теорема 10.3. Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Теорема 10.4. Будь-який раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого розкладений на множники

$$Q(x) = (x - x_1)^{k1} \cdot (x - x_2)^{k2} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{S_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{S_m}$$

можна представити (і причому єдиним чином) у вигляді суми простих дробів

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k1}}{(x - x_1)^{k1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k2}}{(x - x_2)^{k2}} +$$

$$\ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{S_1} x + D_{S_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{S_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_m x + q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{S_m} x + N_{S_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{S_m}}, \quad (10.11)$$

де $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, N_1, N_2, \ldots$ – деякі дійсні коефіцієнти.

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена $L_k(x)$ і суми найпростіших раціональних дробів. Зазначимо, що вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Пояснимо застосування теореми на прикладах:

1) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3}.$

2) $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C_x+D}{x^2+1}.$

3) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C_x+D}{x^2+x+1}+$

$+\dfrac{M_x+N}{(x^2+x+1)^2}.$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ рівності (10.11) можна застосувати *метод порівняння коефіцієнтів*, або *метод невизначених коефіцієнтів,* який полягає у такому:

1. У правій частині останньої рівності зведемо до спільного знаменника $Q(x)$, у результаті отримаємо тотожність $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{S(x)}{Q(x)}$, де $S(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами.

2. Оскільки в отриманій тотожності знаменники рівні, то тотожно рівними будуть і чисельники, тобто $P(x)=S(x)$.

3. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності, отримаємо систему лінійних рівнянь, із яких і визначаємо коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots$

Приклад 10.8. Знайти $\int\dfrac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Розв'язання

Для обчислення цього інтеграла виписуємо підінтегральну функцію й правильний раціональний дріб представимо у вигляді суми найпростіших раціональних дробів, праву частину зведемо до загального знаменника, а далі будемо використовувати метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_x+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(B_x+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}=$$

$$\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(C-B)+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)};$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B=1, \\ A-C=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A+C=1, \\ A-C=0, \end{cases} \quad 2A=1$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}, \\ C=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = \int \frac{1}{2(x-1)}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

10.9 Метод інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n xdx, \int \sin^m x,$$

де m і n – цілі числа.

Якщо m і n парні додатні числа, то застосовують формули пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \qquad (10.12)$$

Приклад 10.9. Обчислити $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx$.

Розв’язання

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 2x\right)(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos^2 2x\cdot\cos 2x-\cos^3 2x\right)dx=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos^2 2x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4xdx+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{8}\int\cos^2 2xd\left(\sin 2x\right)$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C\,.$$

Якщо m і n – непарне додатне число, то інтеграл знаходять, відділяючи від непарного степеня один множник.

Приклад 10.10. Обчислити $\int\sin^2 x\cdot\cos^3 xdx$

Розв’язання

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^3 xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 xd\left(\sin x\right)=$$

$$=\int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=\int\sin^2 xd\left(\sin x\right)-\int\sin^4 xd\left(\sin x\right)=$$

$$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Для інтегрування функцій

$$\sin nx\cdot\cos mx,\cos nx\cdot\cos mx,\sin nx\cdot\sin mx$$

можуть бути використані формули

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]\\&\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\\&\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\end{aligned}\qquad(10.13)$$

Приклад 10.11. Обчислити $\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx.$

Розв’язання

$$\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{6}+\cos\frac{5x}{6}\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{6}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{5x}{6}dx=$$

$$=3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+C.$$

Якщо – раціональна функція, то інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

обчислюється шляхом підстановки $tg\frac{x}{2}=t.$ Звідки

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \ x = 2arctgt.$$

Якщо інтеграл має вигляд

$$\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx,$$

застосовують підстановку $tg\, x= t$. Звідки

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, x = arctgt. \qquad (10.14)$$

Приклад 10.12. Обчислити $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Розв’язання

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \begin{vmatrix} \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, x = 2arctgt \end{vmatrix} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{\left(t^2 - 2t + 1\right) - 1 - 1} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{tg\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

Підстановка $t = tg\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, хоча й є універсальною, проте призводить, як правило, до технічно складних викладок. А тому проаналізуємо кілька окремих випадків більш простої раціоналізації інтегралів, розглянутих вище.

Але іноді на практиці застосовують більш прості підстановки, а саме:

1. Якщо функція $R(-\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ то зручно скористатися підстановкою $t = \cos x$.

2. Якщо функція $R(\sin x, -\cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ то використовуємо підстановку $t = \sin x$.

3. Якщо функція $R(-`\sin x, -\cos x)$ парна відносно $\sin x$ і, $\cos x$ тобто $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то скористаємось підстановкою $t = tgx$.

Приклад 10.13. Обчислити $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

Розв'язання

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos^4 x} = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{vmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^4} dt +$$

$$+\int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C$$

10.9 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

Нехай потрібно знайти $\int R(x)dx$, де

$$R(x) = \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c},$$

причому $P(x)$ – многочлен n-го степеня $(a \neq 0)$, тобто

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{ax^2 + bc + c}. \qquad (10.15)$$

Виконуючи ділення многочленів з остачею, отримаємо

$$R(x) = Q(x) + \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}, \qquad (10.16)$$

де $Q(x)$ – многочлен, що має степінь менший, ніж степінь многочлена $P(x)$.

Інтегрування $Q(x)$ не викликає труднощів, а тому залишається знайти інтеграл

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx .$$

Будь-який інтеграл такого вигляду зводиться до знаходження одного чи двох стандартних інтегралів

$$\int \frac{dx}{x \pm a}, \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int \frac{dx}{\left(x \pm a\right)^2}, \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2}.$$

Для цього в знаменнику підінтегральної функції потрібно виділити повний квадрат і виконати очевидну заміну змінної.

Приклад 10.14. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

Розв’язання

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,$$

або

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$

У більш складних випадках для знаходження інтеграла типу

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

використовуються підстановки Ейлера, де R – раціональна функція від x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c не розкладається на прості множники, враховуючи, що $ax^2+bx+c>0$, то $a>0$, доцільно позначити

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t = \sqrt{a}x .$$

Після чого під знаком інтеграла залишиться раціональний дріб.

Якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні й різні корені x_1 і x_2, доцільно позначити

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x-x_1\right),$$

у разі, якщо $x_1 = x_2$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|x-x_1|,$$

а отже, під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від x. Указані підстановки мають назву, відповідно, *першої* та *другої підстановки Ейлера.*

10.9 Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що вдало підібрані підстановки дають змогу їх звести до інтегралів від раціональних дробів. Відносно таких підстановок кажуть, що вони раціоналізують дані інтеграли.

Інтеграли вигляду

$$\int R(x;\sqrt[n]{x})dx,$$

де R – раціональна функція від x і $\sqrt[n]{x}$, $n\in N$, раціоналізуються підстановкою $t=\sqrt[n]{x}$. Якщо у підінтегральну функцію входять радикали з різними показниками, то слід застосовувати аналогічну заміну змінної, причому n має дорівнювати спільному кратному всіх цих показників.

Приклад 10.15. Обчислити $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

Розв’язання

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\\ x+1=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t+t^3}=2\int\frac{tdt}{t\left(t^2+1\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x+1}+C.$$

Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x;\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція від x і $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $n\in N$, раціоналізується підстановкою $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Приклад 10.16. Обчислити $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x+1}$.

Розв'язання

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x+1} = \left| t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right| = \int t \cdot \frac{1+t^2}{2} \left(-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2} \right) = -2\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt =$$

$$= -2\int \frac{t^2+1}{1+t^2} dt + 2\int \frac{1dt}{1+t^2} = -2\int dt + 2\int \frac{1dt}{1+t^2} = -2t + 2arctgt + C =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x} + 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C}\,.$$

Інтеграл вигляду

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2})dx,$$

де R – раціональна функція, обчислюють, використовуючи підстановку $x = a \cdot \sin t$, інтеграл вигляду

$$\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2})dx$$

– підстановкою $x = a \cdot tgt$. Для інтеграла вигляду

$$\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2})dx$$

використовують підстановку $x = \frac{a}{\sin t}$.

Приклад 10.17. Обчислити $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Розв'язання

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{aligned}&x=2\sin t\\&dx=2\cos t\,dt\\&t=\arcsin\frac{x}{2}\end{aligned}\right|=\int 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$8\int\sin^2 t\cdot\sqrt{4(1-\sin^2 t)}\cdot\cos t\,dt=8\int\sin^2 t\cdot 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=$$

$$=4t-2\int(1+\cos 4t)dt=4t-2\int dt-2\int\cos 4t\,dt=4t-2t-2\frac{1}{4}\sin 4t+C=$$

$$=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C==2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4(\arcsin\frac{x}{2})+C\,.$$

Для інтеграла вигляду

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+C}}dx$$

використовують підстановку $x-a=\frac{1}{t}$.

10.10 Інтеграли, що не беруться в елементарних функціях

Із основних правил диференціювання випливає, що похідна довільної елементарної функції знову являється елементарною. Однак операція знаходження первісної функції (невизначеного інтеграла) такою властивістю не володіє, тобто існують елементарні функції, первісні яких, елементарними функціями не є. У зв’язку з цим відповідні невизначені інтеграли називаються такими, «що не беруться» в елементарних функціях, а самі функції – не інтегрованим в кінцевому вигляді. Зокрема, такими інтегралами є

$\int\frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм;

$$\left.\begin{aligned}&\int\sin x^2dx\\&\int\cos x^2dx\end{aligned}\right\}$$ – інтеграли Френеля;

$\int \sqrt{\sin x}dx$;

$\int \begin{matrix} e^{-x^2}dx \\ \int e^{x^2}dx \end{matrix}$ – інтеграл Пуассона;

$\int \frac{\sin xdx}{x}$ − інтегральний синус;

$\int \frac{\cos xdx}{x}$ − інтегральний косинус;

$\int \frac{e^x dx}{x}$ − інтегральна показникова функція.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 10.1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \sin(1-5x)dx$.

б) $\int tg2xdx$.

в) $\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt{\sin 3x}}$.

г) $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$.

д) $\int x^2 \cos xdx$.

є) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

ж) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}dx$.

з) $\int \frac{3x+1}{x^2+8x+25}dx$.

і) $\int \frac{7x-11}{x^2-x-6}dx$.

к) $\int \frac{3x^5-4x^4+x^3-7x^2+x-2}{x^3-2x^2}dx$.

Завдання 10.2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

б) $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx$.

11 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

11.1 Визначення й основні поняття визначеного інтеграла. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Нехай функція *f(x)* визначена й обмежена на відрізку [*a; b*] і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ − навмання розбито на n елементарних проміжків. Нехай на кожному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ вибрана точка ξ_i. Тоді сума

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{11.1}$$

називається *інтегральною сумою* функції *f(x)* на відрізку [*a; b*].

Якщо функція $f(x) \geq 0$, то інтегральна сума представляє собою площу східчастої фігури. Позначимо $\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i = \delta_n$.

Скінченна границя інтегральної суми при $n \to \infty$ і $\delta_n \to 0$ називається. *визначеним інтегралом* від функції *f(x)* на відрізку [*a;b*] і позначається

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n \to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx \tag{11.2}$$

де *f(x)* називається *підінтегральною функцією, a* і *b* − *нижньою й верхньою границями інтегрування.*

Границя (11.2) не залежить від способу розбиття проміжку [*a; b*] і вибору точки ξ_i на елементарних проміжках.

Означення 11.1. Якщо визначений інтеграл існує, то функція *f(x)* називається *інтегровною* на відрізку [*a; b*].

Теорема 11.1 (Коші). Якщо функція *y = f(x)* неперервна на відрізку [a; b], то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує**.**

Приклад 11.1. Функція $f(x) = e^{-x^2}$ неперервна на відрізку [0*;a*], де *a* − будь-яке число, і тому вона інтегровна на цьому відрізку, тобто для неї існує визначений інтеграл $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

Теорема 11.2. Якщо функція визначена й неперервна на відрізку [a; b] за виключенням кінцевої кількості точок розриву першого роду, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Приклад 11.2. Функція

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{якщо} \quad x=0\end{cases}$$

інтегрована на відрізку [0; 1], тому що вона обмежена, $|f(x)|\leq 1,\ \forall x\in$ [0; 1] і має на цьому відрізку одну точку розриву $x = 0$ (точка розриву II роду).

Теорема 11.3. Якщо функція визначена й є монотонно зростаючою (спадною) на відрізку [a; b], то вона інтегрована на цьому відрізку.

11.2 Геометричний, фізичний й економічний зміст визначеного інтеграла

11.2.1 Геометричний зміст визначеного інтеграла

Поняття визначеного інтеграла введено таким чином, що у випадку, якщо функція $y=f(x)$ невід'ємна на відрізку [$a; b$] (де $a < b$), $\int_a^b f(x)dx=0$ численно дорівнює площі S під кривою $y=f(x)$ на [$a; b$]. Ураховуючи це, можна вказати значення деяких інтегралів, використовуючи уже відомі формули планіметрії для площ плоских фігур. Так,

$$\int_0^1 dx=1;\int_0^1 xdx=\frac{1}{2};\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

Перший із інтегралів – площа квадрата зі стороною одиничної довжини; другий – площа прямокутного трикутника, катети, якого також одиничної довжини; третій – площа чверті круга одиничного радіуса.

Рівність

$$\int_a^b f(x)dx=0$$

відображає геометричний зміст визначеного інтеграла: у випадку, коли відрізок інтегрування стягнуто в точку, фігура під кривою стягується у відрізок, площа якого дорівнює нулеві, оскільки це площа прямокутника, довжина однієї із сторін якого дорівнює нулеві.

Отже, визначений інтеграл від невід'ємної функції численно дорівнює площі криволінійної трапеції.

11.2.2 Економічний зміст визначеного інтеграла

Нехай функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва протягом певного часу. Знайдемо об'єм продуктивності $\boldsymbol{u}$, що виробляється за проміжок часу **[0; *T*].**

Відмітимо, що якщо продуктивність не змінюється протягом часу (***f(t)*** – постійна функція), то об'єм продукції $\Delta \boldsymbol{u}$, виробленої за деякий проміжок часу **[*t*, *t*+Δ*t*]** задається формулою $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f(t)} \Delta \boldsymbol{t}$. У загальному випадку справедлива рівність $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f(\xi)} \Delta \boldsymbol{t}$, де $\boldsymbol{\xi} \in [t,\ t + \Delta t]$, яка буде більш точнішою, чим менше $\Delta \boldsymbol{t}$.

Розіб'ємо відрізок [0; *T*] на проміжки часу точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Для величини об'єму продукції Δu_i, виробленої за проміжок часу $[t_{i-1}; t_i]$, маємо $\Delta u_i = f(\xi_i) = \Delta t_i, \xi \in [t_{i-1}; t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i \tag{11.3}$$

При прямуванні $\max_i \Delta t_i$ до нуля кожна з використаних наближених рівностей стає все більш точною, тому

$$u = \lim_{\max_i \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i \tag{11.4}$$

Ураховуючи означення визначеного інтеграла, у кінцевому підсумку отримаємо

$$u = \int_0^T f(t) dt \tag{11.5}$$

тобто, якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то $\int_0^T f(t) dt$ – об'єм продукції, що випускається за проміжок [0; T].

Порівняння цієї задачі з задачею про площу криволінійної трапеції показує, що величина й об'єм продукції, що виробляється за проміжок часу [0; T], численно дорівнює площі під графіком функції $z = f(t)$, яка описує зміну продуктивності праці з часом, на проміжку [0; T] або $\int_0^T f(t) dt$.

Теорема 11.4. (Достатня умова існування визначеного інтеграла). Якщо функція $y = f(t)$ неперервна на відрізку [a; b], то вона інтегрована на цьому відрізку.

11.2.3 Фізичний зміст визначеного інтеграла

Нехай потрібно визначити роботу A, яку виконує змінна сили $F = \boldsymbol{f(x)}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої Ox від $x = a$ до $x = b$, причому напрям сили збігається з напрямом руху. Поділимо цілком довільно шлях $b - a$ на n частин, позначивши точки поділу $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Шлях розіб'ється на n ділянок $[x_o; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{k-1}; x_k]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$. Припустимо, що вказані ділянки достатньо малі й при пересуванні точки M у межах кожного проміжку сила F зазнає незначних змін і дорівнює $F = \boldsymbol{f}(\xi_k)$, де ξ_k – одна з точок проміжку для k-ї ділянки $[x_{k-1}; x_k]$. Згідно з таким припущенням робота на k-й ділянці шляху $\Delta A_k \approx f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менша довжина Δx_k. Тому за точне значення роботи $\boldsymbol{A}$ береться границя суми $\Delta A_k \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ за умови, що найбільша довжина часткових відрізків наближається до нуля:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b F(x)dx \qquad (11.6)$$

Отже, робота змінної сили F, величина якої є неперервною функцією $F = F(x)$, яка існує на відрізку $[a; b]$, дорівнює визначеному інтегралу від величини $F(x)$ сили, взятій на відрізку $[a; b]$.

У цьому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла.

Аналогічно можна показати, що шлях S, пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)dt. \qquad (11.7)$$

Маса m неоднорідного стержня на відрізку $[a; b]$ дорівнює визначеному інтегралу від щільності $\gamma(x)$:

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx. \qquad (11.8)$$

11.2.4 Обчислення статистичних моментів і центра тяжіння

Нехай на координатній площині Oxy деяка маса M розподілена зі щільністю $\rho = \rho(y)$ в деякій множині точок S (це може бути дуга кривої або обмежена плоска фігура). Позначимо $s(y)$ міру вказаної множини (довжина дуги чи площа).

Приклад 11.3. Обчислити $\int_0^1 x^2 dx$.

Розв'язання

Запишемо вираз для інтегральної суми, враховуючи, що всі відрізки $[x_{i-1}; x_i]$ розбиття мають однакову довжину, Δx_i яка дорівнює $\frac{1}{n}$ (де n – кіоькість відрізків розбиття, причому для кожного із відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ розбиття точка ξ_i співпадає з правим кінцем цього відрізка, тобто $\xi_i = x_i = \frac{1}{n}$ $i = 1, 2, ..., n$. (У силу інтегрованості функції $y = x^2$, вибір такого «спеціального» способу розбиття відрізка інтегрування на частини і точки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ на відрізках розбиття не вплине на шукану границю інтегральної суми). Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Відомо, що сума квадратів чисел натурального ряду

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Тому

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{1}{3} .$$

Аналіз приведеного прикладу показує, що успішне розв'язання поставленої задачі можливе лише тому, що інтегральну суму вдалось привести до вигляду, зручному для знаходження границі. Однак така можливість існує далеко не завжди, тому довгий час задача інтегрування конкретних функцій залишалась надзвичайно складною. Встановлення зв'язку між визначеним і невизначеним інтегралами дозволило розробити ефективний метод обчислення визначеного інтеграла, який буде розглядатися пізніше.

11.3 Властивості визначеного інтеграла

Розглянемо спочатку властивості визначеного інтеграла, які мають аналоги у випадку невизначеного інтеграла.

1. Якщо *f(x)* інтегрована на [*a; b*] і *A* – деяке число, то *Af(x)* також інтегрована на [*a; b*] то

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \qquad (11.9)$$

Доведення

$$\sum_{i=1}^{n}(Af(\xi_i))\Delta x_i = A\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to A\int_a^b f(x)dx \quad .$$

2. Лінійність. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ інтегровані на [*a; b*], то їхня сума також інтегрована на [*a; b*] і

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \qquad (11.10)$$

Доведення

$$\sum_{i=1}^{n}(f_1(\xi_i) + f_2(\xi_2))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_2)\Delta x_i \to \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Переходимо до властивостей визначеного інтеграла, які не мають аналогів у випадку невизначеного інтеграла.

3. Визначений інтеграл залежить тільки від величини нижньої й верхньої границь інтегрування, тобто від чисел *a* й *b* і від виду підінтегральної функції *f(x)*, але не залежить від змінної інтегрування. Тому величина визначеного інтеграла не зміниться, якщо букву *x*, яка позначає змінну інтегрування, замінити будь-якою іншою.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz \qquad (11.11)$$

4. Визначений інтеграл з однаковими границями інтегрування дорівнює нулю (за означенням):

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (11.12)$$

5. При зміні місць верхньої і нижньої границь інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (11.13)$$

Доведення

Якщо для проміжків інтегрування [a; b] і [b; a], де ($a \langle b$) взяти одні й ті ж точки розбиття й загальні точки ξ_i, то відповідні цим проміжкам інтегральні суми будуть відрізнятися орієнтацією, а тому, відповідно, знаком. Звідси, переходячи до границь, отримаємо заданий вираз.

6. Нехай функція $f(x)$ інтегрована в найбільшому з проміжків [a; b], [a; c], [c; b]. Тоді вона інтегрована й у двох інших і має місце рівність

$$\int_a^b (f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (11.14)$$

яке б не було взаємне розташування точок a, b, c. Цю рівність називають властивістю адитивності визначеного інтеграла. Ця властивість випливає з означення визначеного інтеграла, якщо в якості точки розбиття взяти точку c.

7. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на [a; b], $a \langle b$ і $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (11.15)$$

Доведення

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_n \to 0}} G_n = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на [a; b] $a < b$ і $f(x) \geq g(x)$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad (11.16)$$

Дійсно, якщо розглянути різницю, то з урахуванням властивості 7, отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

9. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на [a; b], $a \langle b$, то функція також інтегрована на [a; b] і

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (11.17)$$

Доведення

Інтегруємо в границях від a до b очевидну подвійну нерівність

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

Отримаємо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

Тобто

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Середнє значення функції. Нехай дана функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку [a; b]. Тоді на цьому відрізку знайдеться точка c така, що виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)\,. \qquad (11.18)$$

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

називається *середнім значенням функції* $f(x)$ на [$a; b$].

Доведення

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку [$a; b$], то вона інтегрована на цьому відрізку. Нехай m і M, відповідно, найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку [$a; b$]. Вирази $m(b-a)$ і $M(b-a)$ є нижньою й верхньою сумами Дарбу для розбиття, які складаються тільки з одного відрізка, а саме із відрізка [$a; b$]. Оскільки $\int_a^b f(x)dx$ розділяє ці суми, то виконується подвійна нерівність

$$m(b\text{-}a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b\text{-}a).$$

Поділивши обидві частини нерівності на $b - a > 0$, отримаємо

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Число

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

знаходиться між найменшим і найбільшим значеннями неперервної функції, тому це значення досягається в деякій точці *c* на відрізку [*a; b*].

Геометричний зміст теореми говорить про те, що площа криволінійної трапеції *aABb* дорівнює площі трикутника з тією ж основою і висотою *f(c)*.

11. Оцінка інтеграла. Якщо числа *m* і *M* є, відповідно, найменшим і найбільшим значеннями функції *f(x)* на відрізку $a \le x \le b$, то

$$m(b\text{-}a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b\text{-}a). \qquad (11.19)$$

Доведення.

Оскільки $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a;\ b]$, то отримаємо

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \cdot$$

Але оскільки

$$\int_a^b mdx = m\int_a^b dx = m(b-a);$$

$$\int_a^b Mdx = M(b-a),$$

то маємо

$$m(b\text{-}a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b\text{-}a)$$

Приклад 11.4. Оцінити інтервал $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}}$.

Розв’язання

Маємо

$$m = \underset{0 \le x \le 2\pi}{mim} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$M = \max_{0 \le x \le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10+6\sin x}}\right|_{x=\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+6\sin x}} \le \pi .$$

11.4 Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 11.5. Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку [*a; b*], а функція *F(x)* є її первісною на цьому відрізку, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11.20}$$

Цю формулу називають *формулою Ньютона-Лейбніца*.

Доведення

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a;\, b].$$

Ця функція є первісною для функції *f(x)* на [*a; b*], а будь-які дві первісні для однієї і тієї ж функції відмінні одна від одної постійним доданком, тобто існує така постійна *C*, що *Φ(x) = F(x) + C*

$$\int_a^x f(x)dt = F(x) + C, \; x \in [a;\, b].$$

При $x = a$ маємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C .$$

Оскільки

$$\int_a^a f(t)dt = 0,$$

то $F(a) + C = 0$, звідки $C = -F(a)$. Тому

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Поклавши $x = b$, отримаємо

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

а поклавши замість

$$t = x \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Приклад 11.5. Знайти $\int\limits_2^4 x^2 dx$.

Розв’язання

$$\int\limits_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

11.5 Обчислення визначеного інтеграла. Інтегрування підстановкою (заміна змінної)

Теорема 11.6. Якщо:

1) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервна при $t \in [a; b]$;
2) множиною значень функції $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ є відрізок $[a; b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt. \qquad (11.21)$$

Доведення

Нехай $F(x)$ є первісна для $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Оскільки $F(\phi(t))' = f(\phi(t) \cdot \phi'(t),$ то $F(\phi(t))$ є первісною для функції $f(\phi(t) \cdot \phi'(t),\ t \in [\alpha;\beta]$. Тому за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Відмітимо, що:

1) при обчисленні визначеного інтеграла методом підстановки повертатися до старої змінної не потрібно;

2) часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = g(x)$;

3) не слід забувати міняти границі інтегрування при заміні змінних.

Приклад 11.6. Обчислити $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

Розв’язання

$$\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int_{2}^{3} \frac{t^{8} \cdot 2tdt}{t-1} = 2\int_{2}^{3} \frac{t^2 dt}{t-1} = 2\int_{2}^{3} \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt =$$

$$= 2\int_{2}^{3} \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} dt + 2\int_{2}^{3} \frac{dt}{t-1} = 2\int_{2}^{3} (t+1)dt + 2\ln|t-1| \Big|_{2}^{3} = 7 + 2\ln 2.$$

11.6 Інтегрування частинами

Теорема 11.7. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку [$a; b$], то має місця формула

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu. \qquad (11.22)$$

Доведення

На відрізку [$a; b$] має місце рівність $(uv)' = u'v + v'u.$ Тому функція uv є первісною для неперервної функції $u'v + v'u.$ Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо

$$\int_{a}^{b} (u'v + uv')dx = uv\Big|_{a}^{b}.$$

Тому

$$\int_a^b v\cdot u'dx+\int_a^b uvdx=uv\Big|_a^b\Rightarrow\int_a^b vdu+\int_a^b udv=$$

$$=uv\Big|_a^b\Rightarrow\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Приклад 11.7. Обчислити $\int_1^e x^2\ln xdx.$

Розв’язання

$$\int_1^e x^2\ln xdx=\begin{vmatrix}u=\ln x\\ dv=x^2dx\end{vmatrix}=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=$$

$$\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}.$$

11.7 Застосування визначеного інтеграла

11.7. 1 Продуктивність

Раніше ми вводили економічний зміст визначеного інтеграла, що виражає об’єм виробленої продукції при відомій функції продуктивності праці. Розглянемо інші приклади використання інтеграла в економіці.

Якщо *f(t)* – продуктивність праці в момент часу *t,* то $u=\int_0^T f(t)dt$ – це обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0;T]$; $u=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ – це обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1;t_2]$.

Якщо у функції Кобба-Дугласа покласти, що витрати праці є лінійною залежністю від часу, а витрати капіталу незмінні, тоді вона набуде вигляду $r(t) = (At + B)e^{Ct}\ dt$. Тоді обсяг випущеної за *T* років продукції

$$R=\int_0^T(At+B)e^{Ct}dt \tag{11.32}$$

Якщо у функції Кобба-Дугласа ($z = b_0 x_1^{b1} x_2^{b2}$; де z – величина суспільного продукту, x_1 – затрати праці, x_2 – обсяг виробничих фондів) рахувати, що затрати праці є лінійна залежність від часу, а затрати капіталу не змінюються, то вона буде мати вигляд $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тоді об'єм випущеної продукції за *T* років складатиме:

$$u = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt \qquad (11.23)$$

Приклад 11.8. Знайти об'єм продукції, виробленої за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $g(t) = (1 + t)e^{3t}$.

Розв'язання

За формулою (11.20) об'єм виробленої продукції $u = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt$. Використовуючи метод інтегрування частинами, нехай $u = t + 1, \quad dv = e^{3t} dt$. Тоді $du = dt \quad v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t}$. Тому,

$$u = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx$$
$$\approx 2{,}53 \cdot 10^5 (\textit{ум.од.})$$

Приклад 11.9 Знайти обсяг продукції, виробленої за три роки, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $r(t)=(1+2t)\,e^{4t}$.

Розв'язання

Згідно з формулою, обсяг виробленої продукції

$$R = \int_0^3 (1 + 2t)e^{4t} dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами. Нехай $u = 1 + 2t$; $dv = e^{4t} dt$. Тоді $du = 2$ dt;

$$v = \int e^{4t}\, dt = \frac{1}{4}e^{4t}.$$

Отже,

$$R = (1 + 2t)\frac{1}{4}e^{4t}\Bigg| - \int_0^3 \frac{1}{4}e^{4t} \cdot 2dt = \frac{1}{4}(7e^{12} - 1) - \frac{1}{16}e^{4t}\Bigg| = \frac{1}{14}(7e^{12} - 1) - \frac{1}{8}(e^{12} - 1) = \frac{1}{8}(13e^{12} - 1)$$

11.7.2 Коефіцієнт нерівності розподілу доходів населення

Розглянемо функцію $y = g(x)$, що характеризує нерівномірність розподілу доходу серед населення, де y – доля сукупного доходу, отриманого долею x біднішого населення. Графік цієї функції називається кривою Лоренца. (Лоренц Макс, 1876 – 1959, американський економіст і математик).

Досліджуючи криву Лоренца – залежність процента доходів від процента населення, що їх має (крива ОВА, рис. 11.1), ми можемо оцінити ступінь нерівності в розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується на пряму – бісектрису ОА, а тому площа фігури ОАВ між бісектрисою ОА і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника ОАС (коефіцієнт Джіні), характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення.

Очевидно, що $0 \le g(x) \le x$ при x належить проміжку [0; 1] і нерівномірність розподілу доходів тим більша, чим більша площа фігури *OAB* (рис. 11.1). У зв'язку з цим в якості міри вказаної нерівномірності використовують так званий *коефіцієнт Джіні* (Джіні Коррадо (1884–1965) – італійський економіст, статистик, демограф), що дорівнює відношенню площі заштрихованої фігури до площі трикутника *OAB*.

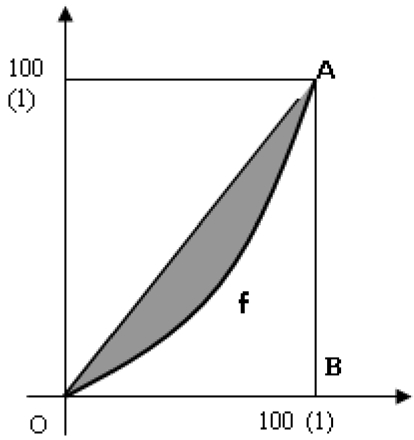

Рисунок 11.1

Приклад 11.10. За даними дослідження в розподілі доходів в одній з держав крива Лоренца ОВА (рис. 11.1) може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, = де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язання

Очевидно, коефіцієнт Джіні (рис. 11.1)

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \text{ оскільки } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2},$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Звідси

$$K = 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 + \frac{\pi}{2} \approx 0{,}57.$$

Достатньо високе значення K показує суттєво нерівномірний розподіл доходів серед населення в розглянутій державі.

11.7.3 Розрахунок початкової суми за її кінцевим результатом

Визначення початкової суми за її кінцевою величиною, отриманою через час t (років) при річному відсотку (відсотковій ставці) p, називається дисконтуванням. Задачі такого виду зустрічаються при визначенні економічної ефективності капітальних вкладів.

Нехай K_t – кінцева сума, отримана за t років, і K – дисконтована (початкова) сума, яку у фінансовому аналізі називають також *сучасною сумою*. Якщо проценти прості $K = K_t(1 + it)$, де $i = \dfrac{p}{100}$ питома ставка відсотка. Тоді $K = \dfrac{K_t}{1 + it}$. У випадку складних відсотків $K = K_t(1 + it)^t$, тому $K = \dfrac{K_t}{(1 + i)^t}$.

Нехай дохід, що поступає щорічно, змінюється за часом й описується функцією $f(t)$ і при питомій нормі відсотка ***i*** **,** який нараховується безперервно. Можна показати, що в цьому випадку дисконтований дохід K за час T обчислюється за формулою

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt \qquad (11.24)$$

Приклад 11.11. Визначити дисконтований дохід за три роки при ставці відсотка 8 %, якщо початкові (базові) капіталовкладення складали

10 млн грн і щорічно намічається збільшення капіталовкладення на 1 млн грн.

Розв’язання

Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією $f(t) = 10 + 1\cdot t$. Тоді дисконтована сума капіталовкладень буде мати вигляд

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0,08t}dt .$$

Інтегруючи, отримаємо K = 30,5 млрд грн. Це означає, що отримання однакової суми, яка утворилася через три роки, щорічні капіталовкладення від 10 до 13 млн грн. рівнозначні одночасному початковому вкладу 30,5 млн грн. при тій же самі відсотковій ставці, що нараховується неперервно.

Приклад 11.12. Знайти дисконтований дохід за три роки при процентній ставці 6 %, якщо початкові (базові) капіталовкладення становили 10 млн грн. і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 1 млн гривень.

Розв’язання

Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією

$$f(n) = 10 + 1\cdot n = 10 + n.$$

Тоді дисконтована сума вкладень буде

$$K_0 = \int_0^3 (10 + n)e^{-0.06n}dn .$$

Інтегруючи, дістанемо $K_0 \approx 32$ млн грн.

Це означає, що для нарахування однакової суми, що утворилася через три роки, щорічні капіталовкладення від 10 до 13 млн грн. рівнозначні одночасному початковому вкладу 32 млн грн. при тій самій процентній ставці, що нараховується неперервно.

З фінансового аналізу відомо: якщо прийняти, що доходи й витрати здійснюються неперервно протягом n років і якщо $(P_t - C_t)\Delta t$ (різниця доходів і затрат) знаходяться в інтервалі $(t, t + \Delta t)$, тоді поточна вартість $TB = (P_t - C_t)\Delta t e^{-\frac{p}{100}t}$, де $e^{-\frac{p}{100}t}$ – коефіцієнт дисконтування, t – кількість років життя проєкту.

Початкова вартість при неперервній капіталізації

$$\lim_{t\to 0} \sum (P_t - C_t)\Delta T e^{-\frac{p}{100}t} = \int_0^n (P_t - C_t)e^{-\frac{p}{100}t}dt .$$

У випадку, якщо $\frac{p}{100}$ є сталою, поточна вартість складає

$$TB=\int_0^{\pi}(P_t-C_t)e^{-\frac{p}{100}t}dt.$$

Якщо $P_t-C_t=q=const$, тоді

$$TB=q\int_0^{\pi}e^{-\frac{p}{100}t}dt=-\frac{q}{\frac{p}{100}}\left(e^{-\frac{p}{100}n}-1\right).$$

Отже,

$$TB=-\frac{q}{\frac{p}{100}}\left(1-e^{-\frac{p}{100}n}\right).$$

У загальному випадку інвестиції будуть вигідні, якщо $TB > C_0$, тобто якщо приведена вартість інвестицій більше початкових капіталовкладень.

Отже, поточна вартість залежить від трьох факторів: різниці річних доходів і витрат q; терміну життя проєкту n і величини процентної ставки $\frac{p}{100}$

$$TB = f(g, n, \tfrac{p}{100}).$$

Максимізація прибутку з часом. Нехай $V(t)$, $D(t)$ і $P(t)$ – загальні витрати, доход і прибуток, що змінюються з часом, тобто залежать від часу t. Тоді:

$$P(t) = D(t) - V(t),$$

або

$$P'(t) = D'(t) - V'(t).$$

Максимум загального прибутку буде тоді, коли $P'(t) = 0$ або $D'(t) = V'(t)$, тобто швидкості зміни доходу й витрат дорівнюють загальному прибутку за час t_1. Їх знайти за формулою

$$P(t)=\int_0^{t_1}P'(t)dt=\int_0^{t_1}(D'(t)-V'(t))dt.$$

Приклад 11.13. Швидкості зміни витрат і доходу діяльності визначаються формулами: $V'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}}$ та $D'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$, де V і D вимірювались мільйонами гривень, а t вимірювали роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим і знайти загальний прибуток, який було одержано за цей час.

Розв’язання

Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$

$$5 + 2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}},$$

$$3t^{\frac{2}{3}} = 12;$$

$$t^{\frac{2}{3}} = 4;$$

$$t = 8 = t_1.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час було одержано прибутку

$$P = \int_0^8 (D'(t) - V'(t))dt = \int_0^8 \left(17 - t^{\frac{3}{2}} - 5 - 2t^{\frac{3}{2}}\right)dt = \int_0^8 \left(12 - \left(-3t^{\frac{3}{2}}\right)\right)dt = 96 - \frac{9}{5}\cdot 32 = 38,9$$

Приклад 11.14. Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн грн у нове обладнання й одержувати 3 млн грн прибутку кожного року протягом 10 років; 2) закупити на 15 млн грн більш досконале обладнання, яке дозволить одержати 5 млн грн прибутку щорічно протягом 7 років. Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінально облікована щорічна ставка 10 %?

Розв’язання

Якщо $f(t)$ є прибуток за час t і $r = \frac{R}{100}$ є номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t = 0$ і $t = \mathrm{T}$ дорівнює

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt.$$

При $R = 10$ маємо $r = 0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде

$$P_1 = \int_0^{10} 3e^{-0.1t}dt - 10 = -30e^{-0.1t}\,| - 10 = 30(1 - e^{-1}) - 10 = 8{,}964 \text{ (млн грн)}.$$

Для другої стратегії одержимо

$$P_2 = \int_0^7 e^{-0.1t}dt - 15 = 50(1 - e^{-0.7}) - 15 = 10{,}17 \text{ (млн грн)}.$$

Отже, друга стратегія краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії.

Знаходження капіталу за відомими інвестиціями. Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення) – це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції, відповідно, як $f(t)$, то викладене вище можна записати у вигляді

$$f(t) = \frac{d}{dt} K(t).$$

Часто потрібно знайти приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Ураховуючи, що $K(t)$ – первісна для функції $f(t)$, маємо:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (5)$$

Приклад 11.15. Чисті інвестиції задано функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначити:

а) приріст капіталу за три роки;

б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складає 50 000.

Розв'язання

а) Скористаємося формулою для обчислення ΔK, поклавши $t_1 = 0$; $t_2 = 3$.

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}dt = 7000\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} | = 7000\frac{2}{3}\sqrt{3^3} = 24248{,}71.$$

б) Позначимо шукану тривалість часу через T, тоді

$$\Delta K = \int_0^T f(t)dt.$$

Підставляємо $\Delta K = 50000$ і $f(t) = 7000\sqrt{t}$.

$$50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t}dt$$

$$\int_0^T 7000\sqrt{t}dt = 7000\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}| = 7000\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}};$$

$$50000 = 7000\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}};$$

$$T^{\frac{3}{2}} = \frac{50000\cdot 3}{7000\cdot 2} = 10,71; \text{ T} = (10,71)^{\frac{2}{3}} = 4,86 \text{ (року).}$$

11.7.4 Знаходження середнього часу, затраченого на виготовлення виробу

Нехай відома функція $t = t(x)$, яка описує затрати часу на виготовлення продукту (виробу) залежно від міри освоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу партії. Тоді середній час $t_{сер}$, витрачений на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє:

$$t_{сер} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx \qquad (11.25)$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробу $t = t(x)$, то найчастіше вона має вигляд:

$$t = ax^{-b}, \qquad (11.26)$$

де a – витрати на перший виріб; b – показник виробничого процесу.

Приклад 11.16. Знайти середній час, витрачений на освоєння однієї деталі в період освоєння від $x_1 = 10$ до $x_2 = 21$ деталей, прийнявши у формулі (11.26) $a = 60$ (хв), $b = 0,5$.

Розв’язання

Використовуючи формулу (11.25), дістанемо

$$t_{сер} = \frac{1}{21-10}\int_{10}^{21} 60x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{60}{11}2\sqrt{x}\Big|_{10}^{21} = \frac{120}{11}(\sqrt{21} - \sqrt{10}) \approx$$

$$\approx 10,9(4,58 - 3,16) = 10,9\cdot 1,42 = 15,48(хв.)$$

11.8 Невласні інтеграли. Основні поняття. Невласні інтеграли I і II роду

Означення 11.2. Інтеграли з нескінченними границями або функцій, які мають розрив, називаються *невласними інтегралами.*

Означення 11.3. Невласні інтеграли з нескінченними границями називаються *невласними інтегралами I роду*.

11.8.1 Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування

Почнемо з випадку, коли проміжком інтегрування являється промінь $[a;+\infty)$.

Означення 11.4. Нехай функція $y = f(x)$ інтегрована на кожному кінцевому проміжку $[a; b]$, $(b > a)$, тобто існує визначений інтеграл

$$\lim_{b \to +\infty} = \int_a^b f(x)dx,$$

то його називають *невласними інтегралами I роду* і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{11.27}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{11.28}$$

Якщо границя

$$\lim_{b \to +\infty} = \int_a^b f(x)dx$$

існує і скінченна, то невласний інтеграл збіжний.

Якщо границя в правій частині не існує, то невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно розглядаємо невласний інтеграл з нескінченною нижньою границею, а саме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{11.29}$$

Нарешті, можна розглянути невласний інтеграл з нескінченною нижньою і верхньою границями $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$ Для цього візьмемо довільну точку *c.* Вона розбиває числову вісь на два променя $(-\infty;c]$ і $[c;+\infty)$. Якщо існують невласні інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, то говорять, що існує невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (11.30)$$

Права частина формули (11.30) не залежить від вибору проміжної точки *c.*

11.8.2 Геометричний зміст невласного інтеграла

Нехай дана невід'ємна функція *y = f(x),* неперервна на промені $[a;+\infty)$. Для кожного *b > a* визначений інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ дає площу криволінійної трапеції *aABb* (рис. 11.2). Умовно переміщуючи відрізок *Bb* вправо, отримаємо в якості значення невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - площу «трикутника» $aA\infty$.

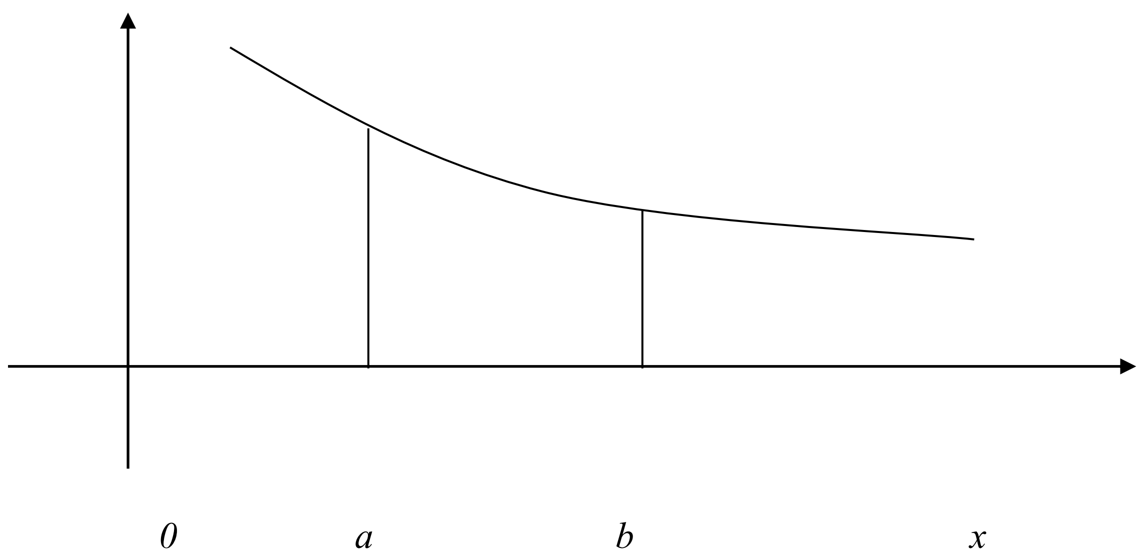

Рисунок 11.2

У роботі з невласними інтегралами дуже часто виділяють дві задачі.

1. Дослідити питання про збіжність цього невласного інтеграла.
2. Обчислення значення інтеграла у випадку, якщо останній збіжний.

Або використання невласних інтегралів дозволяє надати зміст такому поняттю, як *площа напівнескінченої (нескінченої) фігури.*

Приклад 11.17. Обчислити інтеграл або встановити його збіжність

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln|b| - \ln 1) = \lim_{b+\infty} \ln|b| = \infty$$

Отже, цей невласний інтеграл розбіжний.

Приклад 11.18. Обчислити інтеграл або встановити його збіжність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Розв'язання

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} arctg\, x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctg\, x\Big|_0^b =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

– отже, цей невласний інтеграл збіжний.

Приклад 11.19. Обчислити інтеграл або встановити його збіжність

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x dx.$$

Розв'язання

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \cos x dx = \lim_{a\to-\infty} \sin x\Big|_a^0 = -\lim_{a\to-\infty} \sin a$$

Отже, цей невласний інтеграл розбіжний.

У деяких задачах немає необхідності обчислювати інтеграл; достатньо лише знати, збіжний він чи ні. Наведемо деякі ознаки збіжності.

Теорема 11.8 (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ неперервної функції *f(x)* і *φ(x)* задовольняють умові $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ виходить збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ виходить розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Приклад 11.20. Чи збіжний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

Розв'язання

При *x ≥ 1* отримаємо

$$\frac{1}{x^2(1+3^x)} \langle \frac{1}{x^2},$$

Але інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ збіжний. Отже інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$$

збіжний і його значення менше 1.

Теорема 11.9. Якщо існує границя

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \ \ 0 < k < \infty \ \ (f(x) > 0 \text{ і } \varphi(x) > 0),$$

то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ одночасно обидва збіжні або розбіжні (тобто ведуть себе однаково у випадку збіжності).

Приклад 11.21. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} = dx.$$

Розв'язання

Інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

збіжний, оскільки інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \ln\frac{dx}{x^2}$$

збіжний і

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=1.$$

Приклад 11.22.

Розглянемо ситуацію, коли грошовий потік не зупиняється ніколи, наприклад, у випадку експлуатації земельної ділянки. Якщо *r* – неперервна відсоткова ставка, а *R(t)* – відповідно, рента, то знаходження дисконтованої вартості земельної ділянки приводить до формули, яка включає в себе невласний інтеграл:

$$\Pi=\int_{0}^{\infty} R(t)e^{-rt}dt \qquad (11.31)$$

Розв’язання

Нехай *R(t)*= $5e^{-0,7t}$ (млн грн/рік) – рента, яку отримано від земельної ділянки, *r* =10 % – відсоткова ставка. Визначимо його дисконтовану вартість за формулою

$$\Pi=\int_{0}^{+\infty} 5e^{-0,7t}e^{-0,1t}dt=5\int_{0}^{+\infty} e^{-0,8}dt=5\left(\frac{e^{-0,8t}}{-0,8}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{5}{0,8}=6,25$$

Порівняємо цю величину із вартістю ділянки в даний момент часу, який дорівнює *R(0)* = 5млн грн.

Завдання для самостійної роботи

Приклад 11.23. Продуктивність праці робітника протягом дня задано формулою (гр. од./за час), де *t* – час у годинах від початку роботи ($0 \le t \le 8$). Знайти функцію $u = u(t)$, що виражають об’єм продукції від часу *t* (в грошових одиницях) і його величину за робочий день.

12 ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

12.1 Основні поняття. Геометричний зміст. Загальний вигляд диференціального рівняння

Під час вивчення фізичних явищ часто не вдається безпосередньо знайти закон, який пов’язує незалежні змінні й шукану функцію, але можна встановити зв’язок між функцією та її похідними, що виражається диференціальним рівнянням.

Означення 12.1. Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, яке містить або пов’язує шукану (невідому) функцію й її похідні або диференціали з незалежними змінними.

Рівняння, що містять похідні за однією незалежною змінною, називаються звичайними диференціальними рівняннями. Рівняння, що містять похідні шуканої функції за кількома змінними, називаються рівняннями з частинними похідними.

Звичайне диференціальне рівняння можна записати у вигляді рівності

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \qquad (12.1)$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція.

Наприклад, рівняння

$$x^4 y' + 10y'' = 2\cos 3x$$

– рівняння другого порядку,

$$y'''y - x^2 y^6 = 0$$

– рівняння третього порядку,

$$y^4 x dy + x^2 dy = 0$$

– рівняння першого порядку тощо.

У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', y'' \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

Відмітимо, що диференціальне рівняння n-го порядку може явно не містити аргументу x, шуканої функції y або її похідних до $(n - 1)$ порядку.

Означення 12.2. Порядком диференціального рівняння (12.1) називається порядок найвищої похідної, що входить до нього.

Рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (12.2)$$

Рівняння (12.2) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (12.3)$$

Означення 12.3. *Степенем* диференціального рівняння називають найбільший показник степеня старшої похідної після того, як рівняння зведене до цілого раціонального вигляду цієї похідної.

Геометричний зміст диференціального рівняння. У випадку рівняння (12.3) функція $f(x, y)$ визначає *поле напрямків* в області визначення D даної функції. Це поле напрямків у кожній точці області D задається вектором $\bar{\tau}(x, y)$ із кутовим коефіцієнтом $f(x, y)$ $(tg\alpha = f(x, y))$

12.2 Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння. Основні задачі

Означення 12.4. *Розв'язком* диференціального рівняння n-го порядку називається n разів диференційовна функція $y = \varphi(x)$, підставлення якої разом з її похідними перетворюють його на тотожність.

Графік розв'язку на площині xOy називається інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається *інтегруванням* диференціального рівняння.

Означення 12.5. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називають функцію y, яка при підстановці її у рівняння перетворює рівняння на тотожність і залежить від аргументу x і n довільних сталих $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, ..., C_n).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння може бути і не розв'язаним відносно y, тобто мати вигляд

$$\Phi(x, C_1, C_2, C_3, ..., C_n) = 0.$$

У цьому випадку його називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Означення 12.6. Якщо у загальному розв'язку (інтегралі) диференціального рівняння замість довільних сталих записати фіксовані постійні числа, то одержаний розв'язок називають частинним розв'язком цього рівняння.

Найчастіше сталі $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ обирають не довільно, а так, щоб розв'язок рівняння задовольняв деяким початковим умовам.

Розв’язок диференціального рівняння може бути поданий у неявній формі або у параметричному вигляді. Розглянемо такі зображення розв’язків для рівняння (12.2). Рівняння

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{12.4}$$

визначає розв’язок рівняння у неявній формі, якщо воно визначає y як неявну функцію від x: $y = \varphi(x)$, яка є розв’язком рівняння. При цьому вираз (12.4) називають інтегралом рівняння. Співвідношення

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \left(t_1, t_2\right) \tag{12.5}$$

дають розв’язок рівняння у параметричній формі на проміжку $t \in (t_1; t_2)$, якщо на цьому проміжку $F(\varphi(t), \psi(t), \psi'(t)) = 0$. Так, наприклад, для рівняння $y' = -\dfrac{x}{y}$ розв’язки можна записати у різних формах:

1. У явній формі $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1;1)$.
2. У неявній формі $x^2 + y^2 = 1$.
3. У параметричній формі $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \neq n\pi,\ n \in Z$.

Задача Коші для рівняння (12.3) ставиться так: серед розв’язків рівняння (12.3) знайти такий, який для заданого значення аргументу $x = x_0$ набуває заданого числового значення $y(x_0) = y_0$. При цьому числа x_0 та y_0 називають початковими умовами.

Геометричний зміст задачі Коші. Серед інтегральних кривих знайти таку, що проходить через дану точку $(x_0; y_0)$ із області визначення функції $f(x, y)$.

Теорема 12.1 (існування й єдиність розв’язку задачі Коші). Якщо в рівнянні $y' = f(x; y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервна в деякій області *D*, яка містить точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв’язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$ або $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Для знаходження *n* сталих треба задати *n* початкових умов.

Означення 12.7. Спільне задання диференціального рівняння й відповідної кількості початкових умов називають *задачею Коші*.

Наприклад, для диференціального рівняння першого порядку задачу Коші можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1 \end{cases} \tag{12.6}$$

У теорії звичайних диференціальних рівнянь можна виділити дві основні задачі:

1. Знаходження диференціального рівняння й початкових умов, які описують досліджуваний процес.

2. Розв'язування заданої задачі Коші або знаходження загального розв'язку (інтеграла) заданого диференціального рівняння.

12.3 Приклади задач, що приводять до диференціальних рівнянь

Розглянемо деякі конкретні задачі з фізики, математики, що призводять до диференціальних задач.

Приклад 12.1 (Закон природного зростання). Законом природного зростання називають такий закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини. Треба знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент кількість речовини дорівнювала y_0.

Розв'язання

Позначимо через $y(t)$ шукану кількість речовин у момент t і побудуємо математичну модель закону природного зростання, тобто розв'яжемо першу основну задачу.

Згідно з механічним змістом похідної першого порядку закон природного зростання речовини можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = ky, \tag{12.7}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі повинна виконуватись рівність

$$y\big|_{t=t_0} = y_0. \tag{12.8}$$

Отже, математична модель закону природного зростання речовини є задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку вигляду (12.7) із початковою умовою (12.8).

Тепер розв'яжемо задачу Коші. Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (12.7):

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \ \textit{або}\ d(\ln y) = d(kt).$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятися лише довільною сталою, тобто

$$\ln y = kt + C \Rightarrow y = e^{kt+C} \text{ або } y = e^{C} \cdot e^{kt}. \quad (12.9)$$

Формула (12.9) описує нескінченну кількість розв'язків задачі. Використовуючи початкову умову (12.8) при $t_0 = 0$, отримаємо

$$y_0 = e^{C}.$$

І формула (12.9) набуде вигляду

$$y = y_0 \cdot e^{kt} \quad (12.10)$$

Це й є шукана формула. За законом природного зростання (12.10) зростає кількість живих клітин, кристалів, населення.

Приклад 12.2. Матеріальна точка масою $m(r)$ вільно падає під дією сили тяжіння. Знайти закон руху точки без врахування опору повітря.

Розв'язання

Візьмемо числову вісь, додатний напрям якої спрямований вниз, а початок відліку знаходиться в точці *O*. Положення матеріальної точки *M* визначається її координатою і дорівнює довжині відрізка *OM* = *s*, що змінюється залежно від часу *t*. Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$, де m – маса a – прискорення, F – сила, що діє на точку.

За припущенням на точку діє лише сила тяжіння, отже $F = P = mg$, де g – прискорення сили тяжіння. Але прискорення a – це друга похідна від шляху за часом, тому маємо:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg, \text{ або } \frac{d^2 s}{dt^2} = g. \quad (12.11)$$

Рівняння (12.11) є звичайним диференціальним рівнянням, що містить другу похідну невідомої функції $s = s(t)$. Послідовно інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1, \quad (12.12)$$

$$s = g\frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2, \quad (12.13)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Рівність (12.12) дає шуканий закон руху матеріальної точки. Зазначимо, що сталі C_1, C_2 можна визначити, якщо задані початкове положення й початкова швидкість матеріальної точки.

Нехай у початковий момент ($t = 0$) швидкість точки v_0, а відстань від початку дорівнює s_0. Оскільки $\frac{ds}{dt} = v$, то із (12.12) знаходимо $C_1 = v_0$, далі з формули (12.13) обчислюємо C_2: $C_2 = s_0$. Тоді закон руху має вигляд: $s = g\frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0$.

Приклад 12.3. Знайти рівняння кривої, знаючи, що відрізок, який відтинається дотичною в довільній точці кривої на осі абсцис, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Розв'язання

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка шуканої кривої рівняння дотичної до кривої в точці M має вигляд $У - y = y'(X - x)$, де X, $У$ – поточні точки дотичної, y' – похідна шуканої функції в заданій точці.

За умовою $AO = 2x$, точка $A(2x; 0)$ належить дотичній, отже $-y = y'x$. Одержане рівняння можна записати: $y'x + y = 0$ або $xdy + ydx = 0$. Ліва частина останнього рівняння являє собою повний диференціал добутку змінних $d(xy)$. Тому отримаємо $d(xy) = 0$, звідки

$$xy = C. \tag{12.14}$$

Одержали розв'язок у вигляді загального інтеграла. Розв'язок (12.14) можна записати у явному вигляді: $y = \frac{C}{x}$.

Якщо задана конкретна точка $M(x; y)$, то $C = x_0 \cdot y_0$, і частинний розв'язок має вигляд $x \cdot y = x_0 \cdot y_0$, або $y = \frac{x_0 \cdot y_0}{x}$.

Приклад 12.4 (Закон радіоактивного розпаду). Відомо, що радіоактивний розпад речовини здійснюється так: швидкість розпаду речовини у будь-який момент часу пропорційна кількості речовини, що не розпалась. Треба знайти формулу, за якою можна визначити кількість речовини y, яка не розпалась, у будь-який момент часу t при початковій кількості речовини y_0.

Розв'язання

Використовуючи механічний зміст похідної при умові задачі, закон радіоактивного розпаду речовини можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = -ay, \tag{12.15}$$

де коефіцієнт $(-a)$ від'ємний, тому що функція $y(t)$ спадає і її похідна від'ємна. Рівняння (12.15) аналогічне рівнянню (12.7) і тому його можна записати у вигляді

$$y = y_0 \cdot e^{-at}. \tag{12.16}$$

Приклад 12.5 (Рівняння руху). Нехай матеріальна точка $M(x;\ y;\ z)$ масою m рухається в просторі. Радіус-вектор цієї точки позначимо $\vec{r}$. Координата точки M є і координатами радіуса-вектора $\vec{r}$. Для математичного опису руху матеріальної точки треба знайти вираз $\vec{r}$ або його координат x, y, z у вигляді функції часу t.

Розв'язання

Згідно з механічним змістом похідних першого та другого порядків, вектор

$$\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$$

є швидкістю, вектор

$$\frac{d^2\,\vec{r}(t)}{dt^2} = (x''(t),\ y''(t),\ z''(t))$$

є прискоренням руху точки M

За законом Ньютона

$$m\frac{d^2\,\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (12.17)$$

де сила $\vec{F} = (X, Y, Z)$

Рівняння (12.17) називають основним рівняння механіки. Це рівняння еквівалентне трьом рівнянням у координатній формі

$$mx''(t) = X,\ my''(t) = Y,\ mz''(t) = Z \qquad (12.18)$$

Одержане рівняння, що є математичною моделлю руху, є диференціальним рівнянням другого порядку (12.17) або системою диференціальних рівнянь (12.18).

12.4 Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття й типи рівнянь. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння. Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах

12.4.1 Рівняння з відокремлюваними змінними. Основні поняття й спосіб розв'язання

Означення 12.8 Диференціальне рівняння першого порядку називається *рівнянням із відокремлюваними змінними*, якщо воно може бути зображено у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{12.19}$$

або

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \tag{12.20}$$

де $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ – деякі функції змінної x; $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ – функції змінної y.

Для розв'язання такого рівняння потрібно його звести до такого вигляду, щоб диференціал і функції змінної x були в одній частині рівності, а змінної y – в іншій, а саме розділимо ліву частину (12.20) на $N(y)P(x)$, тоді отримаємо

$$\frac{M(x)N(y)}{N(y)P(x)}dx + \frac{P(x)Q(y)}{N(y)P(x)}dy = 0. \tag{12.21}$$

Після спрощення отримаємо

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0. \tag{12.22}$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності (12.22), отримаємо

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C. \tag{12.23}$$

Зауваження 12.1. Особливої уваги потребують точки, де перетворюються на нуль функції $N(y)$ і $P(x)$. Нехай, наприклад, $N(y_0) = 0$. Тоді рівняння (12.20) наряду з розв'язком (12.23) має також розв'язок $y = y_0$. Аналогічно, якщо $P(x_0) = 0$, то $x = x_0$ є розв'язком (12.23).

Приклад 12.7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(xy^2 - x)dx - (x^2y - 4y)dy = 0.$$

Розв'язання

Винесемо за дужки змінні x та y

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 4)dy = 0,$$

Запишемо це рівняння у вигляді:

$$x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 4)dy.$$

Перенесемо змінну з x до диференціала dx, а змінну y до диференціала dy отримаємо:

$$\frac{ydy}{y^2-1}=\frac{xdx}{x^2-4}.$$

Інтегруємо цю рівність

$$\int\frac{ydy}{y^2-1}=\int\frac{xdx}{x^2-4},$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+C.$$

Спростимо

$$\left|y^2-1\right|=\left|\left(x^2-4\right)\cdot C\right|\Rightarrow y^2-1=\left(x^2-4\right)\cdot C\Rightarrow y^2=\left(x^2-4\right)\cdot C+1\Rightarrow$$

$$y=\pm\sqrt{\left(x^2-4\right)\cdot C+1}.$$

Диференціальні рівняння находять достатньо широке застосування в моделях економічної динаміки, в яких відображаються не тільки залежність змінних від часу, але й їхній взаємозв'язок із часом. Тепер розглянемо задачу, яка є математичною моделлю цих рівнянь.

Приклад 12.8. Знайти функцію попиту, якщо E_p = – 2 = *const* і $y(3)=\frac{1}{6}$.

Розв'язання

Із означення еластичності виходить, що $-2=\frac{p}{y}\cdot\frac{dy}{dp}$ при початковій умові $y(p)=y_0$ тому $y=\frac{1}{6}$, $p=3$.

Оскільки шукана функція задана рівнянням з відокремлювальними змінними, отримаємо: $-2ydp=pdp$

$$\frac{dy}{y}=-2\frac{dp}{p},$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int-2\frac{dp}{p},$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dp}{p},$$

$$\ln\left|y\right|=\ln\left|p^{-2}\cdot C\right|,$$

$$y=p^{-2}\cdot C \quad \text{або} \quad y=\frac{C}{p^2}.$$

Підставляємо у розв’язок початкову умову й знаходимо C

$$C = p^2 \cdot y\,,$$

$$C = \frac{1}{6} \cdot 3^2 = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\,.$$

Отже C = 1,5, тому загальний вигляд диференціального рівняння буде $y = 1{,}5p^{-2}$.

У більш простих ситуаціях попит на товар (пропозиція товару) пропонується лише як залежність від його ціни. У більш складних випадках до розглядання береться також залежність попиту (пропозиції) від швидкості зміни ціни.

Приклад 12.9. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$\sqrt{y^2+1} = xyy'.$$

Розв’язання

Запишемо це рівняння, використовуючи умову

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{12.24}$$

$$\sqrt{y^2+1} = xy\frac{dy}{dx}$$

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dx}{x}$$

Інтегруємо цю рівність

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Обчислимо окремо кожний інтеграл

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{y^2+1} = t \\ y^2+1 = t^2 \\ 2ydy = 2tdt \\ ydy = tdt \end{array} \right| = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{y^2+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\sqrt{y^2+1} + C = \ln|x| + C \Rightarrow y^2 + 1 = \left(\ln|x| + C\right)^2 \Rightarrow y^2 = \left(\ln|x| + C\right)^2 - 1$$

$$y = \pm\sqrt{\left(\ln|x| + C\right)^2 - 1}$$

12.4.2 Однорідні рівняння. Основні поняття й способи розв'язання

Означення 12.9. Функція $f(x;\ y)$ називається *однорідною функцією*, якщо для будь-якого t виконується

$$f(tx;\ ty) = f(x;\ y). \tag{7}$$

Наприклад, функція $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ є однорідною, оскільки

$$f(tx;\ ty) = \frac{txty}{(tx)^2+(ty)^2} = \frac{t^2xy}{t^2x^2+t^2y^2} = \frac{t^2xy}{t^2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{xy}{x^2+y^2} = f(x;y).$$

Означення 12.10. Рівняння вигляду $y' = f(x;y)$ називається *однорідним рівнянням*, якщо $f(x;y)$ однорідна функція.

Покажемо, що розв'язання однорідного рівняння зводиться до розв'язання рівняння з відокремлюваними змінними.

За умовою $f(tx;\ ty) = f(x;\ y)$. Покладемо в цій тотожності $t = \dfrac{1}{x}$, тоді

$$f(x;y) = f\left(1;\frac{y}{x}\right).$$

Однорідне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1;\frac{y}{x}\right).$$

Виконаємо заміну

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \ \text{ і } \ y' = u'x + u \tag{12.25}$$

Тоді отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$u = x\frac{du}{dx} = f(1;u) \Rightarrow \frac{du}{f(1;u) - u} = \frac{du}{x}$$

Інтегруючи його і підставляючи $u = \dfrac{y}{x}$, знаходимо розв’язок.

Зауваження 12.2. Аналогічно, як і для рівнянь з відокремлюваними змінним, якщо

$$f(1;u_0) - u_0 = 0,$$

то однорідне рівняння має розв’язки $u = u_0$ або $y = u_0x$.

Приклад 12.10. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Розв’язання

Це рівняння, вочевидь, не є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки при одному із диференціалів множник містить суму змінних x та y. Перевіримо, чи не є це рівняння однорідним. Для цього зведемо це рівняння до вигляду

$$(x^2 + y^2) - 2xy\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0,$$

$$2xyy' = (x^2 + y^2),$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Перевіримо функцію в правій частині на однорідність:

$$f(tx;ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2t^2xy} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x;y).$$

Отже $f(x;y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ – однорідна функція нульового степеня, і диференціальне рівняння є однорідним. Для його розв’язання робимо заміну $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux$ і $y' = u'x + u$. Після підстановки в рівняння отримаємо

$$u'x + u = \frac{x^2 + (ux)^2}{2xux}$$

$$u'x+u=\frac{x^2+u^2x^2}{2ux^2},u'x+u=\frac{x^2(1+u^2)}{2ux^2},u'x+u=\frac{1+u^2}{2u},u'x=\frac{1+u^2}{2u}-u$$

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо цю рівність

$$\int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{dx}{x}.$$

$y^2=x^2-Cx$ – загальний розв'язок диференціального рівняння в неявній формі (тобто не розв'язне відносно змінної y), $y=\pm\sqrt{x^2-Cx}$ – загальний інтеграл рівняння.

12.4.3 Лінійні диференціальні рівняння. Основні поняття й спосіб розв'язання

Означення 12.10. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції і її похідної, якщо його можна записати у вигляді

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x), \tag{12.26}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції, у частинному випадку – постійні.

Якщо функція $Q(x)$ тотожно дорівнює нулеві, рівняння називається однорідним, у противному випадку – неоднорідним. Із розв'язанням цих рівнянь познайомимося пізніше.

Введемо заміну

$$y=uv,\ y'=u'v+v'u, \tag{12.27}$$

де $u=u(x),v=v(x)$– невідомі функції від x, причому одна з них довільна (але не дорівнює нулеві), дійсно будь-яку функцію $y(x)$ можна записати як $y(x)=\frac{y(x)}{v(x)}\cdot v(x)=u(x)\cdot v(x)$, де v(x)≠0).

Нехай задано рівняння $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$, введемо заміну $y=uv$, $y'=u'v+v'u$ отримаємо

$$u'v+v'u+P(x)\cdot uv=Q(x).$$

Згрупуємо другий і третій доданки

$$u'v+u\left(v'+P(x)\cdot v\right)=Q(x),$$

$$u'v = Q(x). \quad (12.28)$$

Нехай $v' + P(x)\cdot v = 0$. Тоді отримаємо рівняння

$$v' = -P(x)\cdot v,$$

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)\cdot v,$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)\cdot dx.$$

Проінтегруємо це рівняння

$$\int\frac{dv}{v} = -\int P(x)\cdot dx,$$

$$\ln|v| = -\int P(x)\cdot dx,$$

$$v = e^{-\int P(x)\cdot dx}. \quad (12.29)$$

Замість v у (12.28) підставляємо (12.29) отримаємо

$$u'\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx} = Q(x),$$

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx} = Q(x),$$

$$\frac{du}{dx} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)\cdot dx},$$

$$du = e^{\int P(x)\cdot dx}\cdot Q(x)dx.$$

Проінтегруємо задане рівняння

$$\int du = \int e^{\int P(x)\cdot dx}\cdot Q(x)dx$$

$$u = \int e^{\int P(x)\cdot dx}\cdot Q(x)dx + C \quad (12.30)$$

Підставляємо (12.29) і (12.30) у формулу (12.27) отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\cdot\left(\int e^{\int P(x)\cdot dx}\cdot Q(x)dx + C\right) \quad (12.31)$$

Приклад 12.11. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y' - y\cdot ctgx = \sin x.$$

Розв’язання
Введемо заміну $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, отримаємо

$$u'v + v'u - uv \cdot ctgx = \sin x.$$

Згрупуємо другий і третій доданки, отримаємо

$$u'v + u\left(v' - v \cdot ctgx\right) = \sin x. \qquad (12.32)$$

Прирівняємо вираз в дужках до нуля, отримаємо

$$v' - v \cdot ctgx = 0,$$

$$v' = v \cdot ctgx,$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot ctgx,$$

$$dv = v \cdot ctgxdx,$$

$$\frac{dv}{v} = ctgxdx.$$

Проінтегруємо це рівняння

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx,$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x|,$$

$$v = \sin x.$$

Підставляючи замість v у рівняння (12.32), отримаємо

$$u' \cdot \sin x = \sin x,$$

$$\frac{du}{dx} \cdot \sin x = \sin x,$$

$$\frac{du}{dx} = 1,$$

$$du = dx.$$

Проінтегруємо рівняння

$$\int du = \int dx,$$

$$u = x + C.$$

Загальний розв’язок буде мати вигляд

$$y=\left(x+C\right)\cdot\sin x.$$

12.5 Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття. Рівняння, що допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

12.5.1 Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття

У деяких випадках розв'язання диференціального рівняння може бути зведено до послідовного розв'язання двох диференціальних рівнянь першого порядку (тоді говорять, що дане диференціальне рівняння допускає пониження порядку).

Означення 12.11. Диференціальні рівняння порядку вище першого називаються *диференціальними рівняннями вищих порядків,* і їх можна записати у вигляді

$$F(x,y,y',y'')=0. \tag{12.33}$$

Або, якщо це можливо, у вигляді розв'язаної відносно найвищої похідної:

$$y''=f(x,y,y'). \tag{12.34}$$

Будемо в основному розглядати рівняння виду (12.34), від нього можемо перейти до рівняння (12.33).

Розв'язком рівняння (12.34) називається будь-яка функція $y=\phi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком рівняння (12.34) називається функція $y=\phi(x,C_1,C_2)$, де C_1 і C_2 – довільні постійні, що не залежать від x і задовольняють умовам:

1. $y=\phi(x,C_1,C_2)$ є розв'язком ДР для кожного фіксованого значення C_1 і C_2.
2. Які б не були початкові умови

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0\,,\;y'\Big|_{x=x_0}=y'_0 \tag{12.35}$$

існують єдині значення постійних $C_1=C_1^0$ і $C_2=C_2^0$ такі, що функція $y=\phi(x,C_1^0,C_2^0)$ є розв'язком рівняння (12.34) і задовольняє початковим умовам (12.35).

Будь-який розв'язок $y=\phi(x,C_1^0,C_2^0)$ рівняння (12.34), який отримується із загального розв'язку $y=\phi(x,C_1,C_2)$ при конкретних значеннях постійних $C_1=C_1^0$ і $C_2=C_2^0$, називається частковим розв'язком.

Розв'язки рівняння (12.34), які записані у вигляді $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$ або $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$, називаються *загальним і частковим* інтегралом, відповідно.

Графік будь-якого розв'язку ДР другого порядку називається *інтегральною кривою*. Загальний розв'язок рівняння (12.34) представляє собою множину інтегральних кривих; частковий розв'язок – одна інтегральна крива цієї множини, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має до неї дотичну з заданим кутовим коефіцієнтом $y'(x_0)=y'$.

Як і у випадку рівняння першого порядку, задача знаходження розв'язку рівняння (12.34), що задовольняє заданим початковим умовам (12.35) називається задачею Коші.

Теорема 12.1 (існування й єдиності задачі Коші). Якщо в рівнянні (12.34) функція $f(x,y,y')$ і її часткові похідні f'_y і f'_x $f'_{y'}$ неперервні в деякій області D, то для довільної точки (x_0, y_0, y_0') ∊ D існує єдиний розв'язок $y=\phi(x)$ рівняння (12.34), що задовольняє початковим умовам (12.35).

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння n-го порядку важча, ніж першого. Тому будемо розглядати лише окремі види диференціальних рівнянь вищих порядків.

12.5.1 Рівняння, що допускають пониження порядку. Способи розв'язання

Одним із методів інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку. Сутність методу полягає в тому, що за допомогою заміни (підстановки) це рівняння зводиться до рівняння, порядок якого буде нижчим.

Розглянемо три типи рівнянь, що допускають пониження порядку.

I тип. Не містять y і першу похідну. Нехай задано рівняння

$$y''=f(x) \tag{12.36}$$

Оскільки права частина рівняння (12.36) залежить тільки від x, то щоб розв'язати це рівняння, потрібно послідовного проінтегрувати, тобто

$$y'=\int f(x)dx+C_1,$$

$$y=\int y'dx+C_2=\int\left(f(x)dx+C_1\right)dx+C_2.$$

Приклад 12.12. Розв'язати рівняння

а) $y^{(4)}=e^{2x}$;

б) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$ при $x=1$, $y=0$, $y'=1$, $y''=2$.

Розв'язання

а) Оскільки права частина залежить тільки від x, то інтегруємо праву частину послідовно чотири рази, отримаємо

$$y''' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

$$y'' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx + C_1\int dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$$

$$= \frac{1}{8}\int e^{2x}dx + \frac{1}{2}C_1\int x^2 dx + C_2\int x dx + C_3\int dx = \frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{1}{4}\int e^{2x}dx + C_1\int x dx + C_2\int dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$y = \int\left(\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3\right)dx = .$$

12.5.2 Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

називається *лінійним диференціальним рівнянням із постійними коефіцієнтами другого порядку*. Якщо $f(x) = 0$, тобто

$$y'' + a_1 y' + a_0 = 0,$$

то рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку*.

Для пошуку загального розв'язку ЛОДР використовують *характеристичне рівняння*, яке має вигляд

$$k^2 + a_1 k + a_0 = 0.$$

Можливі випадки

1. Корені k_1, k_2 – дійсні й різні, тобто $k_1 \neq k_2$. Тоді

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}.$$

2. Розв'язки характеристичного рівняння k_1, k_2 – дійсні й рівні, тобто $k_1 = k_2$. Тоді

$$x(t) = C_1 e^{kt} + t \cdot C_2 e^{kt}.$$

3. Розв'язки характеристичного рівняння комплексні, спряжені $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ $(\beta \neq 0)$. Тоді

$$x(t) = e^{\alpha t} C_1 \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Приклад 12.13. Розв'язати рівняння

$$y''' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0,$$
$$k_{1,2} = -3.$$

Тоді

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}.$$

Теорема. (Структура розв'язку). Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння можна знайти як суму загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння й частинного розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння.

Частинний розв'язок ЛНДР визначається за виглядом правої частини рівняння і знаходиться за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Нехай $f(x)$ є многочленом *n*-го степеня

$$f(x) = P_n(x).$$

Тоді можливі випадки:

1) число 0 не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукається у вигляді

$$y_* = Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ – многочлен *n*-го степеня з невизначеними коефіцієнтами;

2) число 0 є коренем характеристичного рівняння, тоді

$$y_* = x^k Q_n(x),$$

де k – кратність цього кореня.

Нехай $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=P_n(x)e^{\gamma x}.$$

Можливі випадки:

1) число γ не є коренем характеристичного рівняння. У цьому випадку

$$y_*=Q_n(x)e^{\gamma x};$$

2) число γ є коренем характеристичного рівняння кратності k. Тоді

$$y_*=x^kQ_n(x)e^{\gamma x}.$$

Приклад 12.14. Розв'язати рівняння

$$y''-6y'+9y=6.$$

Розв'язання

Знайдемо $y_{од}$ – розв'язок рівняння $y''-6y'+9=0$. Корені характеристичного рівняння $\lambda^2-6\lambda+9=0$ $\lambda_1=\lambda_2=3$, тому

$$y_{од}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

Оскільки число нуль не є коренем, то частинний розв'язок ЛНДР шукатимемо у вигляді

$$y_*=A.$$

Диференціюємо двічі y_*: $y_*'=0,\ y_*''=0$. Підставимо $y_*,\ y_*',\ y_*''$ у рівняння

$$0-6\cdot 0+9A=6.$$

Звідки $A=\dfrac{2}{3}$ і $y_*=\dfrac{2}{3}$,

$$y=y_{од}+y_*=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{2}{3}.$$

Приклад 12.15. Розв'язати рівняння

$$y''+2y'+y=16e^x.$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння $\lambda^2+2\lambda+1=0$ має розв'язки $\lambda_1=\lambda_2=-1$, тому загальний розв'язок ЛОДР

$$y_{од}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}.$$

Тут $f(x)=16e^x$. Тобто $\gamma=1$, γ не є коренем характеристичного рівняння, значить,

$$y_* = Ae^x.$$

Продифиренціюємо двічі й підставимо у вихідне рівняння

$$Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 16e^x,$$

$$4Ae^x = 16e^x.$$

$$A = 4,\ y_* = 4e^x.$$

Таким чином,

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 4e^x.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 12.1. Розв’язати диференціальні рівняння:

а) $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^3$.

б) $y'' + 9y' + 14y = 0$.

Завдання 12.2. Розв’язати задачу Коші:

а) $y' = \sqrt{x} + 2 \quad y(0) = 1$.

б) $y'' = x + e^{2x} \quad y(0) = \dfrac{9}{4} \quad y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Завдання 12.3. Знайти загальний розв’язок рівняння:

$y'' - y' - 2y = (6x - 11)e^{-x}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Борисейко, В. О. Вища та прикладна математика. Практикум / В. О. Борисейко, В. І. Денисенко, Ю. Ф. Діденко. – К. : КНТЕУ, 2011. – 134 с.

2. Кривуца, В. Г. Вища математика. Практикум : навч. посібник / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К : Центр учбової літератури, 2005. – 536 с.

3. Солодовников, А. С. Математика в экономике : в 2-х частях : учебник / А. С. Солодовников, А. В. Браилов. – М : Финансы и статистика, 2000. – Ч. 1. – 224 с.

4. Математичні методи і моделі в управлінні економічними процесами : монографія / Л. М. Малярець, Є. Ю. Місюра, В. В. Койбічук та ін. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 420 с.

5. Ніколюк, П. К. Математика для економістів : навч. посібник / П. К. Ніколюк, Б. В. Погріщук. – Тернопіль, 2006. – 284 с.

Навчальне видання

РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна,

КОСТІКОВ Олександр Анатолійович,

ЧУМАК Олена Олександрівна,

ВЛАСЕНКО Катерина Володимирівна,

ДАНИЛЬЧУК Оксана Миколаївна

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Підручник

Редагування, комп'ютерне верстання Я. О. Бершацька

114/2020. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 14,53.
Обл.-вид. арк. 11,36. Тираж 100 прим. Зам. № 20.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.